

THÈSE

présentée par

Romain PIERRAT

pour l'obtention du

GRADE de DOCTEUR

Formation doctorale : **Physique**

Laboratoire d'accueil : **Laboratoire d'Énergétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C) du CNRS et de l'ECP**

Propagation et émission du rayonnement en milieu diffusant. Application à l'imagerie des milieux complexes.

Soutenue le 26 octobre 2007

Composition du jury :	MM.	BOCCARA	Claude	Président
		CARMINATI	Rémi	
		DELANDE	Dominique	Invité
		GREFFET	Jean-Jacques	Rapporteur
		SCHEFFOLD	Frank	
		SKIPETROV	Sergey	
		TUALLE	Jean-Michel	Rapporteur

*À mes parents Christine et Jean-Marie
À mon épouse Anna*

Remerciements

Après avoir rédigé plusieurs dizaines de pages au contenu scientifique, me voici de nouveau devant un écran blanc pour me plonger dans de la prose, exercice dans lequel je n'excelle pas.

Ces trois années de doctorat ont commencé par une visite sans prétention au laboratoire EM2C. J'avais rendez-vous avec Rémi CARMINATI. J'ai tout de suite adhéré au sujet de stage et de thèse qu'il me proposait, un sujet qui me permettrait de pratiquer de la belle physique fondamentale aussi bien au niveau théorique que numérique. Quoi de plus naturel que de le remercier ici. Il a su me faire confiance en me donnant toutes les cartes nécessaires à la réussite d'une thèse, tant sur le plan scientifique qu'humain. Nasser DARABIHA et Jean-Jacques GREFFET m'ont fait l'honneur de m'accueillir respectivement au laboratoire EM2C et dans l'équipe nano-optique, qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés. J'en profite pour saluer l'ensemble des membres de l'équipe nano, tout d'abord les enseignants-chercheurs Marine LAROCHE, François MARQUIER et Sébastien VOLZ, puis les posts-doc Luis FROUFE et Emmanuel ROUSSEAU et enfin les thésards Christophe ARNOLD, Olivier CHAPUIS et Loc LE XUAN toujours prêts à me dépanner d'un livre ou à me clarifier le contenu d'une PC de physique.

Au laboratoire, j'ai cotoyé des gens formidables. Cela m'a permis de pleinement profiter de ces années pour préparer mon doctorat bien sûr mais aussi pour m'investir dans la vie du labo. En particulier, j'étais ravi de pouvoir jouer les administrateurs réseau. À ce titre, je remercie Gilbert LUCAS avec qui j'ai collaboré étroitement. Merci également à Merryl DECATOIRE et à Véronique DUROX-RENAULT pour leur gestion administrative sans faille. Même si je n'ai pas eu l'occasion de travailler avec eux directement (ah mais si pourtant, pour réparer mon clavier d'ordinateur portable!), je remercie Erika JEAN-BART et Yannick LE TENO toujours disponibles pour aider au montage des manip.

Terminons le tour d'horizon du laboratoire par le personnel avec qui j'ai parfois longuement abordé des sujets très divers : Philippe RIVIÈRE, Nicolas KAHHALI, Nicolas TRAN et Stéphane de CHAISEMARTIN, toujours ouverts à la discussion. Puisque j'évoque certains thésards, je ne peux oublier leur dévouement quant à l'organisation de mon pot surprise de remerciement, événement qui m'a très sincèrement beaucoup touché. Toute ma gratitude va donc à l'ensemble du personnel présent et aux trois gentils organisateurs (GO) : Laetitia PONS, Matthieu BOFFETY et Stéphane de CHAISEMARTIN et oui encore lui!

Un travail de thèse ne se résume pas à l'environnement du labo. Je me dois également de remercier mes amis et ma famille. Je tiens à faire part de ma plus vive reconnaissance à mes parents Christine et Jean-Marie qui ont su me guider vers le but que je m'étais fixé. Ils ont également toujours été à mes côtés pour résoudre les difficultés qui jalonnent toute vie d'étudiant. Encore merci à eux.

De même, je souhaiterais tirer un grand coup de chapeau à mes grands-parents Yolande et Guy JACQUEMIN qui, malgré les difficultés que représente un tel voyage pour eux, ont accepté avec joie de venir assister à ma soutenance. J'ai une petite pensée pour mon autre grand-père Jean PIERRAT malheureusement décédé et qui aurait aimé être du voyage.

L'évocation de la fin de thèse et de la soutenance constitue pour moi l'occasion de remercier chaleureusement Claude BOCCARA de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, Frank SCHEFFOLD et Sergey SKIPETROV d'avoir assuré la fonction de rapporteur et Jean-Michel TUALLE d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Merci également à Dominique DELANDE d'avoir honoré de sa présence ma soutenance.

Enfin, je conclurai par un Большое спасибо à mon épouse Anna qui a su m'encourager surtout pendant la longue période de rédaction.

Pour conclure, tout simplement MERCI à l'ensemble des personnes ayant contribué de près ou de loin à la réussite de ma thèse.

Résumé

Dans ce manuscrit de thèse, nous évoquons différents aspects de la propagation et de l'émission des ondes électromagnétiques dans un milieu diffusant.

Dans une première partie, nous montrons que l'Équation de Transfert Radiatif (ETR) est un très bon outil pour l'étude de la propagation de lumière en milieu complexe. À l'aide de ce formalisme, nous étudions l'évolution de la cohérence spatiale du faisceau au sein du milieu, véritable signature des différents régimes de transport des photons (diffusion simple, diffusion multiple, diffusif). Ensuite, nous décrivons une démonstration rigoureuse de l'équation de la diffusion à partir d'une approche modale de l'ETR. Nous obtenons en particulier que le coefficient de diffusion est indépendant de l'absorption en régime instationnaire au contraire du régime stationnaire dans lequel il dépend fortement du niveau d'absorption du milieu. Enfin, nous nous intéressons aux fluctuations temporelles d'intensité diffusée et montrons que l'utilisation de l'ETR permet d'aller au-delà du régime diffusif décrit par la théorie de la spectroscopie par ondes diffuses (DWS). Des comparaisons sont réalisées entre des calculs numériques et des expériences en réflexion afin d'évoquer le rôle fondamental de l'anisotropie de la diffusion non décrit par la théorie standard.

La seconde partie est centrée sur l'étude de l'émission de lumière en milieu complexe. Dans un premier temps, nous étudions l'amplification de lumière diffusée dans un système à gain appelé laser aléatoire et montrons qu'il existe un seuil laser en régime de rétroaction incohérente. Ce seuil est quantifié en utilisant une approche modale de l'ETR. Nous montrons en particulier à partir de ce formalisme les limitations de l'approximation de la diffusion dans un tel système. Ensuite, nous évoquons la modification du taux de fluorescence d'une molécule placée dans un milieu complexe. Nous mettons au point un modèle permettant de remplacer le milieu diffusant par un milieu homogène effectif moyen prenant en compte la diffusion multiple et les interactions entre diffuseurs. Ce modèle est validé par comparaison des taux d'émission fluorescente de la molécule placée au sein du milieu. Enfin, nous nous attardons sur le calcul du champ retourné temporellement dans un milieu complexe. Pour cela, nous étendons l'expression connue en acoustique au cas des ondes électromagnétiques. L'expression du champ retourné temporellement est valable dans un milieu réciproque et non absorbant, mais éventuellement anisotrope.

Mots clefs Cohérence, Corrélation, Diffusion, Ondes électromagnétiques, Fluctuations temporelles, Fluorescence, Imagerie, Laser aléatoire, Retournement temporel, Transport

Summary

In this manuscript, we raise different aspects of the propagation and emission of electromagnetic waves in a scattering medium.

In the first part, we show that the Radiative Transfer Equation (RTE) is a very good tool to study light propagation in a complex medium. Thanks to this formalism, we study the evolution of the spatial coherence of the beam inside the medium, which is seen as a signature of the different transport regimes of photons (single scattering, multiple scattering, diffusive regime). Next, we derive rigorously the diffusion approximation by using a modal approach of the RTE. In particular, we obtain that the diffusion coefficient is independent of the level of absorption in the dynamic regime while it depends on absorption in the case of the steady-state regime. Finally, we study the temporal fluctuations of the scattered intensity and show that the use of the RTE allows to go beyond the diffusive regime described by the diffusing-waves spectroscopy theory (DWS). Comparisons between numerical computations and experiments are realized in reflexion to underline the fundamental role of the anisotropy of the scattering, which is not described by the standard theory.

The second part is dedicated to the study of light emission in complex media. First, we study the amplification of scattered light in a gain system called random laser and show that it exists a laser threshold in the incoherent feedback regime. This threshold is quantified by using a modal approach of the RTE. Thanks to this formalism, we highlight the limitations of the diffusion approximation in such a system. Next, we study the modification of the fluorescent decay rate of a single molecule embedded in a complex medium. We derive a model allowing the replacement of the scattering medium by an homogeneous equivalent medium taking into account the multiple scattering and the interactions between scatterers. This model is validated by comparison with the value of the decay rate of the molecule. Finally, we compute the expression of the time-reversed field in a complex medium. To do that, we extend the well-known expression derived in acoustic to the case of electromagnetic waves. The formula is valid in a reciprocal and non-absorbing but eventually anisotropic medium.

Keywords Coherence, Correlation, Diffusion, Electromagnetic waves, Fluorescence, Imaging, Random lasers, Scattering, Temporal fluctuations, Time reversal, Transport

Table des matières

Introduction	xxi
I Transport en milieu diffusant	1
I L'Équation de Transfert Radiatif	3
I.1 Luminance et flux radiatif	4
I.1.1 Vecteur flux radiatif et densité d'énergie	4
I.1.2 L'ETR : 2 approches possibles	5
I.2 Démonstration phénoménologique de l'ETR	5
I.2.1 Paramètres pertinents	5
I.2.2 Fonction de phase ou indicatrice	7
I.3 Bilan d'énergie	11
I.4 Cas d'une géométrie plane	12
I.4.1 Description du système étudié	12
I.4.2 Simplification de l'ETR	12
I.4.3 Conditions aux limites	14
I.4.4 Flux transmis et réfléchi	16
I.5 Conclusion	17
II Cohérence spatiale du rayonnement en milieu diffusant	19
II.1 Équation de transport pour la fonction de corrélation du champ	21
II.1.1 Concepts de base de la théorie de la cohérence spatiale	21
II.1.2 Lien entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale	23
II.1.3 Adaptation de l'expression à la géométrie étudiée	24
II.1.4 Cas particuliers	25
II.2 Résultats numériques	26
II.2.1 Résolution pratique de l'ETR et calcul de la fonction de corrélation	26
II.2.2 Séparation diffus/collimaté dans la fonction de corrélation	26
II.2.3 Longueurs de cohérence	27
II.3 Modèle de luminance pour le régime de diffusion simple	34
II.3.1 Calcul des coefficients X et X'	36
II.3.2 Calcul du terme $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$	36
II.3.3 Validation du modèle	37
II.4 Conclusion	37
III Validité de l'approximation de la diffusion	39
III.1 Expression du coefficient de diffusion	41
III.1.1 Un coefficient de diffusion non-local et dispersif	41
III.1.2 Cas du régime stationnaire	45

III.1.3	Cas du régime instationnaire	45
III.2	Discussions physiques et illustrations	48
III.2.1	Interprétation physique	48
III.2.2	Illustrations de l'importance du choix du coefficient de diffusion	49
III.3	Détermination des conditions aux limites	52
III.3.1	Introduction	52
III.3.2	Équation de la diffusion	53
III.3.3	Étude analytique	54
III.3.4	Étude numérique	54
III.4	Conclusion	56
IV	Fluctuations temporelles d'intensité en régime non-diffusif	57
IV.1	Fonctions de corrélations	59
IV.1.1	Fonction de corrélation temporelle	59
IV.1.2	Relation de SIEGERT	60
IV.2	Extension de la DWS au régime non-diffusif	60
IV.2.1	Théories existantes	60
IV.2.2	Présentation du modèle étendu	61
IV.3	Calculs pratiques en géométrie plane	64
IV.3.1	Calcul indirect de la fonction de corrélation	64
IV.3.2	Calcul direct de la fonction de corrélation	66
IV.4	Résultats numériques et validation expérimentale	69
IV.4.1	Théories comparées	69
IV.4.2	Étude numérique en transmission	70
IV.4.3	Étude en réflexion : rôle de la diffusion anisotrope	72
IV.5	Conclusion	75
II	Émission de lumière en milieu diffusant	77
V	Laser aléatoire avec rétroaction incohérente	79
V.1	Un modèle fondé sur l'ETR	83
V.1.1	Équation de relaxation	84
V.1.2	Équations de Transfert Radiatif	85
V.1.3	Adaptation du modèle à la géométrie étudiée	86
V.2	Un problème complexe qu'il faut simplifier	87
V.3	Un seuil laser observable sous de nombreuses formes	88
V.3.1	Approximation à quatre flux	88
V.3.2	Méthode de MONTE-CARLO	90
V.3.3	Résultats numériques	91
V.3.4	Rôle de la diffusion dans un laser aléatoire	96
V.3.5	Conclusion	97
V.4	Une définition modale du seuil laser	97
V.4.1	Méthode modale	97
V.4.2	Recherche de l'albédo effectif en fonction de l'intensité de pompe	102
V.4.3	Résultats numériques	103
V.4.4	Conclusion	107
V.4.5	Remarque : étude modale stationnaire en diffusion isotrope	108

V.5	Conclusion	111
VI	Émission dipolaire au sein d'un agrégat de diffuseurs à résonance	113
VI.1	Modélisation	115
VI.1.1	Système physique étudié	115
VI.1.2	Modélisation de la molécule fluorescente	115
VI.1.3	Modélisation des diffuseurs dipolaires à résonance	119
VI.1.4	Modélisation du système complet	120
VI.2	Méthode des dipôles couplés et distribution du taux d'émission	120
VI.2.1	Calcul numérique du taux d'émission	120
VI.2.2	Résultats en régime de diffusion multiple	121
VI.3	Recherche de la longueur de diffusion : vers un milieu effectif équivalent .	123
VI.3.1	Équation du champ moyen	125
VI.3.2	Expression de la permittivité effective	127
VI.3.3	Fonction de GREEN du milieu effectif et taux d'émission	132
VI.4	Résultats	133
VI.5	Conclusion	134
VII	Émission et retournement temporel d'ondes électromagnétiques en présence de diffusion en champ proche	137
VII.1	Calcul du champ dans le problème direct	140
VII.2	Calcul du champ retourné temporellement	143
VII.2.1	Expression du champ retourné temporellement sur la paroi de la cavité	143
VII.2.2	Expression du champ total retourné temporellement	144
VII.3	Conclusion	146
Conclusion		147
Annexes		151
A	Démonstration de l'Équation de Transfert Radiatif à partir des équations de MAXWELL	151
A.1	Équation de DYSON	151
A.1.1	Théorie statistique de la propagation d'ondes en milieu aléatoire .	151
A.1.2	Équation intégrale pour le champ électrique	153
A.1.3	Milieu effectif pour le champ moyen	157
A.2	Équation de BETHE-SALPETER	160
A.2.1	L'opérateur de diffusion \mathcal{T} : théorie de la diffusion multiple	161
A.2.2	Les diagrammes de FEYNMAN	165
A.2.3	Une équation fermée pour la corrélation du champ : l'équation de BETHE-SALPETER	169
A.3	Équation de Transfert Radiatif	171
A.3.1	BETHE-SALPETER dans WIGNER	171
A.3.2	Approximations pour retrouver l'ETR	179
A.3.3	L'ETR retrouvée	181
A.3.4	Calcul approché de la fonction de phase	184
A.3.5	Expression explicite de la luminance	186

B	Fonctions de GREEN en espace libre des équations d'onde et de la diffusion	193
B.1	Équation d'ondes vectorielle en espace libre	193
B.2	Équation d'onde scalaire en espace libre	194
B.3	Équation de la diffusion sans absorption en espace libre	195
C	Résolution de l'ETR par la méthode des ordonnées discrètes	197
C.1	Résolution de l'ETR en régime stationnaire	197
C.1.1	Adimensionnement	197
C.1.2	Luminance collimatée	198
C.1.3	Luminance diffuse	198
C.2	Résolution de l'ETR en régime instationnaire	205
D	Fonction de corrélation spatiale pour une luminance isotrope	207
E	Modes propres de l'ETR	209
E.1	Modes propres en régime stationnaire	209
E.2	Modes propres en régime instationnaire	210
F	Démonstration $\alpha(\mu) = \text{Cte}$	213
F.1	Première démonstration	213
F.2	Deuxième démonstration	214
G	Moment d'ordre 1 de la fonction de phase	217
H	Expression du flux transmis par une couche en approximation de la diffusion	219
I	Longueur d'extrapolation z_0 pour les conditions aux limites en approximation de la diffusion	221
I.1	Calcul de z_0 par l'approximation P1	221
I.2	Calcul de z_0 par méthode asymptotique modale	223
I.2.1	Problème de MILNE	223
J	Méthode de MONTE CARLO	225
J.1	Principe	225
J.2	Cas du transfert radiatif	226
J.2.1	Flux transmis sous forme intégrale	226
J.2.2	Algorithme de MONTE CARLO	227
J.2.3	Loi d'échelle pour l'ETR : une interprétation en terme de marche au hasard	229
K	Les diverses méthodes de calcul de la fonction de corrélation temporelle du champ G_1 en régime diffusif	231
K.1	Étude en transmission	231
K.1.1	Formule de PINE	231
K.1.2	Intégrale de la DWS standard avec flux en approximation de la diffusion	233
K.2	Étude en réflexion	234

K.2.1	Formule de PINE	234
K.2.2	Milieu semi-infini : intégrale de la DWS standard avec flux en approximation de la diffusion	235
L	Probabilité d'avoir un chemin de longueur s avec n événements de diffusion	237
M	Polarisabilité d'un atome à deux niveaux	239
M.1	Taux d'émission Γ_a : règle d'or de FERMI	239
M.1.1	Coefficients d'EINSTEIN	239
M.1.2	Taux d'émission	240
M.2	Polarisabilité atomique α : équations de BLOCH optiques	242
M.2.1	Opérateur densité $\hat{\rho}$	242
M.2.2	Polarisabilité atomique	244
M.3	Théorème optique	244
M.3.1	Section efficace de diffusion	245
M.3.2	Section efficace d'extinction	245
M.3.3	Théorème optique et expression finale de la polarisabilité atomique	246
	Références	247

Table des figures

1	Tableau de Georges de LATOUR et fenêtre thérapeutique	xxii
2	Description schématique d'un milieu diffusant et photographie d'une expérience dans du lait	xxiii
I.1	Représentation schématique de la luminance	5
I.2	Représentation schématique de la diffusion par une particule.	8
I.3	Représentation du problème de MIE.	9
I.4	Fonction de phase de MIE.	9
I.5	Exemple de marche au hasard pour calculer la longueur de transport.	10
I.6	Schématisation du bilan d'énergie.	11
I.7	Géométrie du milieu diffusant	13
I.8	Notations utilisées pour décomposer la luminance.	14
I.9	Coefficients de réflexion pour la luminance diffuse.	15
I.10	Représentation schématique de la transmission et de la réflexion à une interface plane.	16
I.11	Notations utilisées pour décomposer les flux.	17
II.1	Perte de directivité d'un faisceau dans un milieu diffusant.	20
II.2	Notations de la formule de WALTHER.	23
II.3	Longueurs intervenant dans le calcul de la fonction de corrélation.	24
II.4	Tracé du degré de cohérence spatiale.	28
II.5	Tracé de l_{coh}^{d+} avec $n_2 = 1$	29
II.6	Effet géométrique sur la longueur de cohérence.	30
II.7	Tracé de l_{coh}^+ avec $n_2 = 1$	30
II.8	Tracé de l_{coh}^{d+} avec $n_2 = 1.33$	31
II.9	Tracé de l_{coh}^+ avec $n_2 = 1.33$	31
II.10	Comparaison schématique des degrés de cohérence.	32
II.11	Tracé de l_{coh}^d avec $n_2 = 1$	32
II.12	Tracé de l_{coh}^d avec $n_2 = 1$ pour plusieurs largeurs.	33
II.13	Tracé de l_{coh}^d avec $n_2 = 1.33$ pour plusieurs largeurs.	34
II.14	Tracé de la luminance en entrée de milieu diffusant.	35
II.15	Comparaison du modèle avec le calcul numérique complet.	38
III.1	Démarche pour obtenir l'expression du coefficient de diffusion.	42
III.2	Coefficient de diffusion non-local et relation de dispersion.	47
III.3	Représentation schématique du transport diffusif de photons et des modes fondamentaux en régime stationnaire et instationnaire.	50
III.4	Comparaison des pentes des flux transmis.	52
III.5	Tracé du flux transmis normalisé en fonction du temps.	53
IV.1	Diffusion par des particules en mouvement.	61

IV.2	Représentation du terme $\mathcal{M}(n) = 1 - \langle \cos \Theta \rangle$	65
IV.3	Tracé de la fonction de corrélation $g_1(\tau)$ dans le cas d'un milieu fin.	71
IV.4	Tracé de la fonction de corrélation $g_1(\tau)$ dans le cas d'un milieu épais.	72
IV.5	Pente de la fonction de corrélation temporelle.	75
V.1	Représentation schématique d'un milieu diffusant amplificateur.	82
V.2	Principe d'un milieu amplificateur.	83
V.3	Système à 4 niveaux utilisé pour décrire les molécules fluorescentes.	84
V.4	Géométrie du milieu amplificateur.	86
V.5	Tracé de l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe.	93
V.6	Densité de population N_1 du niveau excité.	94
V.7	Profils de raies de l'intensité émise.	95
V.8	Profils de raies d'émission calculés à partir d'une méthode de type MONTE CARLO.	96
V.9	Distributions d'intensité d'émission.	97
V.10	Tracé de l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe.	104
V.11	Densité de population N_1 du niveau excité.	105
V.12	Densité de population N_1 du niveau excité.	106
V.13	Tracé des albédos effectifs de seuil.	107
V.14	Tracé des niveaux de pompe de seuil.	108
V.15	Tracé des modes de seuil.	109
V.16	Tracé des modes de seuil.	110
VI.1	Agrégat de diffuseurs étudié.	115
VI.2	Agrégat d'atomes.	120
VI.3	Distribution du taux d'émission.	123
VI.4	Moyenne et fluctuations du taux d'émission.	124
VI.5	Comparaison des valeurs du taux d'émission moyen.	125
VI.6	Corrélations et interactions multiples.	128
VI.7	Interactions multiples entre paires de particules.	128
VI.8	Passage de l'agrégat d'atomes au milieu effectif.	132
VI.9	Comparaison des valeurs du taux d'émission moyen.	134
VI.10	Taux d'émission moyen en fonction du produit $k_0 l_s$	135
VII.1	Représentation d'une expérience typique de retournement temporel.	138
VII.2	Représentation d'une expérience de RT avec un puits acoustique.	139
VII.3	Représentation d'une expérience de RT en électromagnétisme avec diffuseurs en champ proche.	140
A.1	Fonction de corrélation pour des sphères dures disposées aléatoirement dans l'espace.	153
A.2	Type de milieu diffusant étudié.	160
A.3	Interprétation physique de l'opérateur diffusion pour une particule.	161
A.4	Interprétation physique de l'opérateur diffusion dans le cas de n particules avec les \mathcal{V}_i	163
A.5	Interprétation physique de l'opérateur diffusion dans le cas de n particules avec les \mathcal{T}_i	164
A.6	Interprétation physique d'un diagramme.	167

C.1	Discrétisation angulaire.	199
H.1	Représentation du problème plan étudié.	219
I.1	Géométrie du problème de MILNE.	223
J.1	Clarification des notations utilisées pour écrire le flux transmis sous forme intégrale dans le cas d'une géométrie plane.	227
J.2	Illustration de la définition des fonctions l et α	230

Nomenclature

- **1, 2, 3** : numéro du milieu encadrant gauche, numéro du milieu diffusant, numéro du milieu encadrant droit
- 1, 2, 3 : en indice, signifie dans les milieux **1**, **2** ou **3**
- α : polarisabilité
- a : albédo
- a : rayon des particules
- a' : albédo effectif
- A : en indice, signifie absorption (pompage optique)
- $A_{10'}$: coefficient d'EINSTEIN d'émission spontanée de l'état **1** vers l'état **0'**.
- abs : en indice, signifie absorption
- \mathbf{B} : champ magnétique
- B_{02} : coefficient d'EINSTEIN d'absorption entre les niveaux **0** et **2**
- $B_{10'}$: coefficient d'EINSTEIN d'émission stimulée de l'état **1** vers l'état **0'**.
- c : en indice, signifie collimaté
- c : célérité de la lumière
- C : concentration volumique en particules
- c_0 : célérité de la lumière dans le vide
- c_1 : corrélation en intensité dite c_1
- coh : en indice, signifie cohérent
- corr : en indice, signifie corrigé
- δ : distribution de DIRAC
- d : en exposant ou en indice, signifie diffus
- \mathbf{D} : excitation électrique
- \mathcal{D}_B : coefficient de diffusion brownien
- \mathcal{D}_i : coefficient de diffusion en régime instationnaire
- \mathcal{D}_s : coefficient de diffusion en régime stationnaire
- diff : en indice, signifie en approximation de la diffusion
- DLS : *Dynamic Light Scattering*
- DWS : *Diffusing-Wave Spectroscopy*
- ϵ : permittivité diélectrique relative
- $\vec{\epsilon}$: tenseur de permittivité diélectrique relative
- ϵ_0 : permittivité du vide
- η : viscosité dynamique
- e : charge du proton
- E : en indice, signifie émission
- E : champ électrique dans l'approximation scalaire
- E : énergie
- \mathbf{E} : champ électrique
- eff : en indice, signifie effectif
- em : en indice, signifie émission
- EM : Électromagnétique
- ETR : Équation de Transfert Radiatif
- ETR : en indice, signifie en ETR
- ext : en indice, signifie extérieur
- ϕ : flux radiatif
- f : fonction de corrélation de paire
- FMT : *Fluorescence Molecular Tomography*
- γ : pente logarithmique de la fonction de corrélation temporelle
- Γ : fonction de corrélation spatiale
- Γ : taux d'émission fluorescente
- g : facteur d'anisotropie
- g : profil de raie
- g' : profil de raie normalisé
- \mathcal{G} : vecteur propre de l'ETR
- $\underline{\mathcal{G}}$: fonction de GREEN
- \mathbf{G} : tenseur de GREEN
- \mathcal{G} : opérateur de GREEN
- \mathcal{G}_i : moment d'ordre i d'une fonction G
- g_1 : degré de cohérence temporelle du champ
- g_2 : degré de cohérence temporelle de

- l'intensité
- G_1 : fonction de corrélation temporelle du champ
 - G_2 : fonction de corrélation temporelle en intensité
 - h : en indice, signifie hôte
 - h : constante de PLANCK
 - \mathbf{H} : excitation magnétique
 - H : fonction d'HEAVYSIDE
 - \underline{I} : intensité
 - \mathbf{I} : tenseur identité
 - \mathcal{I} : opérateur partie imaginaire
 - inc : en indice, signifie incident
 - incoh : en indice, signifie incohérent
 - \mathbf{j} : densité de courants
 - \mathcal{J}_0 : fonction de BESSEL d'ordre 0.
 - \mathbf{k} : vecteur d'onde
 - \mathbf{k}_0 : vecteur d'onde dans le vide
 - k_0 : valeur propre spatiale discrète de l'ETR
 - k_B : constante de BOLTZMANN
 - $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$: tenseur intensité
 - \mathcal{K} : opérateur intensité
 - λ : longueur d'onde
 - λ_0 : longueur d'onde dans le vide
 - l : longueur de chemin
 - l_a : longueur d'absorption
 - l'_a : longueur d'absorption effective
 - l_{cr} : longueur critique
 - l_e : longueur d'extinction
 - l'_e : longueur d'extinction effective
 - l_g : longueur de gain
 - l_{tr} : longueur de transport
 - l_s : longueur de diffusion
 - L : largeur du milieu
 - L : luminance (fonction de distribution de photons dans le chapitre V)
 - \mathcal{L} : luminance déduite de la formule de WALTHER
 - \tilde{L} : transformée de FOURIER spatiale de la luminance
 - \bar{L} : transformée de LAPLACE temporelle de la luminance
 - L^* : épaisseur optique
 - $\mu = \cos \theta$
 - μ_0 : perméabilité du vide
 - μ_a : coefficient d'absorption
 - μ'_a : coefficient d'absorption effectif
 - μ_e : coefficient d'extinction
 - μ'_e : coefficient d'extinction effectif
 - μ_g : coefficient de gain
 - μ_s : coefficient de diffusion
 - \underline{m} : masse de l'électron
 - \mathbf{M} : tenseur de masse
 - \mathcal{M} : opérateur de masse
 - $\mathcal{M}(n) = 1 - \langle \cos \Theta \rangle$
 - MRT : Miroir à Retournement Temporel
 - ν : fréquence
 - $\nu = 1/k$: inverse des valeurs propres spatiales de l'ETR
 - n : indice optique
 - n : nombre d'événements de diffusion
 - N : nombre de discrétisations angulaires
 - N : densité de population des molécules fluorescentes
 - N : nombre de diffuseurs
 - N_t : densité de population totale des molécules fluorescentes
 - \mathcal{N} : nombre de tirs de MONTE CARLO
 - NA : ouverture numérique
 - ω : pulsation
 - Ω : angle solide
 - OCT : *Optical Coherence Tomography*
 - Π : densité de probabilité
 - $\mathbf{\Pi}$: vecteur de POYNTING
 - p : fonction de phase ou indicatrice
 - p : variable de LAPLACE temporelle
 - \mathbf{p} : dipôle électrique
 - P : puissance
 - P : probabilité ou densité de probabilité
 - \mathbf{P} : densité de polarisation
 - $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$: opérateur de projection transverse
 - \mathbf{q} : vecteur flux radiatif
 - \mathbf{q} : vecteur de diffusion
 - QELS : *Quasi-Elastic Light Scattering*
 - $\mathbf{r}, \mathbf{\rho}$: positions
 - ρ : distance
 - ρ : densité particulière
 - R : en exposant, signifie réfléchi
 - R : rayon de l'agrégat de diffuseurs
 - R^* : épaisseur optique
 - R_{ij} : coefficient de FRESNEL de réflexion en énergie du milieu i vers le milieu j
 - \mathcal{R} : opérateur partie réelle

- ref : en indice, signifie référence
- RT : Retournement Temporel
- σ : section efficace
- Σ : surface
- s : distance
- s : valeur propre temporelle de l'ETR
- \mathbf{s} : position
- S : surface
- S : en indice, signifie source
- S : luminance source
- \mathcal{S} : luminance source dimensionnée selon la formule de WALTHER
- sca : en indice, signifie diffusé
- sort : en indice, signifie sortant
- (θ, φ) : angles des coordonnées sphériques
- Θ : angle de diffusion
- τ : temps de corrélation
- $\tau_0 = 1/(\mathcal{D}_B k^2)$
- $\tau_e = 1/A_{10'}$: durée de vie radiative de l'état excité $\mathbf{1}$
- t : temps
- T : en exposant, signifie transmis
- T_{ij} : coefficient de FRESNEL de transmission en énergie du milieu i vers le milieu j
- $\vec{\mathbf{t}}$: tenseur de diffusion
- \mathbf{T} : tenseur de diffusion
- \mathcal{T} : opérateur de diffusion
- TRM : *Time-Reversal Mirror*
- u : densité d'énergie (densité de photons dans le chapitre V)
- \bar{u} : transformée de LAPLACE de la densité d'énergie
- \mathbf{u}, \mathbf{u}' : directions
- V : volume
- V : potentiel
- \mathcal{V} : opérateur potentiel
- VP : opérateur valeur principale
- w : degré de cohérence spatiale
- w : poids de GAUSS
- W : densité spectrale de puissance
- (x, y, z) : coordonnées cartésiennes
- X : paramètre de taille
- z_0 : longueur d'extrapolation
- z_s : profondeur de la source en approximation de la diffusion
- $+$: en exposant, signifie dans le sens des z croissants
- $-$: en exposant, signifie dans le sens des z décroissants
- \perp : en exposant ou en indice, signifie transverse
- \parallel : en exposant ou en indice, signifie parallèle
- $'$: en exposant, signifie partie réelle
- $''$: en exposant, signifie partie imaginaire

Introduction

Si dans la première moitié du siècle dernier on pouvait penser qu'il n'y avait plus grand chose de fondamentalement nouveau à attendre de l'optique, c'était sans compter sur le développement du laser. L'optique n'a pas dit son dernier mot. Il n'y a qu'à énumérer ses domaines d'application : transport d'information (fibre optique), stockage de données (disque compact, DVD, disque *blue ray*), métrologie (mesure de la distance Terre-Lune, microscopie haute résolution), et j'en passe. L'optique sert également à obtenir de l'information sur la structure d'un milieu (diffraction x, tomographie optique). À ce titre, s'est redéveloppé depuis une dizaine d'années une recherche intensive sur l'imagerie médicale (SEBBAH 2001).

Diverses techniques d'imagerie biomédicale existent, on peut citer l'échographie (onde ultrasonore), la radiographie (rayons x), la tomographie par émission de positrons, la scintigraphie (rayons γ) ou plus récemment la tomographie optique cohérente (OCT pour *Optical Coherence Tomography* en anglais) dans le domaine du proche infrarouge (HUANG *et al.* 1991). Ces différentes techniques sont utilisées pour des besoins spécifiques, pour imager des tissus ou des organes et souffrent souvent de défauts majeurs. Par exemple, l'OCT est une technique de très bonne résolution spatiale mais fonctionnant sur de faibles longueurs de pénétration ce qui constitue un handicap. Elle est utilisée principalement pour imager la rétine. Les rayons x et γ sont ionisants, ce qui confère une certaine dangerosité à la radiographie et à la scintigraphie mais permettent d'obtenir des images sur des distances beaucoup plus grandes à l'intérieur des tissus.

La mise au point d'une technique basée sur le rayonnement visible ou proche infrarouge (non ionisant) pour imager des tissus situés à de grandes profondeurs serait alors une avancée majeure. Diverses techniques existent déjà en particulier par utilisation de molécules fluorescentes comme source de lumière directement positionnées aux environs des tissus à imager grâce à des traceurs. L'intérêt par rapport à l'utilisation d'une source externe est que la lumière n'a pas besoin d'effectuer l'aller/retour, ce qui divise la longueur du trajet par deux et améliore la résolution. En effet, le problème principal réside dans le fait que les tissus biologiques sont très fortement diffusants aux longueurs d'onde optiques. On peut le constater très facilement lorsqu'on applique une lampe de poche sur la paume de la main. On constate alors une lueur rougeâtre diffuse en transmission (voir Fig. 1 (a)). Les tissus biologiques sont cependant peu absorbants à ces mêmes longueurs d'onde dans ce qu'on appelle la fenêtre thérapeutique (voir Fig. 1 (b)).

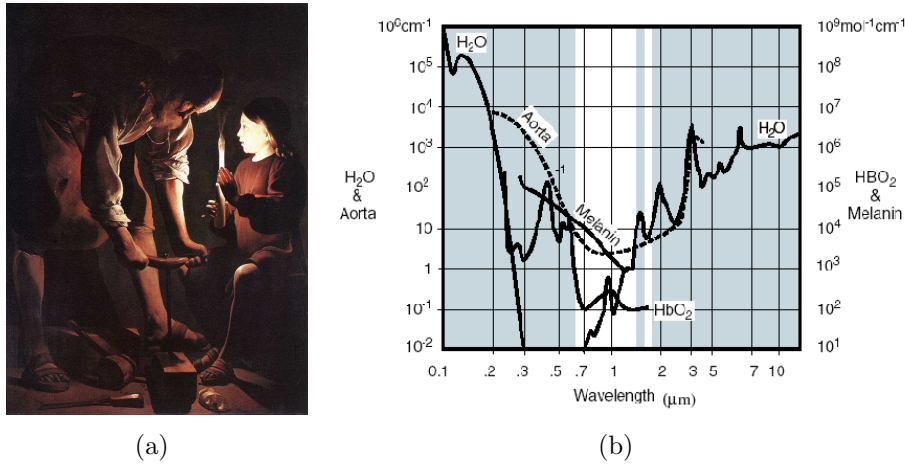


Fig. 1 – (a) : Tableau de Gœrges de LATOUR (1593-1652) *Saint Joseph Charpentier* (1642) exposé au musée du LOUVRE. On distingue nettement la représentation par l'auteur de la diffusion de la lumière issue de la bougie par la main de la jeune fille. Le peintre a beaucoup travaillé sur les jeux de lumière. (b) : Coefficient d'absorption des principaux constituants des tissus biologiques. On constate une faible absorption dans le proche infrarouge, c'est la fenêtre thérapeutique.

Les milieux diffusants (au sens *scattering* en anglais) sont très largement répandus dans la nature. Outre les tissus biologiques, on peut citer les nuages, le brouillard et les peintures. Ce sont des milieux dont la couleur apparaît uniforme, ce qui est dû à la présence de nombreux événements de diffusion qui rendent la lumière isotrope (répartie dans toutes les directions de l'espace). La distance caractéristique de pénétration nécessaire à un faisceau collimaté (ou balistique) pour devenir totalement diffus et isotrope est appelée longueur de transport (notée l_{tr}). Il existe d'autres longueurs caractéristiques de la diffusion de lumière en milieu complexe comme par exemple la longueur de diffusion (notée l_s) qui nous renseigne sur la distance moyenne entre deux diffusions. Comme nous le verrons plus en détail dans la suite, la longueur de diffusion est en général plus petite que la longueur de transport. En effet, il faut souvent plusieurs événements de diffusion pour rendre la lumière diffuse totalement isotrope. La longueur de diffusion correspond à la distance caractéristique d'atténuation du faisceau collimaté (exponentielle décroissante, voir Fig. 2 (b)). Dans le cas du brouillard, cette longueur est de quelques mètres, on constate qu'une voiture située à 50 mètres devant nos phares sera plus nette d'une autre située à 100 mètres. Par contre, dans le cas des peintures, la longueur de diffusion n'est que de quelques micromètres ce qui explique qu'une faible couche de peinture suffise à donner un aspect coloré uniforme au mur quelle que soit la direction d'observation. Les milieux diffusants peuvent être observés par transmission (cas du brouillard), par réflexion (cas d'une peinture) ou les deux. Ainsi, on remarque qu'en avion les nuages apparaissent blancs (forte réflexion), alors qu'au sol, ils sont noirs s'ils sont épais (faible transmission).



Aux longueurs d'onde de la fenêtre thérapeutique, les milieux biologiques ont des longueurs de diffusion de quelques dizaines de micromètres ($l_s = 10 - 100 \mu\text{m}$) et des longueurs de transport de quelques centaines de micromètres ($l_{tr} = 0.1 - 1 \text{ mm}$). Cela signifie qu'au delà de quelques millimètres, le rayonnement est quasi-isotrope. On comprend alors tout l'enjeu qu'il y a à réussir à faire de l'imagerie à quelques millimètres de profondeur. On pourra

s'aider de molécules fluorescentes, marqueurs de la zone à imager, utilisées comme source de lumière à l'intérieur du milieu. C'est une des pistes étudiées dans le projet européen intégré *Molecular Imaging* dans lequel s'inscrit cette thèse. Il regroupe plus d'une vingtaine d'entités européennes (laboratoires publics, entreprises) dans les domaines de la biologie, de la chimie, de la physique et des mathématiques. Les objectifs du projet sont multiples : il s'agit tout d'abord de mettre au point une nouvelle technique d'imagerie biomédicale multiéchelle (cellule, organe, animal), mais également de faire de l'imagerie moléculaire fonctionnelle par fluorescence et enfin de réaliser de la tomographie moléculaire fluorescente (FMT pour *Fluorescence Molecular Tomography* en anglais) par des approches nouvelles issues d'études amonts. Le livrable principal du projet est un prototype d'imager à l'horizon 2008.

Voyons maintenant de plus près quelle est la structure d'un milieu diffusant (voir Fig. 2 (a)). Il est constitué d'un milieu hôte souvent absorbant, constitué d'un liquide ou plus rarement d'un solide dans lequel baignent des particules diffusantes de taille nanométrique aux longueurs d'onde optiques. Ces particules sont diffusantes et absorbantes. Un milieu diffusant est également appelé milieu complexe de par la nature et la géométrie des diffuseurs ou milieu aléatoire de par le caractère aléatoire de la position et de la taille des diffuseurs. Pour donner une idée plus poussée de ce qui se passe lors de la propagation d'un faisceau laser dans un milieu diffusant, la photo de la figure 2 (b) représente une expérience réalisée dans du lait.

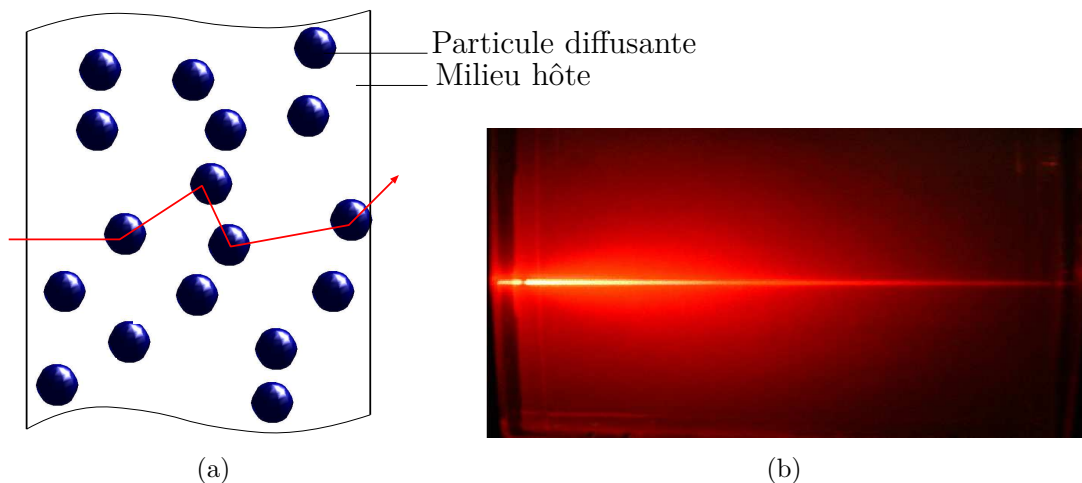


Fig. 2 – (a) : Description schématique d'un milieu diffusant. Le milieu hôte peut être absorbant tandis que les particules sont diffusantes et absorbantes. Notons que la longueur de diffusion l_s ne correspond pas à la distance moyenne entre les particules mais bien à la distance moyenne entre les événements de diffusion. (b) : Photographie d'une expérience de propagation d'un faisceau laser (He-Ne) sous incidence normale dans du lait. La partie collimatée (selon l'axe d'incidence) décroît par diffusion selon la longueur caractéristique l_s . L'énergie perdue se retrouve alors dans le halo lumineux qui correspond à la partie diffuse. La lumière constituant ce halo sera alors quasi-isotrope au bout d'une distance l_{tr} .

Décrivons alors les différents régimes de transport des photons dans le milieu. Lors de la pénétration du faisceau, nous sommes en présence du régime balistique (pas de diffusion). Au bout de la distance l_s , le régime de diffusion simple s'établit. En moyenne sur cette distance, un seul événement de diffusion a eu lieu. Au-delà de l_s , le régime de diffusion multiple s'installe, le rayonnement perd peu à peu la mémoire de sa direction initiale. Lorsque celui-ci est totalement isotrope, nous sommes en présence du régime diffusif, régime

caractéristique sur des distances supérieures à quelques l_{tr} . Il existe un autre régime, appelé régime de localisation forte (ANDERSON 1958) faisant intervenir des effets d'interférences entre les différents rayons diffusés. Son existence n'est cependant pas encore prouvée en trois dimensions en optique et nous ne nous attarderons pas sur ce régime dans la suite. Les régimes de transport seront étudiés plus en détail dans le chapitre II. Leur étude est en effet primordiale pour la compréhension de la dégradation de la qualité d'un faisceau au-travers d'un milieu complexe, en particulier pour l'imagerie médicale et les télécommunications.

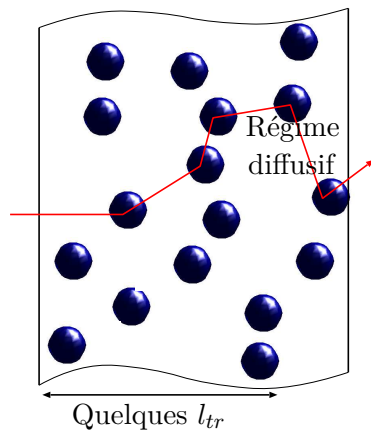
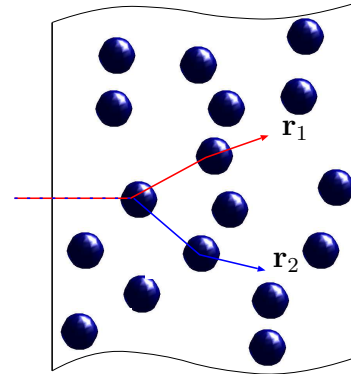
Ainsi, la physique du rayonnement en milieu diffusant est complexe. Il nous faut donc des outils et des modèles adaptés à ce qu'on souhaite étudier. Le premier qui vient à l'esprit est celui utilisant le formalisme d'ondes. Un milieu diffusant peut être décrit par une permittivité diélectrique relative ϵ dépendant de la position \mathbf{r} . Le permittivité présente donc une discontinuité à chaque changement de matériau donc à chaque interface entre le milieu hôte et les particules diffusantes. Ainsi, l'équation de propagation (ou équation d'HELMHOLTZ) du champ électrique \mathbf{E} est donnée par

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega)$$

où ω est la pulsation, c_0 la célérité de la lumière dans le vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et \mathbf{j}_{ext} la densité de courants extérieurs créant le champ incident. On imagine aisément les difficultés rencontrées pour résoudre une telle équation dans le cas de plusieurs milliers de particules. Il faut donc simplifier le problème. Ainsi, dans ce manuscrit, nous développerons les théories suivantes :

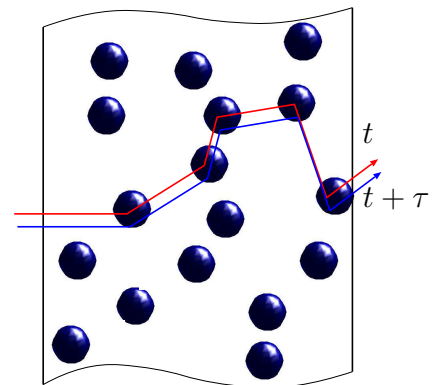
- L'Équation de Transfert Radiatif (ETR) consistant à s'intéresser à la luminance (flux radiatif local et directionnel) dans un milieu moyenné sur l'ensemble des positions possibles des diffuseurs. Ce formalisme de transport sera appliqué dans le cas de l'étude de la cohérence spatiale d'un faisceau au-travers d'un milieu complexe (voir Chap. II), dans le cas de l'étude des fluctuations temporelles d'intensité dues au mouvement des diffuseurs (voir Chap. IV) ou encore dans le cas de l'étude d'un milieu diffusant à gain (voir Chap. V).
- L'approximation de la diffusion consistant à ne s'intéresser qu'à la densité d'énergie (grandeur locale mais non directionnelle) dans le milieu diffusant, et qui peut être vue comme une simplification de l'ETR (voir Chap. III).
- La méthode des dipôles couplés applicable dans le cas où les particules diffusantes sont des dipôles électriques. L'intérêt réside ici dans la conservation du formalisme d'onde et donc la prise en compte des effets interférentiels et des interactions de champ proche. Cette méthode sera développée dans l'étude de la fluorescence d'une molécule unique au sein d'un cluster d'atomes (voir Chap. VI) et l'étude du retournement temporel du champ dans une cavité diffusante avec source ponctuelle (voir Chap. VII).

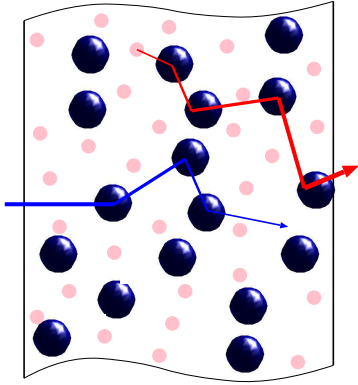
Ce manuscrit se divise en deux parties. La première traite essentiellement du transport en milieu diffusant, et s'appuie sur l'ETR et sur l'approximation de la diffusion. Dans cette partie, nous nous attacherons à étudier l'évolution de la cohérence spatiale au sein du milieu ce qui nous renseigne sur la directionnalité et l'élargissement du rayonnement. En outre cela nous permettra d'obtenir une signature nette des différents régimes de transport et de la dégradation de la qualité d'un faisceau au-travers d'un milieu complexe ce qui est primordial en imagerie médicale et en télécommunication. La cohérence spatiale sera caractérisée par la fonction de corrélation $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) \otimes \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2) \rangle$.



Dans un deuxième temps, nous décrirons de manière rigoureuse la démonstration de l'approximation de la diffusion à partir de l'ETR ainsi que son domaine de validité et les conditions aux limites propres à appliquer. L'approximation de la diffusion constitue un formalisme beaucoup plus simple que l'ETR à manipuler aussi bien au niveau théorique que numérique, c'est pourquoi elle est très utilisée en imagerie ainsi que par les biologistes désireux d'obtenir des informations rapidement sur la propagation de la lumière dans les milieux complexes. Malheureusement, elle souffre de lacunes qu'il est important de caractériser. Évidemment son domaine de validité est limité au régime diffusif mais il s'avère de plus que les paramètres (tels que le coefficient de diffusion \mathcal{D}) ou les conditions aux limites ne sont pas clairement définis.

Enfin, nous décrirons un modèle de calcul de la statistique de fluctuation temporelle d'intensité réfléchie ou transmise valable dans tous les régimes de transport. Ces fluctuations sont dues au mouvement des diffuseurs (comme le mouvement BROWNIEN par exemple). Il est possible à partir de la fonction de corrélation du champ $\langle \mathbf{E}(t) \otimes \mathbf{E}(t + \tau) \rangle$ avec τ temps de corrélation de remonter aux propriétés dynamiques des diffuseurs et ainsi obtenir de l'information sur le milieu. En particulier, la technique dite de la spectroscopie par ondes diffuses (DWS pour *Diffusing-Wave Spectroscopy* en anglais) fonctionnant uniquement en régime diffusif permet déjà de faire de l'imagerie de vaisseaux sanguins ou d'étudier la matière molle.

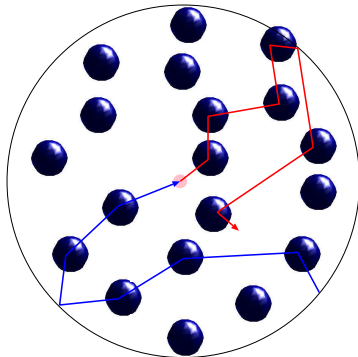
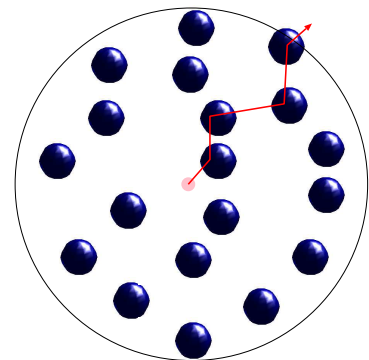




Dans la deuxième partie, nous évoquerons des travaux portant sur l'émission de lumière en milieu complexe. Le premier chapitre fera le lien entre les notions de transport et de fluorescence. Il est basé sur l'étude du transport de lumière (faisceau rouge sur la figure ci-contre) en milieu diffusant à gain, gain généré par le pompage optique (faisceau bleu sur la figure) de molécules fluorescentes (disque rose sur la figure) aléatoirement disséminées dans le milieu. De tels systèmes appelés lasers aléatoires présentent un seuil laser pas totalement expliqué. En particulier, le rôle des interférences n'est pas clairement identifié. Le présent travail donnera un

élément de réponse en montrant clairement qu'un seuil laser peut exister en l'absence de phénomènes cohérents.

Dans un second temps, nous nous attarderons sur l'émission d'une molécule fluorescente au sein d'un cluster d'atomes diffusants. Le taux d'émission d'une molécule Γ est donné par l'inverse du temps caractéristique de décroissance exponentielle de la fluorescence. Il est connu que ce taux dépend fortement de l'environnement de la molécule. L'étude de cette grandeur est alors d'une importance capitale pour l'imagerie puisqu'elle permet d'obtenir de l'information sur l'environnement immédiat du fluorophore.



Enfin, nous évoquerons des travaux sur le retournement d'ondes électromagnétiques dans une cavité diffusante. Faire une expérience typique de retournement temporel consiste à faire émettre de manière très brève une source ponctuelle dans un milieu complexe dont les parois sont réfléchissantes. On enregistre alors en un ou plusieurs points de la paroi le signal reçu (faisceau rouge sur la figure ci-contre) que l'on réémet ensuite retourné temporellement sur une fenêtre de temps de largeur plus ou moins grande (faisceau bleu sur la figure). Pendant cette seconde phase, la source reste pas-

sive. Il s'ensuit alors une focalisation temporelle et spatiale plus ou moins précise de l'onde réémise à la position de la source. En collaboration avec les chercheurs du LOA à l'ESPCI, nos travaux ont consisté ici à prouver que le champ retourné temporellement s'écrit comme étant la partie imaginaire de la fonction de GREEN du problème direct (solution de l'équation d'onde pour un terme source localisé dans le temps et dans l'espace) appliquée au complexe conjugué du dipôle source. On peut imaginer des applications en télécommunication mais également en imagerie, domaine dans lequel la recherche de la position d'une source fluorescente est importante (problème inverse).

Première partie

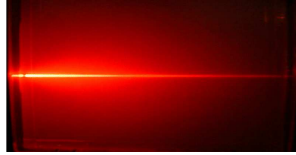
Transport en milieu diffusant

Chapitre I

L'Équation de Transfert Radiatif

Table des matières

I.1	Luminance et flux radiatif	4
I.1.1	Vecteur flux radiatif et densité d'énergie	4
I.1.2	L'ETR : 2 approches possibles	5
I.2	Démonstration phénoménologique de l'ETR	5
I.2.1	Paramètres pertinents	5
	Absorption	6
	Diffusion	6
	Extinction	7
	Albédo	7
	Épaisseur optique	7
I.2.2	Fonction de phase ou indicatrice	7
	Facteur d'anisotropie	8
	Quelques fonctions de phase	8
	Longueur de transport	10
I.3	Bilan d'énergie	11
I.4	Cas d'une géométrie plane	12
I.4.1	Description du système étudié	12
I.4.2	Simplification de l'ETR	12
I.4.3	Conditions aux limites	14
I.4.4	Flux transmis et réfléchi	16
	Luminance collimatée	16
	Luminance diffuse	16
	Flux	17
I.5	Conclusion	17



Dans ce chapitre, nous présentons une théorie de transport de la lumière en milieu diffusant. Cette théorie décrit des grandeurs moyennées (sous-entendu sur un ensemble de réalisations du milieu diffusant, c'est à dire moyennées sur l'ensemble des positions, des tailles, ... des diffuseurs) et permet d'aboutir à une équation de transport appelée Équation de Transfert Radiatif (ETR). Cette théorie du rayonnement a été fondée dans les années 1890-1905 (KHVOLSON 1890; SCHUSTER 1905) puis reprise dans les années 1940 pour l'astrophysique (CHANDRASEKHAR 1950). On trouve une théorie semblable dans le cas du transport des neutrons dans les réacteurs nucléaires (CASE et ZWEIFEL 1967). L'ETR est aujourd'hui largement utilisée dans l'étude des transferts radiatifs par les thermitiens dans les milieux semi-transparentes (TAINÉ et PETIT 2003) mais moins en optique, où on lui préfère souvent l'équation de la diffusion en outre pour sa simplicité. L'ETR dans ce régime peut alors être considérée comme étant l'équation de BOLTZMANN pour les photons. Même si celle-ci ne rend pas compte de tous les phénomènes observés (comme par exemple de la localisation d'ANDERSON (ANDERSON 1958) ou de la rétrodiffusion cohérente (KUGA et ISHIMARU 1984; WOLF et MARET 1985; VAN ALBADA et LAGENDIJK 1985)), elle est beaucoup plus simple à résoudre que les équations de MAXWELL.

I.1 Luminance et flux radiatif

L'ETR régit l'évolution de la grandeur luminance notée $L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ dans le milieu. Si $d\phi_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ est le flux d'énergie radiative monochromatique traversant un élément de surface dS de normale \mathbf{n} , centré en \mathbf{r} , dans un angle solide $d\Omega$ centré sur la direction \mathbf{u} , dans l'intervalle de fréquence $[\nu, \nu + d\nu]$, il a pour expression (voir Fig. I.1) :

$$d\phi_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS d\Omega d\nu. \quad (\text{I.1})$$

La luminance $L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ s'interprète alors comme étant le nombre moyen de photons d'énergie $h\nu$ se propageant selon \mathbf{u} , à la position \mathbf{r} et au temps t à un coefficient multiplicatif près. C'est aussi un flux radiatif local et directionnel. Le flux radiatif s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, ainsi, la luminance s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Il arrive fréquemment qu'on omette l'indice ν ainsi que l'unité Hz^{-1} quand on travaille en permanence à fréquence donnée ce qui sera le cas dans la plupart des travaux mentionnés dans la suite.

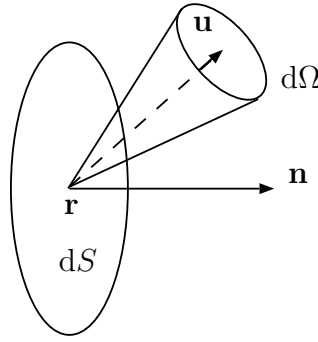


Fig. I.1 – Représentation schématique de la luminance selon la direction \mathbf{u} dans l'angle solide $d\Omega$ traversant la surface dS de normale \mathbf{n} .

I.1.1 Vecteur flux radiatif et densité d'énergie

Le vecteur flux radiatif, quantité non directionnelle, est défini par :

$$\mathbf{q}_\nu(\mathbf{r}, t) = \int_{4\pi} L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} d\Omega d\nu. \quad (\text{I.2})$$

Il s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{sr}^{-1}$. Ainsi, la puissance monochromatique rayonnée à travers un élément de surface dS de normale \mathbf{n} , centrée en \mathbf{r} , est donnée par :

$$d\phi_\nu(\mathbf{r}, t) = \mathbf{q}_\nu(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (\text{I.3})$$

Le vecteur flux radiatif défini par l'équation I.2 est identique au vecteur de POYNTING défini à partir de champs monochromatiques (ISHIMARU 1997).

La densité d'énergie monochromatique correspond à l'énergie électromagnétique monochromatique par unité de volume disponible à la position \mathbf{r} et au temps t . Elle est définie par :

$$u_\nu(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega d\nu \quad (\text{I.4})$$

et s'exprime en $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$.

I.1.2 L'etr : 2 approches possibles

L'ETR peut être établie de plusieurs manières. La méthode historique est dite phénoménologique, elle fait appel à un bilan énergétique (CHANDRASEKHAR 1950). C'est la plus simple à mettre en œuvre et c'est celle-ci que nous allons développer dans ce chapitre. L'autre méthode a été décrite beaucoup plus tard quand on tenta de retrouver l'ETR à partir des équations de MAXWELL (FRISH 1967; FRISH 1968; BARABANENKOV et FINKEL'BERG 1968; BARABANENKOV 1969; RYTOV *et al.* 1989; SHENG 1995; APRESYAN et KRAVTSOV 1996; RYZHIK *et al.* 1996; TUALLE 1996; LAGENDIJK et VAN TIGGELEN 1996). Elle est beaucoup plus complexe et est développée en détail dans l'annexe A.

I.2 Démonstration phénoménologique de l'etr

I.2.1 Paramètres pertinents

Dans la démonstration phénoménologique de l'ETR, nous avons besoin de paramètres pertinents décrivant les différents phénomènes physiques pouvant entrer en jeu. On considère un milieu hôte, éventuellement absorbant (ce qui peut poser des problèmes dans l'étude de grandeurs moyennées (DURANT 2003)) dans lequel baignent des diffuseurs qui peuvent être dans le cas général de différentes tailles, natures et formes mais qui diffusent et absorbent le rayonnement. Le milieu est considéré comme froid, c'est à dire qu'on néglige le phénomène d'émission thermique. Cela est rendu possible car à température ambiante (300 K), le flux maximal se situe dans l'infrarouge lointain (10 μm) d'après la loi de WIEN alors que nous considérons des rayonnements dans le domaine visible ou proche infrarouge. Nous remplaçons ce milieu par un milieu homogène effectif moyenné. Il est donc nécessaire de prendre en compte les phénomènes d'absorption et de diffusion.

Absorption

On s'intéresse au flux surfacique monochromatique $\phi_\nu(s, \mathbf{u})$ se propageant dans une direction \mathbf{u} fixée, à l'abscisse curviligne s . Sous les hypothèses de milieu effectif homogène (invariant par translation) et de processus d'absorption de type MARKOVIEN (perte totale de mémoire entre chaque processus), il s'écrit :

$$\phi_\nu(s, \mathbf{u}) = \phi_0 \exp[-\mu_{a\nu} s] \quad (\text{I.5})$$

où $\mu_{a\nu}$ est appelé coefficient d'absorption monochromatique (m^{-1}) et où ϕ_0 est le flux surfacique monochromatique se propageant selon la direction \mathbf{u} en $s = 0$. La décroissance de l'intensité due à l'absorption dans une direction donnée est alors exponentielle (loi de BEER-LAMBERT), de longueur caractéristique $l_{a\nu} = 1/\mu_{a\nu}$ appelée longueur d'absorption (m). Remarquons que la puissance monochromatique absorbée entre les abscisses s et $s + ds$ est simplement donnée par

$$P_{a\nu}(s, \mathbf{u}) = \mu_{a\nu} \phi_\nu(s, \mathbf{u}). \quad (\text{I.6})$$

Notons que la longueur moyenne entre deux événements d'absorption est donnée par :

$$\langle s \rangle = \int_0^\infty \mu_{a\nu} s \exp[-\mu_{a\nu} s] ds = l_{a\nu} \quad (\text{I.7})$$

ce qui justifie pleinement l'appellation « libre parcours moyen d'absorption » également couramment utilisée pour la longueur d'absorption.

Diffusion

Ayant noté les deux hypothèses formulées pour la prise en compte de l'absorption, on comprend aisément que tout ce qui a été dit précédemment est applicable à la diffusion. Ainsi, l'expression du flux surfacique le long de la direction \mathbf{u} est donnée par :

$$\phi_\nu(s, \mathbf{u}) = \phi_0 \exp[-\mu_{s\nu} s]. \quad (\text{I.8})$$

où $\mu_{s\nu}$ est appelé coefficient de diffusion monochromatique (m^{-1}). La décroissance de l'intensité selon une direction donnée sous forme exponentielle est ici due à la diffusion du rayonnement dans une direction autre que la direction initiale. On appelle $l_{s\nu} = 1/\mu_{s\nu}$ la longueur de diffusion ou libre parcours moyen de diffusion (m). Il représente la distance moyenne entre deux événements de diffusion.

Extinction

Les phénomènes d'absorption et de diffusion sont décrits à l'aide du même formalisme. Pour cette raison, on les regroupe souvent sous une appellation commune : l'extinction. Le coefficient d'extinction est ainsi défini par :

$$\mu_{e\nu} = \mu_{a\nu} + \mu_{s\nu} \quad \text{Extinction=Absorption+Diffusion.} \quad (\text{I.9})$$

Son inverse est appelé longueur d'extinction notée $l_{e\nu}$ (m). Aussi, n'est-il pas toujours évident de discriminer entre le phénomène de diffusion et le phénomène d'absorption car si la physique sous-jacente n'est pas la même, le résultat sur la propagation d'une onde est identique lorsqu'on regarde dans une direction fixe.

Albédo

L'albédo représente le ratio entre la part de l'énergie diffusée et celle éteinte (i.e. absorbée ou diffusée). Il est défini par :

$$a\nu = \mu_{s\nu} / (\mu_{a\nu} + \mu_{s\nu}). \quad (\text{I.10})$$

Un milieu qui apparaît noir comme les suies est souvent très absorbant et peu diffusant dans le domaine visible. Il possède un albédo proche de 0. Au contraire, un milieu apparaissant blanc comme du papier est souvent très diffusant. Il possède un albédo proche de 1.

Épaisseur optique

L'épaisseur optique représente le nombre d'événements d'extinction (absorption et diffusion), sur une distance donnée pour le faisceau balistique (c'est à dire dans la direction incidente du faisceau). Elle permet donc de quantifier la décroissance exponentielle du faisceau. On la définit par :

$$L^* = \mu_{e\nu} L \quad \text{avec } L \text{ épaisseur géométrique traversée.} \quad (\text{I.11})$$

Quand l'épaisseur optique est de l'ordre de ou supérieure à 3 ou 5, le milieu est souvent considéré comme très diffusant ou très absorbant, l'extinction du faisceau collimatée étant importante (i.e. $\exp(-3) \approx 0.05$).

I.2.2 Fonction de phase ou indicatrice

La diffusion du rayonnement par les particules génère un flux dans une direction différente de la direction incidente. La distribution du rayonnement diffusé dans les différentes directions

de l'espace est caractérisée par la fonction de phase (ou indicatrice) notée $p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$. Cette quantité représente la part du flux d'énergie incident selon la direction \mathbf{u} dans l'angle solide $d\Omega$ diffusée selon la direction \mathbf{u}' dans l'angle solide $d\Omega'$. Dans ce travail, nous avons choisi de normaliser la fonction de phase de la manière suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') d\Omega' = 1. \quad (\text{I.12})$$

On parlera de diffusion isotrope dans le cas où la fonction de phase est constante égale à 1, on parlera de diffusion anisotrope dans le cas contraire.

Facteur d'anisotropie

Le facteur d'anisotropie g correspond à la moyenne du cosinus de l'angle de diffusion Θ . L'angle de diffusion est l'angle formé par les vecteurs directeurs \mathbf{u} et \mathbf{u}' . On a ainsi

$$g = \langle \cos \Theta \rangle = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' d\Omega'. \quad (\text{I.13})$$

Comme son nom l'indique, le facteur d'anisotropie décrit l'anisotropie de la diffusion. En règle générale, lorsque $g \rightarrow 0$, la diffusion est isotrope¹, et lorsque $g \rightarrow 1$, la diffusion est orientée vers l'avant. Il est également possible d'avoir des facteurs d'anisotropie négatifs, dans le cas où $g \rightarrow -1$, la diffusion est orientée vers l'arrière. Cela ne sera toutefois possible qu'avec des diffuseurs de structure complexe et en particulier non sphériques.

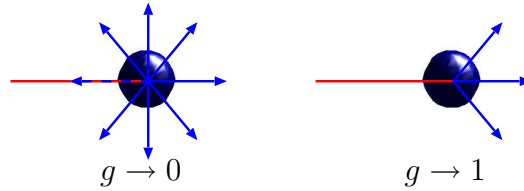


Fig. 1.2 – Représentation schématique de la diffusion par une particule.

On utilise fréquemment les coordonnées sphériques usuelles pour décrire les directions des vecteurs $\mathbf{u}(\theta, \varphi)$ et $\mathbf{u}'(\theta', \varphi')$. Le cosinus de l'angle de diffusion est alors donné par :

$$\cos \Theta = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \quad (\text{I.14})$$

où $\mu = \cos \theta$ et $\mu' = \cos \theta'$.

Quelques fonctions de phase

Dans le cas de particules sphériques, il y a symétrie de révolution. La fonction de phase ne dépend alors que de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$. Ce sera toujours le cas dans les exemples présentés ci-dessous.

¹Ceci est vrai en particulier pour la fonction de phase d'HENYEVY-GREENSTEIN décrite ci-dessous mais sera faux par exemple dans le cas de la fonction de phase de RAYLEIGH. Il est en effet possible d'avoir une moyenne du cosinus de l'angle de diffusion nulle sans pour autant avoir une fonction de phase constante.

Fonction de phase de MIE En 1908, Gustav MIE formula la première théorie de la diffraction de la lumière par une particule sphérique (MIE 1908). Cette théorie fut également largement développée par LORENZ (LORENZ 1890) et DEBYE (cas de cylindres par exemple). Elle résoud de manière formelle les équations de MAXWELL dans le cas d'une particule homogène et isotrope sphérique d'indice n_p et de rayon a baignant dans un milieu hôte homogène et isotrope infini d'indice n_h . La particule est soumise à une onde plane incidente de longueur d'onde λ_0 dans le vide ($\lambda = \lambda_0/n_h$ dans le milieu hôte) se propageant dans le milieu hôte (voir Fig. I.3).

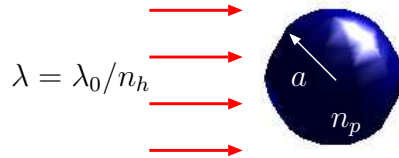


Fig. I.3 – Représentation du problème de MIE.

La théorie de MIE permet d'obtenir les sections efficaces de diffusion, d'absorption et d'extinction que l'on peut relier simplement aux longueurs de diffusion, d'absorption et d'extinction respectivement en fonction de la densité volumique de diffuseurs si on suppose que la diffusion est indépendante (c'est à dire que les particules n'ont pas d'influence les unes sur les autres). Cela est vrai pour une faible concentration volumique de diffuseurs, de l'ordre de 2 % au maximum. Au-delà, les positions des particules sont corrélées (par exemple sphères dures qui ne peuvent s'interpénétrer) et la diffusion est dite dépendante. Cet aspect est discuté plus en détail dans l'annexe A. La théorie de MIE nous renseigne aussi bien sûr sur l'expression de la fonction de phase. L'allure de cette dernière est représentée sur la figure I.4 pour différents paramètres de taille $X = 2\pi a/\lambda$ (VAN DE HULST 1981; BOHREN et HUFFMAN 1983).

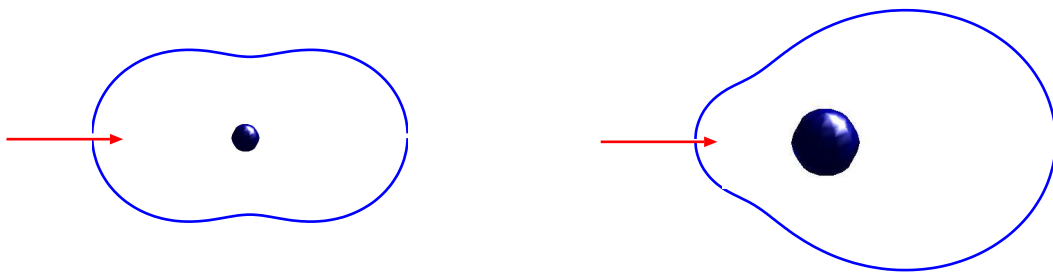


Fig. I.4 – Représentation schématique en coordonnées polaires de la fonction de phase de MIE pour un paramètre de taille $X = 0.0118$ (figure de gauche) et $X = 1.181$ (figure de droite).

Fonction de phase de RAYLEIGH Elle correspond à la fonction de phase de MIE dans la limite des petites particules devant la longueur d'onde (i.e. $X \ll 1$). Le diffuseur sphérique

se comporte alors comme un dipôle électrique. La fonction de phase de RAYLEIGH est analytique, dans le cas d'une onde non polarisée, elle s'écrit

$$p_\nu(\cos \Theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos \Theta^2). \quad (\text{I.15})$$

Comme le montre la figure I.4 (gauche), le facteur d'anisotropie est nul (i.e. $g = 0$) mais la fonction de phase n'est cependant pas constante.

Fonction de phase d'HENYEU-GREENSTEIN Il s'agit d'une fonction de phase totalement analytique et créée de manière à rendre compte correctement des phénomènes de diffusion dans les nuages interstellaires. Elle est également particulièrement bien adaptée aux milieux biologiques (THOMAS et STAMNES 1999). Cette fonction de phase a été construite de telle sorte qu'elle soit piquée vers l'avant pour $g \rightarrow 1$ et isotrope pour $g \rightarrow 0$ tout en vérifiant la condition de normalisation. Elle s'écrit :

$$p_\nu(\cos \Theta) = \frac{1 - g^2}{\sqrt{1 + g^2 - 2g \cos \Theta}^3}. \quad (\text{I.16})$$

Il est remarquable de noter que le développement de cette fonction de phase sur la suite des polynômes de LEGENDRE donne des coefficients en g^n (THOMAS et STAMNES 1999).

Longueur de transport ou libre parcours moyen de transport

Tout comme la longueur d'extinction caractérise la décroissance du faisceau collimaté, la longueur de transport l_{tr} caractérise le rayonnement diffus. Elle représente la distance au bout de laquelle un rayonnement devient totalement isotrope, c'est à dire qu'il a perdu la mémoire de sa direction initiale. L'expression de la longueur de transport peut être obtenue en utilisant une méthode dite de marche au hasard des photons (voir Fig. I.5).

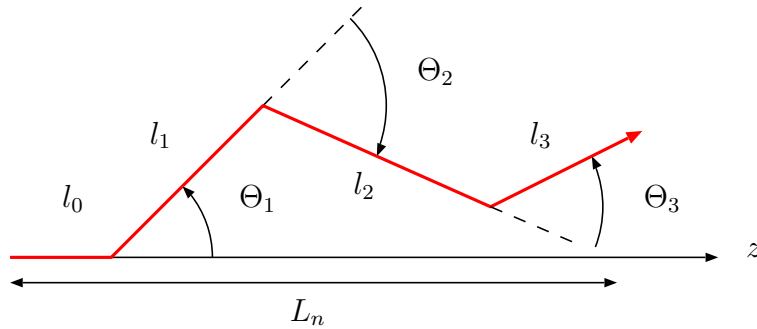


Fig. I.5 – Exemple de marche au hasard pour calculer la longueur de transport.

La distance L_n correspondant à la projection du chemin sur l'axe z s'écrit :

$$L_n = l_0 + l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos (\Theta_1 + \Theta_2) + l_3 \cos (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) + \dots \quad (\text{I.17})$$

La moyenne sur les réalisations peut se décomposer simplement grâce à l'indépendance des processus aléatoires :

$$\langle L_n \rangle = \langle l_0 \rangle + \langle l_1 \rangle \langle \cos \Theta_1 \rangle + \langle l_2 \rangle \langle \cos (\Theta_1 + \Theta_2) \rangle + \langle l_3 \rangle \langle \cos (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \rangle + \dots \quad (\text{I.18})$$

Or,

$$\begin{aligned}\langle \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \rangle &= \langle \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \rangle \\ &= \langle \cos \Theta \rangle^2 - \langle \sin \Theta \rangle^2 = g^2 \quad \text{la moyenne du sinus étant nulle,}\end{aligned}\quad (\text{I.19})$$

résultat que nous pouvons généraliser ainsi : $\langle \cos(\Theta_1 + \dots + \Theta_i) \rangle = g^i$. De plus, on a $\langle l_i \rangle = l_s$, ce qui implique finalement que

$$\langle L_n \rangle = l_s \sum_{i=1}^n g^{i-1}. \quad (\text{I.20})$$

Le fait que $\langle \cos(\Theta_1 + \dots + \Theta_i) \rangle = g^i$ nous permet d'affirmer que le faisceau au bout de i diffusions n'est pas isotrope, ceci quelque-soit le nombre de diffusions i (sauf dans le cas trivial où $g = 0$). Il faudrait pour cela que la moyenne du cosinus soit nul. Cela n'est possible que dans le cas $n \rightarrow \infty$ (cas où le facteur d'anisotropie vérifie $|g| < 1$). En se remémorant le fait que la distance au bout de laquelle le rayonnement est isotrope correspond à la longueur de transport, celle-ci sera simplement donnée par la limite de $\langle L_n \rangle$ quand $n \rightarrow \infty$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \langle L_n \rangle = \frac{l_s}{1 - g} = l_{tr}}. \quad (\text{I.21})$$

Se reporter à l'annexe J pour plus de détails sur le calcul par marche au hasard.

I.3 Bilan d'énergie

Pour obtenir l'expression de l'ETR en régime instationnaire, nous faisons un bilan d'énergie dans un élément de volume $dV = dS ds$ centré en \mathbf{s} (voir Fig. I.6). Il s'agit ici d'écrire la différence entre l'énergie radiative arrivant dans l'angle solide $d\Omega$ sur la surface dS à l'abscisse \mathbf{s} de normale \mathbf{u} et celle sortant dans l'angle solide $d\Omega$ sur la surface dS à l'abscisse $\mathbf{s} + d\mathbf{s}$ de normale \mathbf{u} . Cette différence est due à des pertes par absorption et diffusion (partie du rayonnement arrivant dans la direction \mathbf{u} et partant dans une direction quelconque $\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}$) et à des gains par diffusion (partie du rayonnement arrivant dans la direction \mathbf{u}' et partant dans la direction \mathbf{u}).

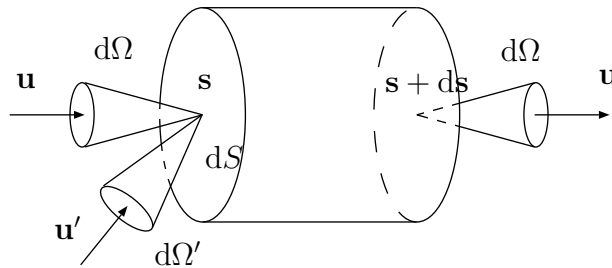


Fig. I.6 – Représentation du volume élémentaire et des notations utilisées pour établir le bilan d'énergie.

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
& [L_\nu(\mathbf{s} + d\mathbf{s}, \mathbf{u}, t + dt) - L_\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t)] d\Omega dS dt \\
& = -\mu_{a\nu} L_\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t) d\Omega dS ds dt && \text{Énergie absorbée} \\
& \quad - \mu_{s\nu} L_\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}, t) d\Omega dS ds dt && \text{Pertes par diffusion} \\
& \quad + \frac{\mu_{s\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}', \mathbf{u}) L_\nu(\mathbf{s}, \mathbf{u}', t) d\Omega' d\Omega dS ds dt && \text{Gains par diffusion.}
\end{aligned} \tag{I.22}$$

Pour décrire les gains par diffusion, il est nécessaire de faire appel à la fonction de phase qui donne la part de la luminance provenant de la direction \mathbf{u}' diffusée dans la direction \mathbf{u} puis d'intégrer sur toutes les directions. En utilisant le fait que $d\mathbf{s} = c dt \mathbf{u}$ et que la dérivée matérielle d/dt (point de vue de LAGRANGE) peut s'exprimer en fonction d'une dérivée partielle (point de vue d'EULER) sous la forme

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{s}}, \tag{I.23}$$

on obtient à partir de l'équation I.22 l'ETR en régime instationnaire :

$$\boxed{
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right) L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) &= -(\mu_{a\nu} + \mu_{s\nu}) L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \\
&\quad + \frac{\mu_{s\nu}}{4\pi} \int_{4\pi} p_\nu(\mathbf{u}', \mathbf{u}) L_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega'
\end{aligned}
} \tag{I.24}$$

où on a remplacé \mathbf{s} par \mathbf{r} . L'ETR est alors une équation intégro-différentielle dont la résolution analytique est quasi-impossible sauf dans des cas très particuliers. Il est possible cependant de la résoudre numériquement à partir d'approches modales (ordonnées discrètes) ou stochastiques (méthodes de MONTE-CARLO, de lancers de rayons) comme nous le verrons dans la suite de ce mémoire.

Remarque : Notons que les grandeurs radiométriques (coefficients de diffusion, d'absorption et fonction de phase) sont définis à la fréquence centrale ν de la luminance. La luminance dépend du temps, elle connaît donc des variations temporelles qui sont néanmoins supposées lentes devant les variations ondulatoires. La luminance est donc quasi-monochromatique.

Pour plus de clarté, nous abandonnerons l'indice ν dans la suite tout en continuant de travailler à fréquence donnée.

I.4 Cas d'une géométrie plane

Dans ce travail, nous considérerons souvent la géométrie plane ce qui permet de simplifier l'ETR sans pour autant en perdre les ingrédients physiques essentiels. En particulier, cela reste une vraie géométrie en trois dimensions où la diffusion opère dans toutes les directions de l'espace. De plus, cela correspond à de nombreuses situations expérimentales. L'ETR sera ainsi plus facile à analyser théoriquement et à résoudre numériquement.

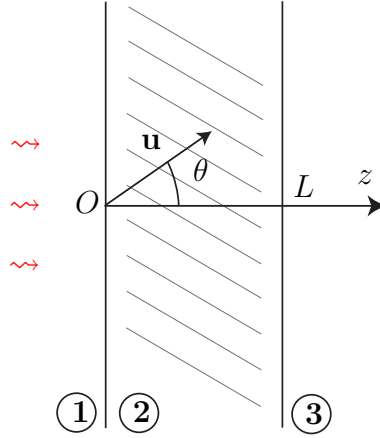


Fig. I.7 – Géométrie du système étudié : le milieu en amont du rayonnement incident est noté **1**, le milieu diffusant est noté **2** et le milieu en aval est noté **3**.

I.4.1 Description du système étudié

Le système étudié est une tranche (*slab* en anglais) d'épaisseur L suivant l'axe z . Cette tranche est considérée comme infinie suivant les axes x et y (voir figure I.7). Le milieu contenu dans cette tranche est essentiellement diffusant et légèrement absorbant (albédo proche de l'unité).

Les indices optiques des milieux **1**, **2** et **3** sont notés respectivement n_1 , n_2 et n_3 . On s'intéresse au rayonnement dans le domaine visible.

Les angles θ et φ sont définis de manière classique par les coordonnées sphériques, φ étant l'angle autour de l'axe z .

I.4.2 Simplification de l'etr

La luminance dépend de trois coordonnées spatiales, de trois coordonnées directionnelles et d'une coordonnée temporelle. Dans le cas où on éclaire le milieu par une onde plane sous incidence normale, le système étant invariant par translation selon les axes x et y , la luminance ne dépend plus que d'une seule variable spatiale z .

De plus, le milieu est statistiquement homogène et isotrope. La fonction de phase ne dépendant que de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = \cos \Theta$, on peut intégrer l'ETR sur φ . En posant :

$$L(z, \mu, t) = \int_0^{2\pi} L(z, \mu, \varphi, t) d\varphi \quad \text{avec } \mu = \cos \theta \quad (\text{I.25})$$

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \varphi - \varphi') d\varphi \quad \text{car } \cos \Theta \text{ ne dépend que de } \theta, \theta' \text{ et } \varphi - \varphi'. \quad (\text{I.26})$$

On obtient :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L(z, \mu, t) - (\mu_a + \mu_s) L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') L(z, \mu', t) d\mu'$$

(I.27)

forme de l'ETR que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. Dans certains cas (comme par exemple l'étude de la cohérence spatiale, Chap. II), nous serons amenés à séparer la partie collimatée de la luminance de la partie diffuse :

$$L(z, \mu, t) = L_c^+(z, t) \delta(\mu - 1) + L_c^-(z, t) \delta(\mu + 1) + L_d(z, \mu, t). \quad (\text{I.28})$$

La distribution de DIRAC en 0 est notée δ . L_c^+ représente la luminance collimatée vers l'avant (i.e. suivant les z positifs), L_c^- représente la luminance collimatée vers l'arrière (i.e. suivant les z négatifs) et L_d représente la luminance diffuse. Elle dépend donc de la variable angulaire μ . Nous définissons également les luminances diffuses dans le sens des z positifs (ou $\mu > 0$) et dans le sens des z négatifs (ou $\mu < 0$) par :

$$\begin{cases} L_d^+(z, \mu, t) = L_d(z, \mu > 0, t) \\ L_d^-(z, \mu, t) = L_d(z, \mu < 0, t) \end{cases} \quad (\text{I.29})$$

Les notations utilisées pour décomposer la luminance sont clarifiées sur la figure I.8.

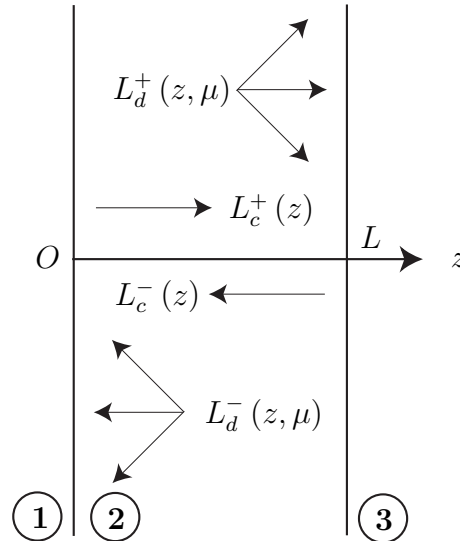


Fig. I.8 – Notations utilisées pour décomposer la luminance.

L'ETR en régime instationnaire se réduit alors à :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right) L_c^\pm(z, t) = -\mu_e L_c^\pm(z, t) \quad (\text{I.30})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L_d(z, \mu, t) = & -\mu_e L_d(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') L_d(z, \mu', t) d\mu' \\ & + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, 1) L_c^+(z, t) + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, -1) L_c^-(z, t) \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

Dans le cas stationnaire, l'équation I.30 donne une loi en exponentielle décroissante pour les luminances collimatées du type loi de BEER-LAMBERT. L'équation I.31 fait apparaître des termes sources en L_c^+ et L_c^- . La majeure partie de l'énergie collimatée (décroissance exponentielle) est alors transformée en énergie diffuse. Le reste est absorbé.

La séparation de la partie diffuse de la partie collimatée de la luminance trouve sa justification sur la photo de la figure 2 présentée dans le chapitre introductif.

I.4.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites aux parois de la couche s'écrivent en terme de réflexion et de transmission aux parois à partir des coefficients de FRESNEL en énergie. On a alors :

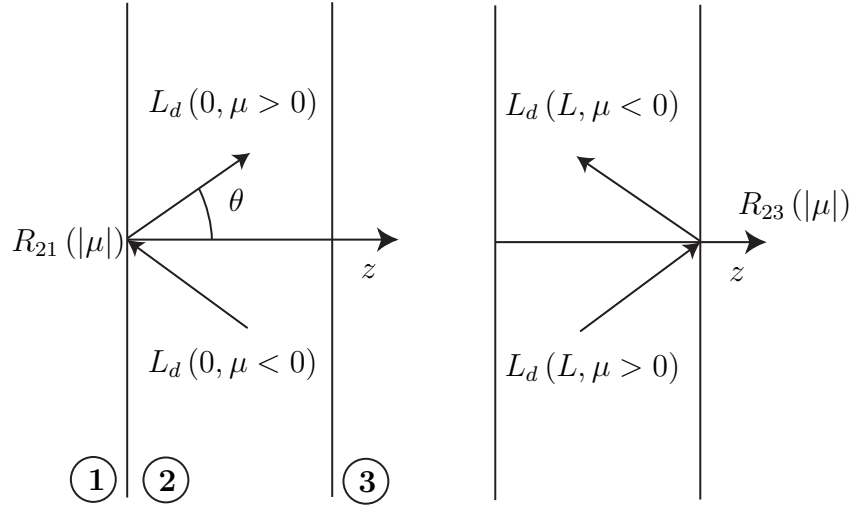


Fig. I.9 – Coefficients de réflexion pour la luminance diffuse.

$$\begin{cases} L_d(0, \mu > 0, t) = R_{21}(|\mu|) L_d(0, \mu < 0, t) \\ L_d(L, \mu < 0, t) = R_{23}(|\mu|) L_d(L, \mu > 0, t) \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

où $R_{ij}(|\mu_i|)$ est le coefficient de réflexion de FRESNEL en énergie et en lumière non polarisée à l'interface $i-j$ pour un rayonnement provenant du milieu i et réfléchi dans ce même milieu. Son expression est donnée par (BORN et WOLF 1999) :

$$R_{ij}(\mu_i) = R_{ij}^\perp(\mu_i) + R_{ij}^\parallel(\mu_i) = \frac{|r_{ij}^\perp(\mu_i)|^2 + |r_{ij}^\parallel(\mu_i)|^2}{2} \quad (\text{I.33})$$

avec

$$r_{ij}^\perp(\mu_i) = \frac{n_i \mu_i - n_j \mu_j}{n_i \mu_i + n_j \mu_j} \quad \text{cas transverse électrique,} \quad (\text{I.34})$$

$$r_{ij}^\parallel(\mu_i) = \frac{n_j \mu_i - n_i \mu_j}{n_j \mu_i + n_i \mu_j} \quad \text{cas transverse magnétique,} \quad (\text{I.35})$$

où le cosinus μ_j est donné par la relation de SNELL-DESCARTES $\mu_j = \sqrt{1 - n_i^2/n_j^2 (1 - \mu_i^2)}$.

Le rayonnement incident est constitué d'une luminance collimatée sous incidence normale notée $L_{\text{inc}}(t)$ se propageant dans le milieu 1 dans le sens des z positifs. C'est équivalent à un paquet d'ondes planes se propageant vers l'avant selon l'axe z . On a donc :

$$\begin{cases} L_c^+(0, t) = R_{21}(1) L_c^-(0, t) + T_{12}(1) L_{\text{inc}}(t) \\ L_c^-(L, t) = R_{23}(1) L_c^+(L, t) \end{cases} \quad (\text{I.36})$$

où $T_{ij}(|\mu_i|)$ est le coefficient de transmission de FRESNEL en énergie et en lumière non polarisée à l'interface $i-j$ pour un rayonnement provenant du milieu i et transmis dans le

milieu j . Son expression est donnée par (BORN et WOLF 1999) :

$$T_{ij}(\mu_i) = \frac{n_j \mu_j}{n_i \mu_i} T_{ij}^{\perp}(\mu_i) + T_{ij}^{\parallel}(\mu_i) = \frac{n_j \mu_j}{n_i \mu_i} \frac{|t_{ij}^{\perp}(\mu_i)|^2 + |t_{ij}^{\parallel}(\mu_i)|^2}{2} \quad (\text{I.37})$$

avec

$$t_{ij}^{\perp}(\mu_i) = \frac{2n_i \mu_i}{n_i \mu_i + n_j \mu_j} \quad \text{cas transverse électrique,} \quad (\text{I.38})$$

$$t_{ij}^{\parallel}(\mu_i) = \frac{2n_i \mu_i}{n_j \mu_i + n_i \mu_j} \quad \text{cas transverse magnétique,} \quad (\text{I.39})$$

où le cosinus μ_j est donné par la relation de SNELL-DESCARTES $\mu_j = \sqrt{1 - n_i^2/n_j^2 (1 - \mu_i^2)}$.

Remarque : Tout comme pour les grandeurs radiométriques, précisons que les coefficients de réflexion et de transmission sont calculés à la fréquence centrale de la luminance (hypothèse quasi-monochromatique).

1.4.4 Flux transmis et réfléchi

Dans un premier temps, nous calculons les luminances collimatées transmises $L_c^T(t)$ et réfléchies $L_c^R(t)$. Puis nous calculerons les luminances diffuses transmises $L_d^T(\mu, t)$ et réfléchies $L_d^R(\mu, t)$.

Luminance collimatée

En réflexion, nous devons considérer tout d'abord la luminance incidente réfléchie par la première interface puis la luminance transmise ce qui donne :

$$L_c^R(t) = R_{12}(1) L_{\text{inc}}(t) + T_{21}(1) L_c^-(0, t). \quad (\text{I.40})$$

En transmission, le résultat devient :

$$L_c^T(t) = T_{23}(1) L_c^+(L, t). \quad (\text{I.41})$$

Luminance diffuse

Dans le cas de la luminance diffuse, il est nécessaire de prendre en compte la variation d'angle solide lors du passage d'une interface (voir Fig. I.10). Ainsi, le coefficient de transmission pour la luminance ne sera pas identique à celui en énergie.

La conservation des flux nous permet d'écrire :

$$L_i \mu_i d\Omega_i = L_r \mu_r d\Omega_r + L_t \mu_t d\Omega_t. \quad (\text{I.42})$$

À partir des lois de SNELL-DESCARTES, nous pouvons déduire que $\theta_i = \theta_r$, $\varphi_i = \varphi_r = \varphi_t$ et $\mu_t/\mu_i d\Omega_t/d\Omega_i = n_2^2/n_1^2$, ce qui donne :

$$L_i = L_r + L_t \frac{n_2^2}{n_1^2}. \quad (\text{I.43})$$

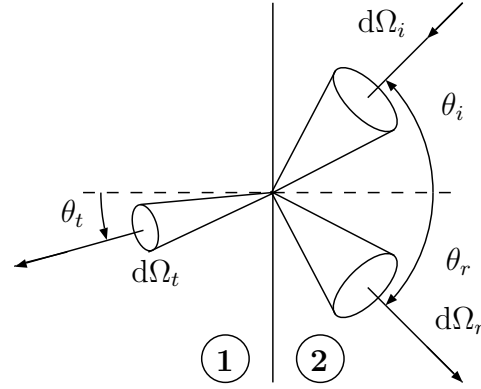


Fig. I.10 – Représentation schématique de la transmission et de la réflexion à une interface plane.

Or, $L_r = R_{21}(\mu_i) L_i$, ce qui implique que

$$L_t = \frac{n_1^2}{n_2^2} [1 - R_{21}(\mu_i)] L_i = T_{21}^d(\mu_i) L_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_{21}^d(\mu_i) = \frac{n_1^2}{n_2^2} T_{21}(\mu_i)} \quad (\text{I.44})$$

facteur de transmission de la luminance. Alors :

$$L_d^R(\mu, t) = T_{21}^d(|\mu|) L_d(\mu < 0, t) \quad (\text{I.45})$$

$$L_d^T(\mu, t) = T_{23}^d(|\mu|) L_d(\mu > 0, t). \quad (\text{I.46})$$

Flux

Finalement, les flux réfléchis et transmis monochromatiques sont donnés par :

$$\phi_{\text{sort}}^-(t) = L_c^R(t) + \int_{-1}^0 \mu L_d^R(\mu, t) d\mu \quad (\text{I.47})$$

$$\phi_{\text{sort}}^+(t) = L_c^T(t) + \int_0^{+1} \mu L_d^T(\mu, t) d\mu \quad (\text{I.48})$$

où les notations sont clarifiées sur la figure I.11.

I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi l'ETR de manière phénoménologique par un bilan d'énergie. Ce modèle de transfert radiatif, plus fin que l'approximation de la diffusion, sera abondamment utilisé dans les travaux présentés dans les chapitres suivants. En particulier, la prise en compte correcte des différents régimes de transport sera primordiale dans l'étude de la cohérence spatiale du rayonnement (voir Chap. II), des fluctuations temporelles d'intensité (voir Chap. IV) et de l'amplification de lumière en milieu diffusant (voir Chap. V).

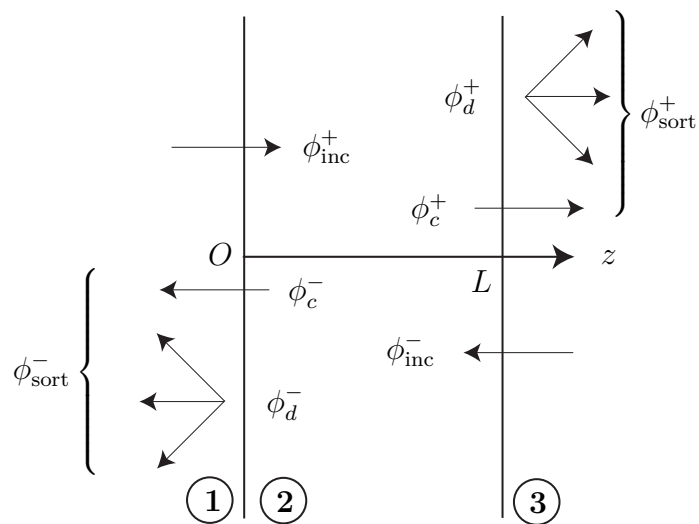


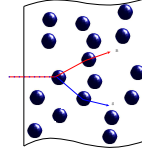
Fig. I.11 – Notations utilisées pour décomposer les flux dans le cas le plus général d'un éclairage des deux côtés du milieu. On a aussi $\phi_{\text{inc}} = \phi_{\text{inc}}^+ + \phi_{\text{inc}}^-$ et $\phi_{\text{sort}} = \phi_{\text{sort}}^+ + \phi_{\text{sort}}^-$.

Chapitre II

Cohérence spatiale du rayonnement en milieu diffusant

Table des matières

II.1	Équation de transport pour la fonction de corrélation du champ . . .	21
II.1.1	Concepts de base de la théorie de la cohérence spatiale . . .	21
II.1.2	Lien entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale	23
II.1.3	Adaptation de l'expression à la géométrie étudiée	24
II.1.4	Cas particuliers	25
	Luminance collimatée	25
	Luminance diffuse isotrope	25
II.2	Résultats numériques	26
II.2.1	Résolution pratique de l'ETR et calcul de la fonction de corrélation	26
II.2.2	Séparation diffus/collimaté dans la fonction de corrélation .	26
II.2.3	Longueurs de cohérence	27
	Cohérence spatiale du rayonnement diffus vers l'avant	28
	Prise en compte de la luminance collimatée	29
	Prise en compte des réflexions internes	29
	Cohérence spatiale du rayonnement diffus dans toutes les directions	32
	Influence de la largeur de la tranche de milieu diffusant	33
II.3	Modèle de luminance pour le régime de diffusion simple	34
II.3.1	Calcul des coefficients X et X'	36
II.3.2	Calcul du terme $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$	36
II.3.3	Validation du modèle	37
II.4	Conclusion	37



Dans ce chapitre, nous montrons que l'ETR s'applique d'une manière remarquable à l'étude des différents régimes de transport dans un milieu diffusant : balistique, diffusion simple, diffusion multiple, transport diffusif. Le côté le plus original de cette étude réside dans le fait que tout ceci sera vu à travers l'évolution de la cohérence spatiale (PIER-RAT *et al.* 2005).

Dans la plupart des cas, connaître la distribution d'intensité (en temps et en espace) est suffisant pour l'analyse d'images ou l'amélioration de montages expérimentaux. La plupart des approches reposent sur l'approximation de la diffusion qui n'est valide qu'aux grandes échelles de temps et d'espace (voir Chap. III) comparés à la longueur de transport l_{tr} et au temps de collision.

Dans certains cas, la connaissance des propriétés de cohérence spatiale du rayonnement à travers un milieu diffusant est d'une grande importance pour caractériser la qualité d'un faisceau (APRESYAN et KRAVTSOV 1996), pour analyser des corrélations de figures de tavelure (*speckle* en anglais) (APRESYAN et KRAVTSOV 1996; SEBBAH 2001) ou pour modéliser les expériences sur les fluctuations temporelles d'intensité induites par le mouvement des diffuseurs (MACKINTOSH et JOHN 1989a) (voir Chap. IV). La longueur de cohérence spatiale peut être utilisée pour caractériser la qualité d'un faisceau transmis à travers une atmosphère turbulente (TATARSKII 1971; ANDREWS et PHILIPS 1998; PONOMARENKO *et al.* 2002). La qualité du faisceau et la longueur de cohérence spatiale du spot de lumière incidente sont aussi des paramètres clés en OCT (*Optical Coherence Tomography* en anglais) dans des milieux où la diffusion multiple peut commencer à jouer un rôle (HUANG *et al.* 1991; DUBOIS *et al.* 2002).

La cohérence spatiale du rayonnement nous renseigne sur l'élargissement d'un faisceau dans un milieu diffusant (voir Fig. II.1). La grandeur la caractérisant est la fonction de corrélation spatiale du champ notée $W = \langle E E^* \rangle$ ou plus simplement la longueur de cohérence notée l_{coh} et correspondant à la largeur de W . Dans le cas d'un faisceau totalement cohérent (i.e. collimaté), la longueur de cohérence tend vers l'infini. C'est le cas de l'onde plane et en bonne approximation d'un faisceau laser. Pour un rayonnement incohérent, cette même longueur tend vers 0. Dans les cas intermédiaires, on dit que le rayonnement est partiellement cohérent. C'est le cas par exemple pour un rayonnement de corps noir dont la longueur de cohérence à une longueur d'onde λ est de l'ordre de $\lambda/3$ (rayonnement isotrope).

Nous allons introduire une méthode pratique pour calculer la fonction de corrélation spatiale du champ et la longueur de cohérence spatiale, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du milieu en transmission ou en réflexion. Pour cela, nous allons utiliser une solution numérique de l'ETR pour calculer la luminance de laquelle nous déduirons la fonction de corrélation spatiale et la longueur de cohérence. Avec cette approche, nous étudierons l'évolution de

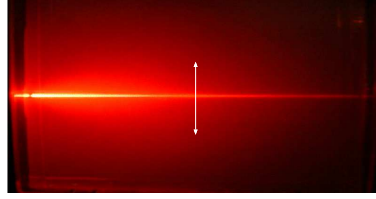


Fig. II.1 – Perte de directivité d'un faisceau dans un milieu diffusant : les particules diffusantes présentes élargissent le faisceau. La longueur de cohérence spatiale nous renseigne sur la directivité.

la cohérence spatiale dans le milieu diffusant ce qui nous permettra de caractériser les différents régimes de transport des photons.

II.1 Équation de transport pour la fonction de corrélation du champ

L'objectif de cette section est de calculer la fonction de corrélation spatiale du champ sur laquelle nous nous appuyerons pour étudier l'évolution de la cohérence spatiale et les transitions entre régimes de transport. Nous supposerons que nous étudions des systèmes pour lesquels l'ETR est valable. Cela peut être vérifié numériquement en comparant la résolution de l'ETR avec celle des équations de MAXWELL (ROUX 1996; ROUX *et al.* 2001). L'originalité de cette section réside dans le fait que nous allons considérer l'ETR comme une équation de transport de la fonction de corrélation spatiale du champ (APRESYAN et KRAVTSOV 1996).

Cette étude va se baser sur la recherche du lien qui existe entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale du champ. Des calculs rigoureux ont déjà été menés pour établir ce lien dans des configurations proches comme :

- l'étude du rayonnement se propageant soit vers l'avant, soit vers l'arrière après transmission ou réflexion par une couche (GREFFET et NIETO-VESPERINAS 1998).
- le calcul d'une relation donnant la luminance en fonction de la fonction de corrélation spatiale du champ (WALTHER 1968; WOLF 1994; WOLF *et al.* 1999; PEDERSEN 1991a; PEDERSEN 1991b) ou de la densité spectrale de puissance (ALONSO 2001a; ALONSO 2001b).

Dans notre cas, nous souhaitons obtenir une relation donnant la fonction de corrélation spatiale du champ en fonction de la luminance et ce à l'intérieur d'un milieu diffusant prenant en compte globalement les composantes du champ se propageant vers l'avant et vers l'arrière. Nous ne pouvons donc pas nous baser uniquement sur les résultats précédents.

II.1.1 Concepts de base de la théorie de la cohérence spatiale

Soit $E(\mathbf{r}, t)$ le champ électrique dans l'approximation scalaire (effets de polarisation négligés). De par la nature statistique du milieu diffusant, le champ lui-même peut-être considéré comme une variable aléatoire. Les propriétés de cohérence spatiale du champ de second ordre

sont caractérisées par la fonction de corrélation spatio-temporelle¹ définie par :

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (\text{II.1})$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne sur un ensemble de réalisations du milieu diffusant et $*$ la quantité conjuguée. Le champ $E(\mathbf{r}, t)$ peut être réel ou imaginaire (utilisation de la notation complexe). La définition de Γ s'applique plus généralement à tout signal analytique complexe. On définit alors la densité spectrale de puissance croisée (MANDEL et WOLF 1995) comme étant la transformée de FOURIER temporelle de Γ :

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) \exp[i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2] dt_1 dt_2, \quad (\text{II.2})$$

expression qui peut être facilement simplifiée à partir de la transformée de FOURIER temporelle du champ (à condition que cette transformée de FOURIER existe) :

$$\boxed{W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega_1, \omega_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, \omega_1) E^*(\mathbf{r}_2, \omega_2) \rangle}. \quad (\text{II.3})$$

Effectuons maintenant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2 \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = t + \tau/2 \\ t_2 = t - \tau/2 \end{cases} . \quad (\text{II.4})$$

On a alors :

$$\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2 = \omega_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \omega_2 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) = (\omega_1 - \omega_2) t + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \quad (\text{II.5})$$

avec $\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, appelée fréquence centrale. Le champ est supposé quasi-monochromatique de sorte que $\omega \ll \omega_0$. Nous nous plaçons maintenant dans le cas statistiquement stationnaire (on verra que ce cas correspond au régime stationnaire vis à vis de la luminance), la fonction de corrélation spatio-temporelle Γ ne dépend alors que de τ , ce qui conduit à :

$$W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \omega, \omega_0) = 2\pi\delta(\omega) \underbrace{\int \Gamma(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}, \tau) \exp[i\omega_0\tau] d\tau}_{W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})}. \quad (\text{II.6})$$

La fonction $W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$ peut donc être vue comme une mesure de la corrélation spatiale du champ à une fréquence donnée. En toute rigueur, dans un milieu diffusant, W peut être déduite de l'équation d'onde (MACKINTOSH et JOHN 1989a; RYTOV *et al.* 1989). Elle vérifie une équation de transport connue sous le nom d'équation de BETHE-SALPETER (voir Sec. A.2). C'est une équation intégrale dont le noyau est compliqué à formuler explicitement. Nous allons donc en utiliser une approximation qui n'est autre que l'ETR elle-même.

Dans un milieu statistiquement homogène et isotrope, W ne dépend que de $\rho = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$. On introduit alors souvent le degré de cohérence spatiale par :

$$w(\rho) = \frac{W(\rho)}{W(0)} \quad (\text{II.7})$$

¹En théorie de la cohérence, on la nomme « fonction de cohérence mutuelle ».

On définit la longueur de cohérence spatiale, notée l_{coh} , comme étant la largeur à mi-hauteur de la fonction de corrélation spatiale. Cette longueur nous renseigne sur la distance selon laquelle les composantes du champ électrique peuvent être considérées comme corrélées. Si la longueur de cohérence est infinie, on a un rayonnement totalement cohérent spatialement. Si elle est nulle, le rayonnement est incohérent. Dans les autres cas, on dit qu'il est partiellement cohérent.

Dire que les champs électriques en deux points $\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}/2$ et $\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}/2$ sont corrélés revient à dire que si on considère que ces deux points sont des sources secondaires de lumière, alors les champs issus de ces sources interfèrent entre-eux. La longueur de cohérence l_{coh} est la distance maximale entre les deux sources pour que les champs provenant de ces sources interfèrent entre-eux.

II.1.2 Lien entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale

Sous certaines conditions détaillées dans l'annexe A, il est possible de montrer que la transformée de FOURIER de la fonction de corrélation spatiale (encore appelée transformée de WIGNER du champ) vérifie l'ETR (ISHIMARU 1997; APRESYAN et KRAVTSOV 1996; RYTOV *et al.* 1989; BARABANENKOV 1969; RYZHIK *et al.* 1996). Il est ainsi possible de définir la luminance en régime stationnaire comme-suit (équation A.226) :

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = |\cos \theta| \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) \exp[-ik\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}] d^2\boldsymbol{\rho}_{\perp} \quad (\text{II.8})$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le module du vecteur d'onde dans le milieu, les autres notations étant définies sur la figure II.2. Cette expression constitue la célèbre formule de WALTHER (WALTHER 1968). Notons que la luminance ainsi définie n'a pas la dimension de la luminance utilisée en radiométrie classique exprimée en $\text{W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$. Pour cette raison, nous avons choisi de la noter \mathcal{L} au lieu de L . Ces deux quantités restent cependant égales à une constante multiplicative près.

Bien que la luminance définie en radiométrie classique comme un flux soit toujours une quantité positive, la luminance définie par l'équation II.8 peut prendre des valeurs négatives. Toutefois, il peut être montré que dans la limite $\lambda \rightarrow 0$, la luminance est toujours positive et peut être interprétée comme un flux d'énergie local (MANDEL et WOLF 1995). Cependant, cette limite n'est pas nécessaire pour que la luminance vérifie l'ETR (voir Ann. A). La luminance prend des valeurs négatives quand la nature ondulatoire du champ devient importante (APRESYAN et KRAVTSOV 1996). LITTLEJOHN et WINSTON ont montré que le flux calculé à partir de la transformée de WIGNER est lui toujours positif, et que c'est la seule grandeur mesurable qui doit obéir à la contrainte de positivité (LITTLEJOHN et WINSTON 1995; WINSTON et LITTLEJOHN 1997).

Notons que la recherche d'une relation entre la luminance (grandeur faisant intervenir à la fois les notions de position et de direction) et le champ (grandeur faisant intervenir la notion de position) fut un réel problème. Du fait du nombre différent d'informations données par ces deux grandeurs, il n'était pas possible de les relier par une simple transformée de FOURIER. La TF spatiale du champ nous aurait donné une grandeur directionnelle et non pas locale et directionnelle. La solution passe donc par l'utilisation d'une transformée de WIGNER. Le même problème se pose en musique : une note de musique est définie par une

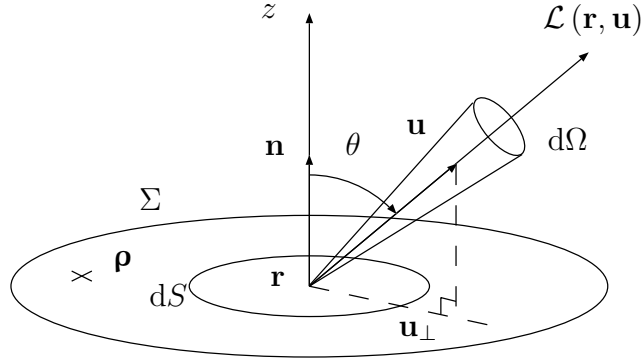


Fig. II.2 – Notations de la formule de WALTER. Le vecteur $\boldsymbol{\rho}$ est dans le plan Σ lui-même dans le plan dS de normale \mathbf{n} .

fréquence. Une onde à cette fréquence a une extension temporelle infinie et pourtant nous sommes capable de distinguer entre plusieurs notes tout au long d'un morceau. Il y a donc en plus de la fréquence, une information sur la durée de la note dans le son qui parvient jusqu'à nos oreilles. Une partition n'est donc pas une simple transformée de FOURIER.

Nous souhaitons calculer la fonction de corrélation à partir de la luminance solution de l'ETR. Nous devons donc inverser la relation II.8. En remarquant que $|\cos\theta| = |u_z|$, la transformée de FOURIER inverse donne :

$$W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \exp[ik\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}] \frac{d^2\mathbf{u}_\perp}{|u_z|}. \quad (\text{II.9})$$

De même, on a la relation $d\Omega = d^2\mathbf{u}_\perp / |u_z|$, ce qui permet d'aboutir à :

$$\boxed{W(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = \int_{4\pi} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \exp[ik\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}] d\Omega}. \quad (\text{II.10})$$

II.1.3 Adaptation de l'expression à la géométrie étudiée

La géométrie étudiée est celle de la figure I.7. Elle est invariante par translation dans les directions x et y . On éclaire par une onde plane sous incidence normale, la luminance $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ ne dépend alors que de z . De plus, on s'intéresse à la cohérence spatiale transversalement à la direction de propagation, donc $\boldsymbol{\rho} \in \Sigma$ avec Σ un plan $z = \text{Cte}$. Le milieu $\mathbf{2}$ est statistiquement homogène et isotrope dans le plan Σ . Dans ce plan, la fonction de corrélation spatiale ne dépend que de ρ .

L'équation II.10 s'écrit donc :

$$W(z, \boldsymbol{\rho}) = \int \mathcal{L}(z, \mu, \varphi) \exp(ik\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u}) d\mu d\varphi. \quad (\text{II.11})$$

Or, $\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{u} = \rho u_\perp \cos\varphi$ avec \mathbf{u}_\perp la projection de \mathbf{u} sur Σ , on peut donc intégrer sur φ en utilisant la définition de la fonction de BESSEL \mathcal{J}_0 :

$$\mathcal{J}_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \cos\varphi) d\varphi. \quad (\text{II.12})$$

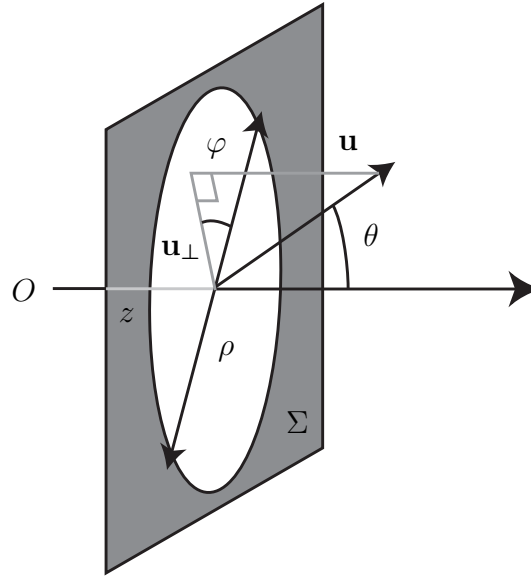


Fig. II.3 – Longueurs intervenant dans le calcul de la fonction de corrélation spatiale W en géométrie plane.

ce qui donne la formule finale avec $k = 2\pi/\lambda$ et $u_{\perp} = \sqrt{1 - \mu^2}$:

$$W(z, \rho) = \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}(z, \mu) \mathcal{J}_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sqrt{1 - \mu^2}\right) d\mu. \quad (\text{II.13})$$

L'équation II.13 constitue le premier résultat important de cette étude. Si on connaît la luminance (dans le milieu $\mathbf{2}$ ou à l'extérieur), on a directement la fonction de corrélation spatiale du champ dans un plan $z = \text{Cte}$ par une intégrale angulaire.

II.1.4 Cas particuliers

Luminance collimatée

Dans le cas d'une luminance collimatée vers l'avant ou vers l'arrière ($\mu = \pm 1$), on a :

$$W(z, \rho) = \int_{-1}^{+1} \delta(\mu \pm 1) \mathcal{L}(z) \mathcal{J}_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sqrt{1 - \mu^2}\right) d\mu = \mathcal{L}(z). \quad (\text{II.14})$$

La fonction de corrélation spatiale est donc indépendante de ρ . Par conséquent, la longueur de cohérence spatiale est infinie :

$$l_{\text{coh}} \rightarrow \infty. \quad (\text{II.15})$$

Luminance diffuse isotrope

On considère une luminance isotrope dans tout l'espace. L'intégration sur φ nous permet de dire immédiatement que $\mathcal{L}(z, \mu)$ est également isotrope notée simplement \mathcal{L} .

Nous avons reporté en annexe D les éléments de calcul permettant de déduire le résultat suivant :

$$W(\rho) = 2\mathcal{L} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right), \quad (\text{II.16})$$

où sinc est la fonction sinus cardinal. Dans ce cas, la fonction de corrélation ne dépend plus de z , la longueur de cohérence l_{coh} est donc constante et vaut en résolvant $\operatorname{sinc}(x) = 1/2$:

$$\boxed{l_{\text{coh}} \approx 0.3\lambda}. \quad (\text{II.17})$$

Comme le montre également l'annexe D, ce résultat reste valable si on ne s'intéresse qu'au rayonnement se propageant dans le sens des $z > 0$ (i.e. $\mu > 0$ ou sens +) ou dans le sens des $z < 0$ (i.e. $\mu < 0$ ou sens -).

La longueur de cohérence $l_{\text{coh}} \approx 0.3\lambda$ est caractéristique d'un rayonnement isotrope (rayonnement de corps noir par exemple).

II.2 Résultats numériques

II.2.1 Résolution pratique de l'ETR et calcul de la fonction de corrélation

L'ETR réduite à la partie collimatée du rayonnement (équation I.30) se résout simplement analytiquement.

Dans le cas d'une géométrie plane telle qu'une tranche, l'ETR pour la partie diffuse du rayonnement (équation I.31) peut être résolue en discrétisant l'intégrale angulaire (fonction de phase). Les détails sont donnés dans la thèse de Rachid ELALOUFI (ELALOUFI *et al.* 2002; ELALOUFI 2003) et dans l'annexe C. Nous en résumons succinctement les grandes lignes dans ce qui suit. La méthode des ordonnées discrètes par quadrature de GAUSS est la solution qui apporte le plus de satisfaction au problème en terme de rapidité de convergence et de simplicité de mise en œuvre (THOMAS et STAMNES 1999). L'intégrale d'une fonction f s'approxime alors de la manière suivante :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i f_i \text{ avec } w_i \text{ poids de GAUSS et } f_i = f(x_i). \quad (\text{II.18})$$

Après discrétisation des μ en μ_i pour $i = 1..N_2$, l'équation devient un système différentiel en z linéaire d'ordre 1 dont l'inconnue est le vecteur \mathbf{L}_d représentant la discrétisation angulaire de la luminance diffuse. Sa résolution s'effectue donc en passant par la diagonalisation de la matrice associée avec ensuite intégration des conditions aux limites aux parois. On obtient l'expression du vecteur $\mathbf{L}_d(z)$ sous la forme d'une décomposition en vecteurs propres dont les coefficients k_i sont les valeurs propres et les \mathbf{G}_i les vecteurs propres associés :

$$\mathbf{L}_d(z, \mu) = \underbrace{\sum_{i=0}^{2N_2-1} C_i \mathbf{G}_i(\mu) \exp[k_i z]}_{\text{solution générale}} + \underbrace{\mathbf{X} \exp[-z] + \mathbf{Y} \exp[z - 2L]}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{II.19})$$

La somme correspond à la solution générale du système différentiel, les C_i étant donnés par les conditions aux limites, et les termes en \mathbf{X} et \mathbf{Y} correspondent à la solution particulière.

En ce qui concerne le calcul de la fonction de corrélation, la luminance ayant été déterminée par discrétisation angulaire, nous pouvons réutiliser la même quadrature de GAUSS pour calculer l'intégrale II.13 qui donne la fonction de corrélation du champ.

II.2.2 Séparation diffus/collimaté dans la fonction de corrélation

Étant donné qu'on a séparé les parties *collimatée* et *diffuse* de la luminance, on va en faire de même avec la fonction de corrélation spatiale. Cela sera très utile pour l'analyse ultérieure des résultats.

Concernant les fonctions de corrélation, on introduit :

$$\begin{cases} W_c^+(z) = \mathcal{L}_c^+(z) \\ W_c^-(z) = \mathcal{L}_c^-(z) \\ W_c(z) = W_c^+(z) + W_c^-(z) \end{cases} . \quad (\text{II.20})$$

$$\begin{cases} W_d^+(z, \rho) = \int_0^{+1} \mathcal{L}_d^+(z, \mu) \mathcal{J}_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sqrt{1 - \mu^2}\right) d\mu \\ W_d^-(z, \rho) = \int_{-1}^0 \mathcal{L}_d^-(z, \mu) \mathcal{J}_0\left(\frac{2\pi}{\lambda} \rho \sqrt{1 - \mu^2}\right) d\mu \\ W_d(z, \rho) = W_d^+(z, \rho) + W_d^-(z, \rho) \end{cases} . \quad (\text{II.21})$$

Ces notations alliées à la linéarité de l'intégrale permettent de décomposer le degré de cohérence spatiale normalisé en la somme d'une contribution due au rayonnement collimaté et d'une contribution due au rayonnement diffus. En effet, si on injecte la décomposition de la luminance donnée par l'équation I.28 dans l'équation II.13, on obtient :

$$\begin{aligned} W(z, \rho) &= W_c^+(z) + W_c^-(z) + W_d(z, \rho) \\ \Rightarrow W(z, \rho) &= W_c(z) + W_d(z, \rho) \\ \Rightarrow \frac{W(z, \rho)}{W(z, 0)} &= \frac{W_c(z)}{W_c(z)} \frac{W_c(z)}{W_c(z) + W_d(z, 0)} + \frac{W_d(z, \rho)}{W_d(z, 0)} \frac{W_d(z, 0)}{W_c(z) + W_d(z, 0)} \\ \Rightarrow \boxed{w(z, \rho) = w_c \alpha_c(z) + w_d(z, \rho) \alpha_d(z)} &\text{ avec } w_c = 1. \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

On a encore en considérant les champs se propageant vers les $z > 0$ ou vers les $z < 0$ uniquement :

$$\frac{W^\pm(z, \rho)}{W^\pm(z, 0)} = \frac{W_c^\pm(z)}{W_c^\pm(z)} \frac{W_c^\pm(z)}{W_c^\pm(z) + W_d^\pm(z, 0)} + \frac{W_d^\pm(z, \rho)}{W_d^\pm(z, 0)} \frac{W_d^\pm(z, 0)}{W_c^\pm(z) + W_d^\pm(z, 0)} \quad (\text{II.23})$$

$$\Rightarrow \boxed{w^\pm(z, \rho) = w_c^\pm \alpha_c^\pm(z) + w_d^\pm(z, \rho) \alpha_d^\pm(z)} \text{ avec } w_c^\pm = 1. \quad (\text{II.24})$$

Les α apparaissent comme des coefficients de pondération de la contribution collimatée et de la contribution diffuse. On définit également les longueurs de cohérence correspondant aux degrés de cohérence spatiale définis ci-dessus (c'est-à-dire leur largeur par rapport à la variable ρ). On les note l_{coh}^c , $l_{\text{coh}}^{c\pm}$, l_{coh}^d , $l_{\text{coh}}^{d\pm}$ et l_{coh}^\pm . On a bien sûr $\{l_{\text{coh}}^c, l_{\text{coh}}^{c\pm}\} \rightarrow \infty$.

Dans toute la suite, on retient $n_1 = n_3 = 1$ (on choisit par exemple d'assimiler le milieu dans lequel se trouve la couche diffusante à de l'air).

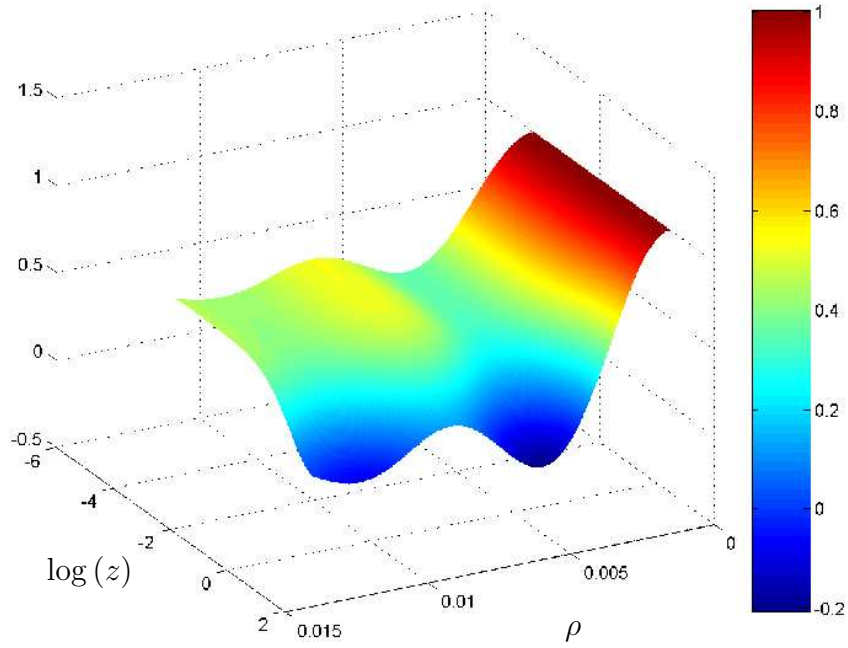


Fig. II.4 – Tracé du degré de cohérence spatiale $w(z, \rho)$ pour un milieu diffusant de grande épaisseur optique L^* avec $g = 0.39$, $n_2 = 1$, $a = 0.98$ et une fonction de phase de type HENYHEY-GREENSTEIN.

Sur la figure II.4, on représente le degré de cohérence spatiale $w(z, \rho)$ en fonction de la profondeur dans la tranche diffusante z et de la variable transverse ρ . On remarque qu'au début du milieu diffusant (i.e. pour $z \rightarrow 0$), la partie diffusée vers l'avant (i.e. $\mu > 0$) de la luminance n'est que peu présente. On retrouve donc essentiellement w_c (qui est constant) et la contribution de la luminance diffusée vers l'arrière (i.e. $\mu < 0$). Pour $z \rightarrow L$, le faisceau collimaté s'atténue pour faire place à la luminance diffuse qui revet un caractère quasi-isotrope. On reconnaît ainsi la fonction sinus cardinal.

II.2.3 Longueurs de cohérence

Nous nous intéressons dans un premier temps à la propagation de la luminance vers l'avant (sens des z positifs, $\mu > 0$).

Cohérence spatiale du rayonnement diffus vers l'avant

La figure II.5 présente un exemple de longueur de cohérence l_{coh}^{d+} pour une tranche diffusante de grande épaisseur optique avec un indice $n_2 = 1$, un albédo $a = 0.98$ et une fonction de phase du type HENYHEY-GREENSTEIN.

Interprétons tout d'abord la courbe pour $g = 0.90$. On distingue trois zones :

- $z < l_s$: la longueur de cohérence est croissante.
- $l_s < z < l_{tr}$: la longueur de cohérence est décroissante.
- $z > l_{tr}$: la longueur de cohérence est quasi-constante.

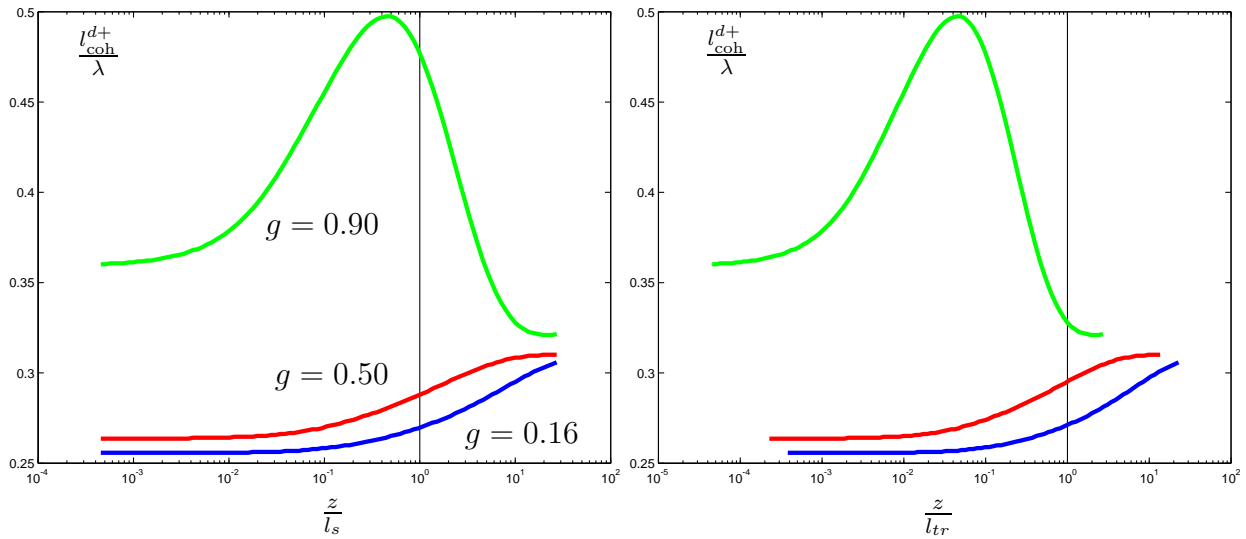


Fig. II.5 – Tracé de la longueur de cohérence l_{coh}^{d+} correspondant à la luminance diffuse vers l'avant avec $n_2 = 1$ en fonction de la profondeur z dans le milieu normalisée par la longueur de diffusion (figure de gauche) et par la longueur de transport (figure de droite).

Le premier point s'explique à l'aide de considérations purement géométriques, dans le régime balistique.

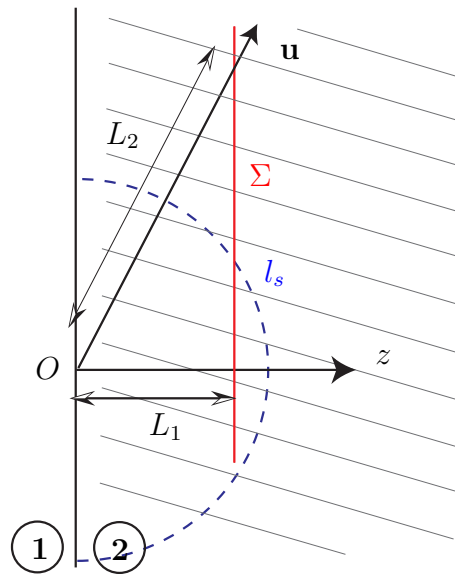


Fig. II.6 – Effet géométrique sur la longueur de cohérence.

Considérons, pour $z < l_s$, deux rayons : l'un quasiment collimaté, l'autre suivant une direction \mathbf{u} comme précisée sur la figure II.6. La longueur L_1 est proche de l'axe z donc bien inférieure à la longueur de diffusion l_s , le rayon correspondant ne subira donc pas de diffusion. Il ne sera donc pas atténué. Par contre, la longueur L_2 peut se trouver être supérieure à la longueur de diffusion, notamment si l'angle θ s'approche de $\pi/2$. De ce fait, le rayon correspondant subira des diffusions et sera donc atténué. Ce phénomène purement géométrique a ainsi tendance à collimater le rayonnement. Un modèle de diffusion simple justifiera analytiquement ce phénomène. Il est décrit dans la section II.3.

Nous avons vu que plus la luminance est collimatée, plus la longueur de cohérence l_{coh} est grande. Nous avons donc au début de la tranche une longueur de cohérence croissante pour le rayonnement diffus. C'est une particularité du régime balistique.

Le régime de diffusion simple correspond au maximum de la courbe soit en $z = l_s$.

Pour $z > l_s$, la fonction de phase commence à avoir un effet. La diffusion a tendance à rendre isotrope la luminance, la longueur de cohérence tend donc vers la valeur isotrope (i.e. 0.3λ). l_{coh}^{d+} est donc décroissante. C'est le régime de diffusion multiple.

Au-delà de la longueur de transport, la luminance est quasi-isotrope, la longueur de cohérence est donc constante et vaut environ 0.3λ . C'est le régime diffusif. Dans ce régime, la densité d'énergie obéit à une équation de diffusion (ISHIMARU 1997) (voir Chap. III).

L'étude de la longueur de cohérence permet donc de déterminer les transitions entre les différents régimes de transport pour des facteurs d'anisotropie élevés. On observe le même comportement pour des valeurs plus faibles de g mais les quantités l_s et l_{tr} deviennent très proches ce qui engendre une courbe monotone comme le montre la figure II.5.

Notons que les transitions entre régimes peuvent être observées sur d'autres grandeurs déduites d'un calcul ETR comme le coefficient de diffusion effectif (ELALOUI *et al.* 2004) ou les fluctuations d'intensité (CARMINATI *et al.* 2004).

Prise en compte de la luminance collimatée

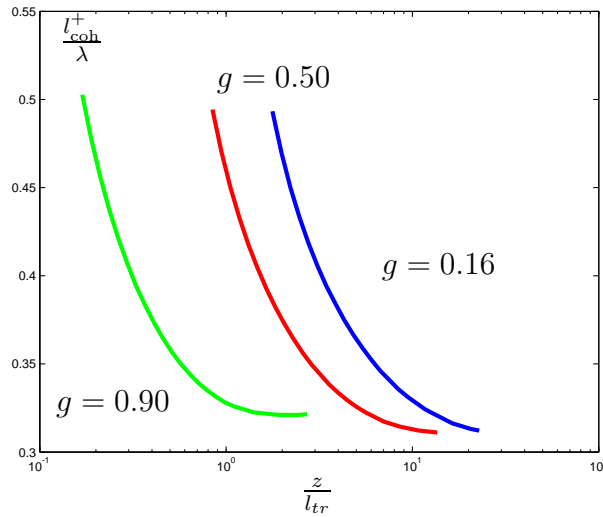


Fig. II.7 – Tracé de la longueur de cohérence l_{coh}^+ correspondant à la luminance diffuse et collimatée vers l'avant avec $n_2 = 1$ en fonction de la profondeur z dans le milieu normalisée par la longueur de transport.

Le tracé de la longueur de cohérence de la luminance diffuse et collimatée vers l'avant (l_{coh}^+) ne présente que peu d'intérêt. La luminance collimatée couvre totalement les effets de la luminance diffuse. On remarque ainsi que $l_{\text{coh}}^+ \rightarrow \infty$ pour $z \rightarrow 0$ signe d'un champ totalement cohérent en début de tranche et $l_{\text{coh}}^+ \rightarrow 0.3\lambda$ pour $z > l_{tr}$ ce qui correspond au régime *diffusif*. Ces résultats sont visibles sur la figure II.7.

Prise en compte des réflexions internes

Considérons une tranche d'indice $n_2 > 1$ toujours plongée dans un environnement d'indice $n_1 = n_3 = 1$. Les réflexions internes peuvent devenir importantes voire totales lorsque l'angle d'incidence est supérieur à l'angle critique. Les longueurs de cohérence sont données par la figure II.8 pour une tranche de grande épaisseur optique avec un indice $n_2 = 1.33$, un albédo $a = 0.98$ et une fonction de phase du type HENY-STEIN.

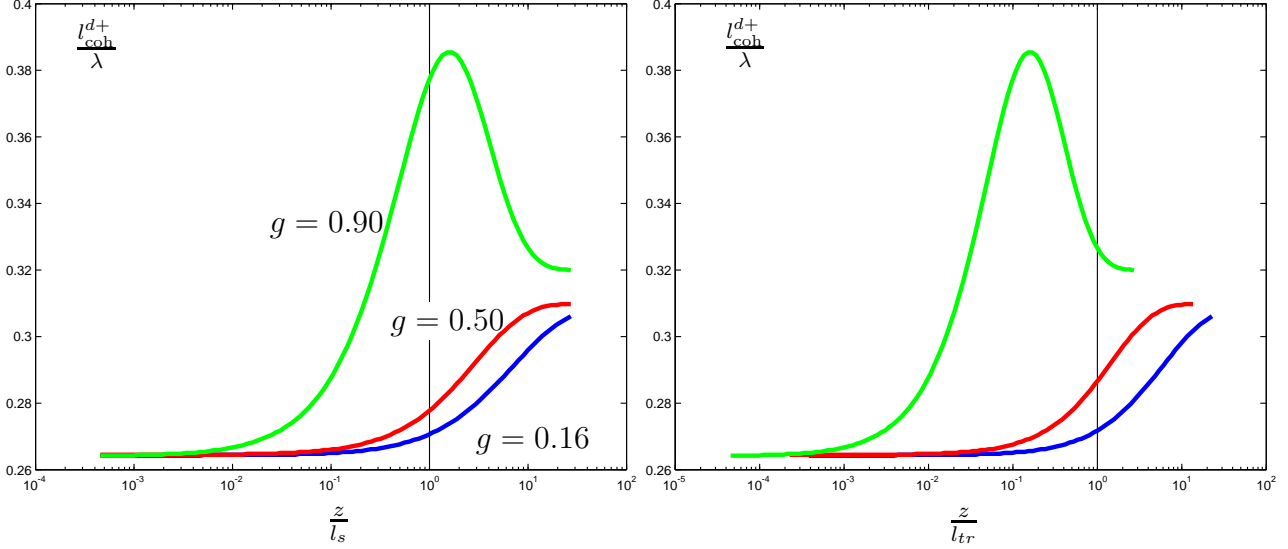


Fig. II.8 – Tracé de la longueur de cohérence l_{coh}^{d+} correspondant à la luminance diffuse vers l'avant avec $n_2 = 1.33$ en fonction de la profondeur z dans le milieu normalisée par la longueur de diffusion (figure de gauche) et par la longueur de transport (figure de droite).

On remarque que les variations sont du même type que pour $n_2 = 1$ (voir Fig. II.5). Les causes sont donc les mêmes. Cependant, on remarque que pour $z \rightarrow 0$, les trois courbes semblent converger vers une seule et même valeur (i.e. ≈ 0.264). Cela est précisément dû aux réflexions internes. En effet, au début de la tranche, la luminance diffusée vers l'avant est faible pour des angles θ où il n'y a pas réflexion interne totale. Mais lorsqu'il y a réflexion totale, la luminance se propageant vers l'avant (i.e. $\mu > 0$) est au moins égale à la luminance se propageant vers l'arrière (i.e. $\mu < 0$) qui est importante car l'absorption dans le milieu est faible. De plus, du fait de la grande épaisseur optique L^* , quelle que soit la valeur du facteur d'anisotropie g , la luminance diffusée vers l'arrière au début de la tranche est quasi-isotrope ce qui implique une même limite pour l_{coh}^{d+} en 0.

La prise en compte du rayonnement collimaté dans le cas avec réflexions internes ne présente pas beaucoup plus d'intérêt que dans le cas sans réflexions internes si ce n'est que l'importance du collimaté est plus faible.

On remarque sur la figure II.9 que pour g faible, la longueur de cohérence ne tend pas vers l'infini mais vers une limite finie ce qui fait apparaître un palier. C'est la preuve que la contribution de la luminance collimatée devient moins prépondérante. En effet, si on trace schématiquement les produits $w_d \alpha_d$ et $w_c \alpha_c$ en fonction de ρ à z fixé petit (voir Fig. II.10), on remarque que la pente est beaucoup plus raide dans le cas du rayonnement diffus quand g est faible, l'ajout de la contribution du rayonnement collimaté ne changera alors rien à la recherche de la largeur à mi-hauteur. Cependant, il faut que la luminance diffuse soit suffisamment importante ce que permet la présence des réflexions internes.

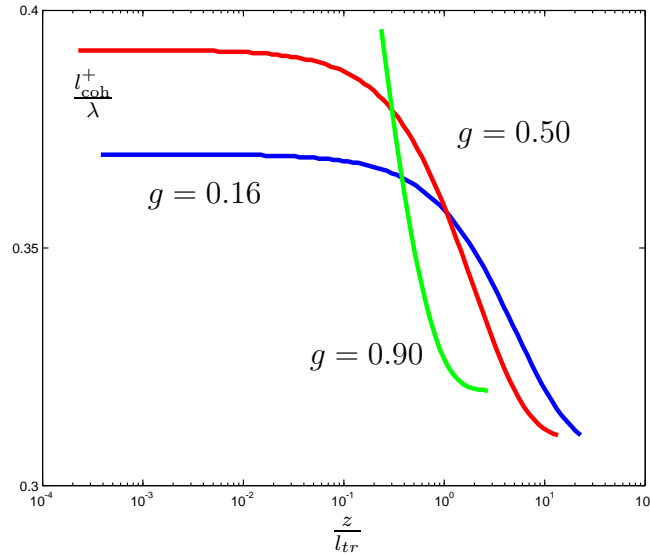


Fig. II.9 – Tracé de la longueur de cohérence l_{coh}^+ correspondant à la luminance diffuse et collimatée vers l'avant avec $n_2 = 1.33$ en fonction de la profondeur z dans le milieu normalisée par la longueur de transport.

Cohérence spatiale du rayonnement diffus dans toutes les directions

Un cas se révèle intéressant à étudier lorsqu'on considère la luminance totale (c'est-à-dire se propageant dans toutes les directions) car les variations de la longueur de cohérence ne sont plus les mêmes. Il s'agit du cas présenté sur la figure II.11 à savoir une tranche de grande épaisseur optique avec un indice $n_2 = 1$, un albédo $a = 0.98$ et une fonction de phase du type HENYEY-GREENSTEIN.

C'est donc la luminance diffusée vers l'arrière (\mathcal{L}_d^-) qui affecte complètement les variations de la longueur de cohérence. A ce stade, nous avons choisi de chercher un modèle simple de luminance diffuse pour tenter de reproduire toutes les variations de la longueur de cohérence que nous avons vues jusqu'à présent. Ce modèle, qui s'avère être d'une grande précision, est présenté dans la section II.3.

Influence de la largeur de la tranche de milieu diffusant

Plutôt que de regarder les variations de la longueur de cohérence à l'intérieur de la couche, on peut également s'intéresser à la longueur de cohérence du rayonnement sortant de la tranche, en réflexion ($z < 0$) ou en transmission ($z > 0$), en faisant varier la largeur L de la couche. Cette grandeur est plus facilement accessible expérimentalement.

La figure II.12 présente ce que l'on obtient pour $n_2 = 1$, $a = 0.98$, une fonction de phase du type HENYEY-GREENSTEIN et différentes valeurs de g .

Pour la partie réfléchiée en $z < 0$, on remarque que la longueur de cohérence croît avec g ce qui traduit le fait que le rayonnement réfléchi est plus collimaté pour les grands g (quand g augmente, la fonction de phase est plus piquée vers l'avant, la diffusion se fait donc vers l'avant). Lorsque la largeur de la couche diffusante augmente, la luminance $\mathcal{L}_d^-(z, \mu)$ tend à devenir isotrope : les trois courbes se rejoignent donc en $z \rightarrow \infty$ vers la limite 0.3λ .

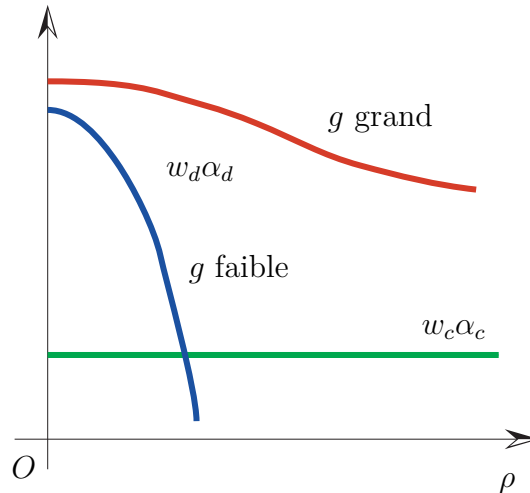


Fig. II.10 – Comparaison schématique des degrés de cohérence pondérés $w_d\alpha_d$ et $w_c\alpha_c$.

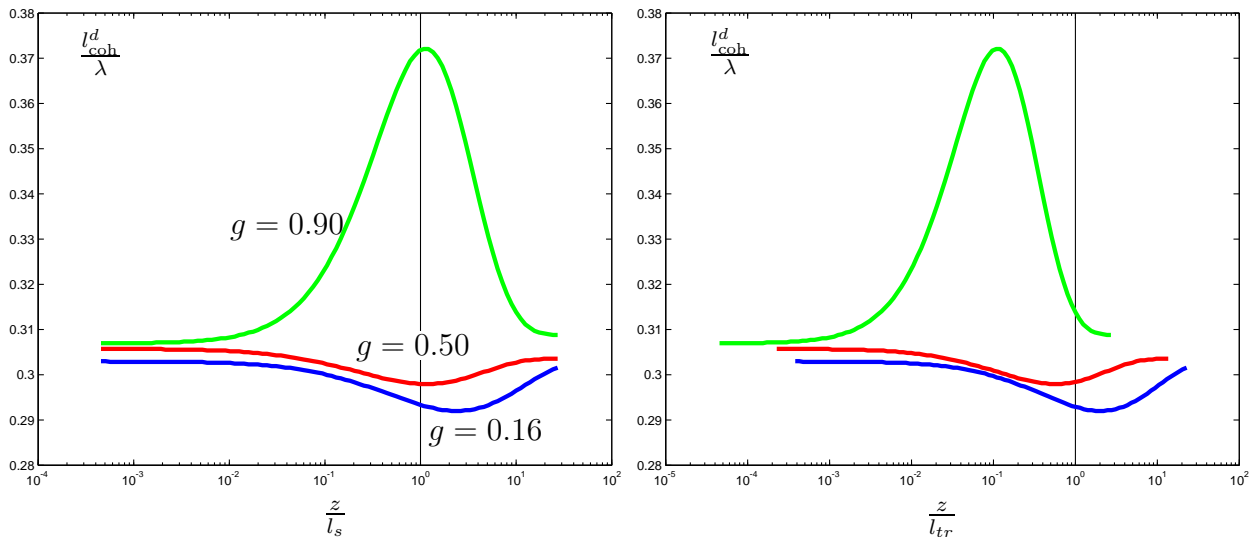


Fig. II.11 – Tracé de la longueur de cohérence l_{coh}^d correspondant à la luminance diffuse dans toutes les directions avec $n_2 = 1$ en fonction de la profondeur z dans le milieu normalisée par la longueur de diffusion (figure de gauche) et par la longueur de transport (figure de droite).

En ce qui concerne la partie transmise, on retrouve exactement les résultats précédents puisque $n_2 = 1$.

Enfin, il est intéressant de voir ce que deviennent ces courbes avec $n_2 = 1.33$ (correspondant à de l'eau par exemple). C'est ce qui est représenté sur la figure II.13.

Si les variations de la partie transmise de la longueur de cohérence sont quasiment les mêmes que dans le cas $n_2 = 1$, il n'en va pas de même pour la partie réfléchi. En effet, les coefficients de réflexion et de transmission jouent un rôle prépondérant que l'on décrira dans la section II.3. C'est ce qui explique ces tracés difficilement interprétables.

Remarque : Dans tous les cas présentés précédemment, un comportement identique a pu être observé avec une fonction de phase de type MIE.

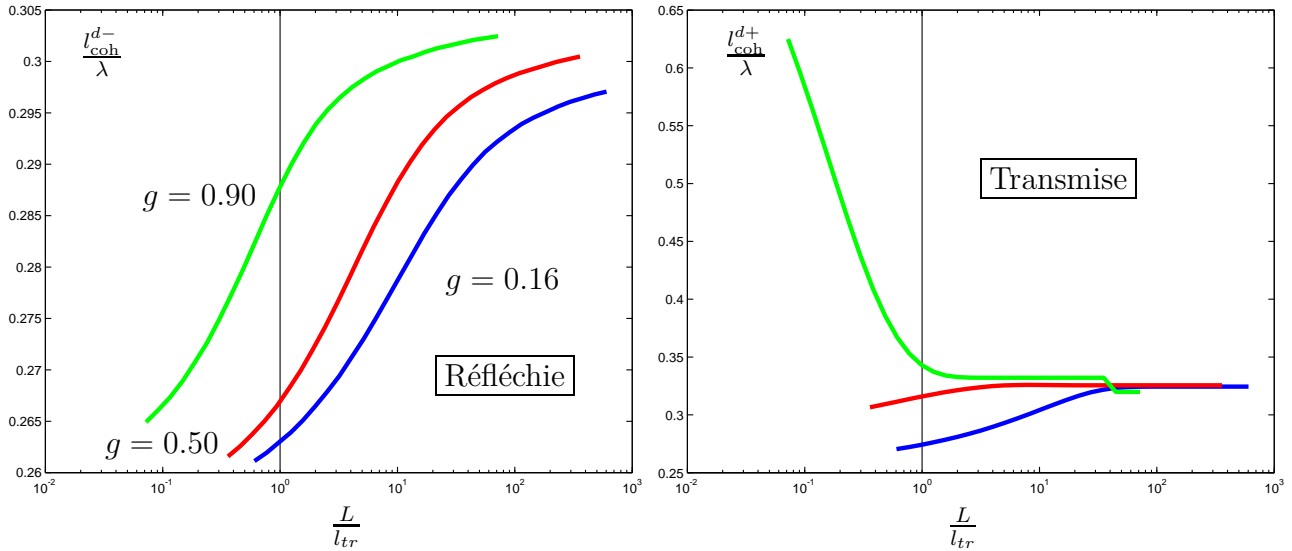


Fig. II.12 – Tracé des longueurs de cohérence l_{coh}^{d-} et l_{coh}^{d+} correspondant à la luminance diffuse réfléchie (figure de gauche) et transmise (figure de droite) avec $n_2 = 1$ pour plusieurs largeurs de couche L normalisées par la longueur de transport.

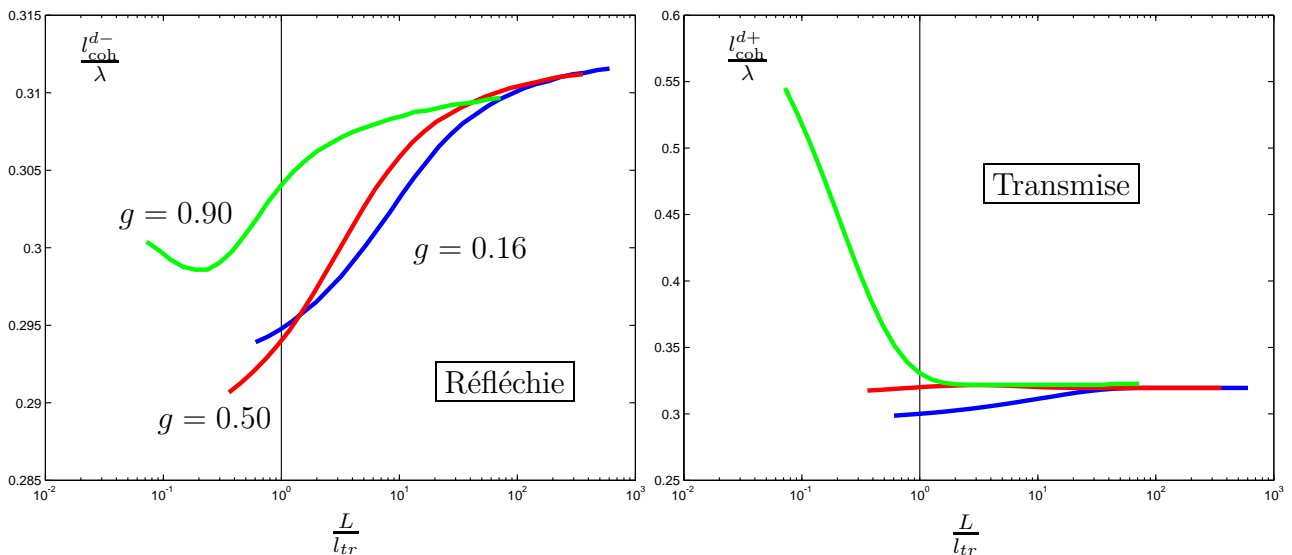


Fig. II.13 – Tracé des longueurs de cohérence l_{coh}^{d-} et l_{coh}^{d+} correspondant à la luminance diffuse réfléchie (figure de gauche) et transmise (figure de droite) avec $n_2 = 1.33$ pour plusieurs largeurs de couche L normalisées par la longueur de transport.

II.3 Modèle de luminance pour le régime de diffusion simple

Dans cette section, nous établissons un modèle simple de luminance en vue d'expliquer et de retrouver les valeurs et variations de la longueur de cohérence dans la zone proche de l'entrée du milieu diffusant. Nous retenons les hypothèses suivantes :

- $z \lesssim l_s$: on se place au début de la couche diffusante de telle sorte que le rayonnement en sens + qui a déjà été diffusé ne le soit pas une deuxième fois (hypothèse 1 dite de diffusion simple).
- $L \gg 1$: le milieu diffusant est considéré comme semi-infini. Cela a pour effet de rendre

\mathcal{L}_d^- proche de l'entrée du milieu quasi-isotrope (hypothèse 2).

- $a \approx 1$: il y a très peu d'absorption dans le milieu **2**, on pourra ainsi écrire une égalité de flux à l'entrée du milieu diffusant (hypothèse 3).
- $n_2 \geq 1$: l'indice du milieu **2** est supérieur à celui du milieu **1** (hypothèse 4).

En première lecture, on pourra se reporter directement à l'équation II.35 qui donne l'expression de la luminance diffusée vers l'avant en entrée de milieu en l'absence de réflexions internes et sous les trois premières hypothèses mentionnées ci-dessus.

D'après l'hypothèse 4, une zone où il y a réflexion totale sur la paroi entre **2** et **1** est présente. L'angle critique est donné par :

$$\mu_l = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}} \quad (\text{II.25})$$

La luminance est alors définie sur trois zones et sa décomposition est notée $\mathcal{L}_d^-(z, \mu_2)$, $\mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 < \mu_l)$ et $\mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 > \mu_l)$ (voir Fig. II.14).

Remarque : Dans cette section, il est nécessaire de différencier les variables angulaires $\mu = \cos \theta$ pour les milieux **1** et **2**. On les notera μ_1 et μ_2 respectivement. Ils sont bien entendu reliés par la relation de DESCARTES : $n_1 \sqrt{1 - \mu_1^2} = n_2 \sqrt{1 - \mu_2^2}$.

L'hypothèse 2 impose que la luminance \mathcal{L}_d^- se mette sous la forme : $\mathcal{L}_d^-(z, \mu_2) = X \mathcal{L}_{\text{inc}}$ avec X inconnue. La réflexion totale pour $\mu_2 < \mu_l$ de \mathcal{L}_d^- donne en négligeant la partie déjà présente de \mathcal{L}_d^+ considérée comme beaucoup trop faible : $\mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 < \mu_l) = X \mathcal{L}_{\text{inc}}$. Enfin, pour $\mu_2 > \mu_l$, il y a réflexion partielle de \mathcal{L}_d^- beaucoup plus faible que la réflexion totale. Par conséquent, on doit ici tenir compte de la partie déjà présente de \mathcal{L}_d^+ notée $\mathcal{L}_d^{+'}$: $\mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 > \mu_l) = X' \mathcal{L}_{\text{inc}} + \mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$. On a donc :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_d^-(z, \mu_2) &= X \mathcal{L}_{\text{inc}} \\ \mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 < \mu_l) &= X \mathcal{L}_{\text{inc}} \\ \mathcal{L}_d^+(z, \mu_2 > \mu_l) &= X' \mathcal{L}_{\text{inc}} + \mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Il s'agit donc de rechercher les expressions de X , X' et $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$.

II.3.1 Calcul des coefficients X et X'

L'hypothèse 3 permet d'affirmer que les flux entrant et sortant sont égaux. L'hypothèse 2 nous renseigne sur le fait que cette égalité s'écrit uniquement en $z = 0$:

$$\underbrace{\mathcal{L}_{\text{inc}} R_{12}}_{\text{Flux de 1 vers 2 réfléchi}} + \underbrace{\int_{-1}^0 -T_{21}^d(|\mu_1|) \mathcal{L}_d^-(0, \mu_2) \mu_1 d\mu_1}_{\text{Flux de 2 vers 1 transmis}} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{inc}}}_{\text{Flux incident}} \quad (\text{II.27})$$

T_{21}^d est le facteur de transmission de la luminance diffuse de **2** vers **1**. Il est donné par :

$$T_{21}^d(|\mu_1|) = \frac{n_2^2}{n_1^2} T_{21}(|\mu_1|) \quad (\text{II.28})$$

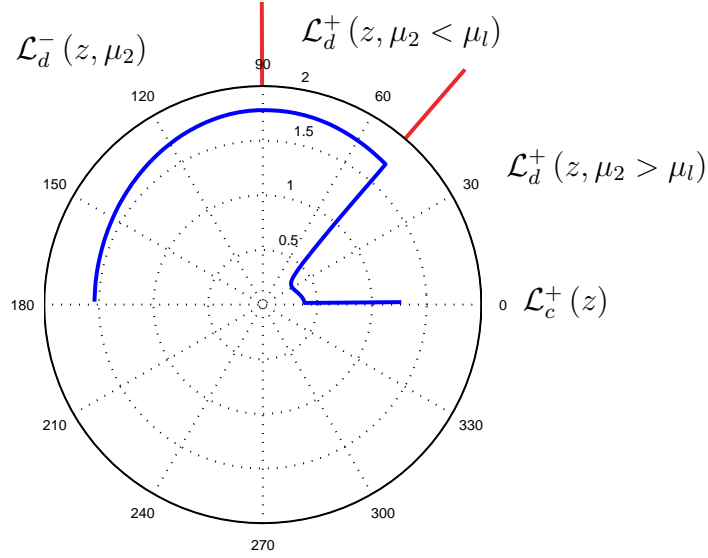


Fig. II.14 – Tracé de la luminance en entrée de milieu diffusant pour une couche diffusante de grande épaisseur optique L^* avec $z \ll l_s$, $a = 1$, $n_2 = 1.33$, $g = 0.50$ et une fonction de phase du type HENYÉY-GREENSTEIN. On distingue nettement les trois zones définies au début de cette section.

Ce facteur prend en compte la variation d'angle solide lors du passage de l'interface (voir Chap. I). On en déduit :

$$\mathcal{L}_d^-(z, \mu_2) = \frac{1 - R_{12}(1)}{\int_0^1 T_{21}^d(|\mu_1|) \mu_1 d\mu_1} \mathcal{L}_{\text{inc}} = X \mathcal{L}_{\text{inc}}. \quad (\text{II.29})$$

Le calcul de X' passe simplement par l'écriture de la réflexion partielle de la luminance diffuse en sens $-$ à la paroi :

$$\mathcal{L}_d^-(z, \mu_2) R_{21}(|\mu_2|) = X' \mathcal{L}_{\text{inc}} \Rightarrow X' = X R_{21}(|\mu_2|). \quad (\text{II.30})$$

II.3.2 Calcul du terme $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$

Le calcul de $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$ s'effectue en partant de l'équation I.31. On considère que $\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2)$ ne peut être diffusée une nouvelle fois car $z \lesssim l_s$. Par conséquent on ne conserve dans le terme intégral que la luminance diffuse en sens $-$ et celle réfléchié totalement :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^1 p(\mu_2, \mu'_2) \mathcal{L}_d(z, \mu'_2) d\mu'_2 &= \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{\mu_l} p(\mu_2, \mu'_2) X \mathcal{L}_{\text{inc}} d\mu'_2 \\ &= \mu_s \mathcal{L}_{\text{inc}} I(\mu_2) \text{ avec } I(\mu_2) = \frac{X}{2} \int_{-1}^{\mu_l} p(\mu_2, \mu'_2) d\mu'_2. \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

De plus, il ne faut pas oublier de prendre en compte le facteur de transmission pour la luminance collimatée :

$$\mathcal{L}_c^+(z) = T_{12}(1) \mathcal{L}_{\text{inc}} \exp(-\mu_e z). \quad (\text{II.32})$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\mu \frac{\partial \mathcal{L}_d^{+'}}{\partial z}(z, \mu_2) + \mu_e \mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2) = \mu_s \mathcal{L}_{\text{inc}} I(\mu_2) + \frac{\mu_s}{2} p(\mu_2, 1) T_{12}(1) \mathcal{L}_{\text{inc}} \exp(-\mu_e z).$$

$$(II.33)$$

On sait enfin que la luminance diffusée vers l'avant $\mathcal{L}_d^{+'}$ est nulle en $z = 0$, d'où la condition aux limites :

$$\mathcal{L}_d^{+'}(0, \mu_2) = 0 \quad (II.34)$$

La résolution triviale de l'équation précédente munie de sa condition aux limites donne le résultat :

$$\mathcal{L}_d^{+'}(z, \mu_2) = \frac{\mu_s \mathcal{L}_{\text{inc}}}{2(1 - \mu_2)} \left\{ 2I(\mu_2)(1 - \mu_2) \exp(\mu_e z) + p(\mu_2, 1) T_{12}(1) \exp(-\mu_e z) - [2I(\mu_2)(1 - \mu_2) + p(\mu_2, 1) T_{12}(1)] \exp\left(-\frac{\mu_e z}{\mu_2}\right) \right\} \quad (II.35)$$

Cette expression de la luminance est remarquable car il fait apparaître un terme en $\exp[-\mu_e z / \mu_2]$ qui correspond exactement au filtre géométrique décrit sur la figure II.6 et qui permet d'expliquer l'augmentation de la longueur de cohérence en entrée de milieu diffusant pour le rayonnement diffus.

Dans le code de calcul que nous avons écrit, le calcul des intégrales permettant d'obtenir les quantités X et I est réalisé à l'aide des poids de la quadrature de GAUSS. Nous avons alors à notre disposition un modèle complet de luminance nous permettant de calculer les différentes longueurs de cohérence.

II.3.3 Validation du modèle

Le modèle présenté précédemment a été vérifié pour différentes valeurs du facteur d'anisotropie g , pour différents indices n_2 , dans le cas du rayonnement diffus dans toutes les directions (i.e. sans prise en compte du faisceau collimaté).

Dans tous ces cas de figure, le modèle retrace toutes les variations de la longueur de cohérence l_{coh} en fonction de z et ce sur des distances de l'ordre de la longueur de transport l_{tr} ce qui était totalement inattendu pour un modèle censé n'être valable que sur des distances inférieures à la longueur de diffusion (modèle de diffusion simple).

Concernant le rayonnement se propageant vers l'avant, les courbes coïncident parfaitement pour de petits facteurs d'anisotropie g . Cela n'est plus tout à fait vrai pour des facteurs d'anisotropie $g \gtrsim 0.7$ surtout dans le cas $n_2 > 1$, mais la différence reste faible. Cela est dû au fait que la fonction de phase est beaucoup plus piquée vers l'avant et qu'il est alors difficile de négliger la quantité $\frac{\mu_s}{2} \int_{\mu_1}^1 p(\mu_2, \mu'_2) \mathcal{L}_d(z, \mu'_2) d\mu'_2$ dans l'équation différentielle.

Dans le cas où on prend en considération toute la luminance diffuse (se propageant vers l'avant et vers l'arrière), la différence entre les 2 courbes est plus importante car l'approximation d'isotropie de \mathcal{L}_d^- n'est pas tout à fait exacte. Cependant, les résultats restent corrects avec des erreurs relatives de l'ordre de 2%.

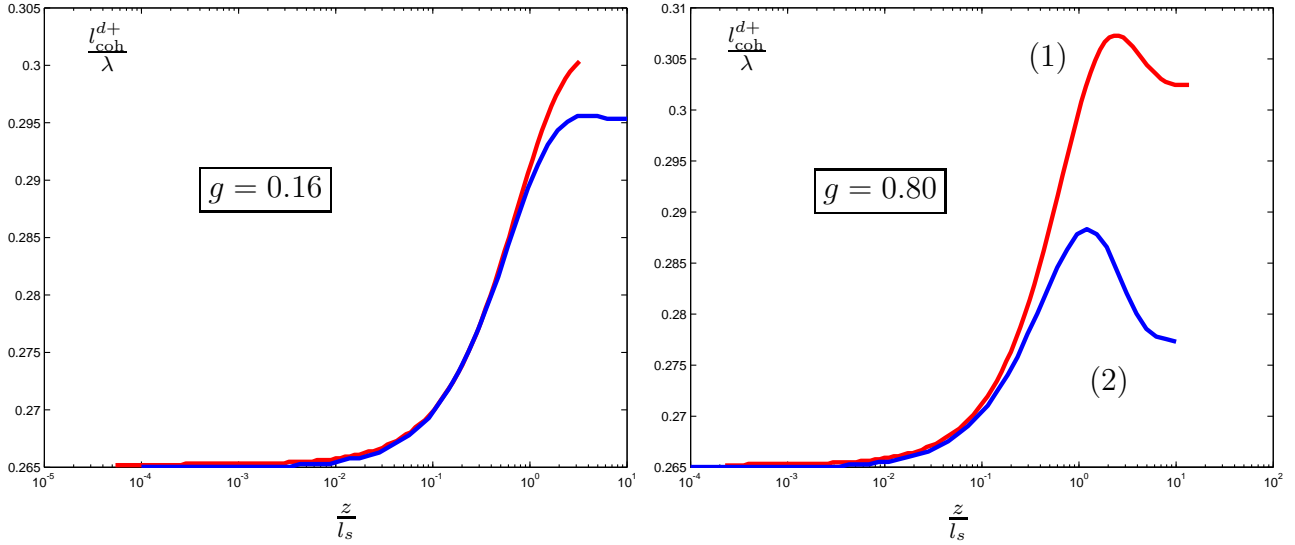


Fig. II.15 – Comparaison du modèle (1) avec le calcul numérique complet (2) en traçant la longueur de cohérence de la partie diffuse du rayonnement se propageant vers l'avant en fonction de la profondeur dans le milieu normalisée par la longueur de diffusion : $n_2 = 1.33$, $a = 1$ et fonction de phase du type HENY-EEY-GREENSTEIN.

II.4 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre a commencé par une étude bibliographique et théorique du lien existant entre la luminance et la fonction de corrélation spatiale du champ. Cette étude nous a conduit à développer notre propre modèle valable dans la géométrie plane étudiée et permettant de calculer directement la fonction de corrélation spatiale du champ à partir d'une intégration angulaire de la luminance dans un plan $z = \text{Cte}$.

La connaissance de la luminance passe par l'utilisation du programme de calcul développé dans le cadre de la thèse de Rachid ELALOUFI (ELALOUFI 2003) qui a été adapté pour calculer directement la fonction de corrélation spatiale du champ, le degré de cohérence et la longueur de cohérence. Ce travail numérique nous a permis d'obtenir de nombreux résultats décrivant les variations de la longueur de cohérence dans des configurations diverses en faisant varier nombre de paramètres comme l'indice du milieu de propagation, l'albédo, le facteur d'anisotropie et l'épaisseur du milieu diffusant.

Ces courbes montrent clairement les transitions entre les différents régimes de transport des photons dans le milieu diffusant :

- si $z < l_s$: régime balistique,
- si $z \approx l_s$: régime de diffusion simple,
- si $l_s < z < 8 - 10l_{tr}$: régime de diffusion multiple (non diffusif),
- si $z > 8 - 10l_{tr}$: régime diffusif.

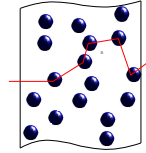
Pour expliquer les variations de la longueur de cohérence en entrée de tranche diffusante en présence de réflexions internes ($n_2 > 1$), nous avons développé un modèle de luminance valable dans le régime de diffusion simple qui s'est avéré d'une bonne précision et ce pour des profondeurs de l'ordre de la longueur de transport ($z \lesssim l_{tr}$).

Chapitre III

Validité de l'approximation de la diffusion

Table des matières

III.1	Expression du coefficient de diffusion	41
III.1.1	Un coefficient de diffusion non-local et dispersif	41
	Coefficient de diffusion modal	43
	Équation de diffusion modale	44
	Comment obtenir une expression utilisable du coefficient de diffusion ?	44
III.1.2	Cas du régime stationnaire	45
	Une autre approche	45
III.1.3	Cas du régime instationnaire	45
	Étude analytique dans le cas d'une fonction de phase isotrope	46
	Étude analytique dans le cas d'une fonction de phase quelconque	46
III.2	Discussions physiques et illustrations	48
III.2.1	Interprétation physique	48
III.2.2	Illustrations de l'importance du choix du coefficient de diffusion	49
III.3	Détermination des conditions aux limites	52
III.3.1	Introduction	52
III.3.2	Équation de la diffusion	53
III.3.3	Étude analytique	54
III.3.4	Étude numérique	54
	Résultats	55
III.4	Conclusion	56



Le problème de la propagation d'ondes dans un environnement complexe est considérablement simplifié en utilisant l'approximation de la diffusion qui décrit le transport de l'énergie aux grandes échelles d'espace (plus grandes que la longueur de transport l_{tr}) et de temps (plus grandes que l_{tr}/c où c est la vitesse de l'énergie) (ISHIMARU 1997). En particulier, cette approximation est très largement utilisée dans le contexte de l'imagerie optique biomédicale (YODH et CHANCE 1995; GAYEN et ALFANO 1996) et dans bien d'autres domaines dans lesquels la diffusion d'ondes joue un rôle primordial comme en imagerie par ondes élastiques, thermiques et acoustiques (MANDELIS 2000).

En présence d'absorption et lorsque les diffuseurs ont une indicatrice de diffusion anisotrope, ce qui est le cas pour les tissus biologiques, la définition du coefficient de diffusion constitue un problème subtil à résoudre. En fait, en fonction de la méthode utilisée pour déduire l'équation de diffusion d'une théorie de transport plus générale, on obtient différentes expressions pour le coefficient de diffusion. En particulier, sa dépendance à l'absorption a fait l'objet d'une controverse :

- Les études basées sur l'ETR en régime temporel (CASE et ZWEIFEL 1967) ont montré que le coefficient de diffusion doit être indépendant de l'absorption (FURUTSU et YAMADA 1994; DURDURAN *et al.* 1997). La démonstration de l'équation de diffusion est basée sur une propriété d'échelle de l'ETR (voir Ann. J) qui stipule que si $L_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ est la solution instationnaire dans un milieu non-absorbant, alors $L(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = L_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \exp[-\mu_a ct]$ est la solution dans le même milieu avec une absorption uniforme décrite par le coefficient μ_a . Dans ce cas, la dépendance temporelle due à la diffusion et celle due à l'absorption se factorisent. Dans la limite du transport diffusif, la dépendance temporelle due à la diffusion est décrite par un coefficient de diffusion qui est indépendant de l'absorption (FURUTSU et YAMADA 1994). Ce résultat a été confirmé par des expériences résolues en temps (BASSANI *et al.* 1997). Plus récemment, en partant d'une solution générale de l'ETR dans un milieu homogène, un coefficient de diffusion dépendant du temps a été défini, dont la limite aux temps infinis est le coefficient de diffusion usuel (CAI *et al.* 2002). Il a été montré que la limite ne dépend pas de l'absorption.
- Au contraire, des travaux théoriques basés sur l'équation des télégraphistes (DURIAN 1998), ou sur une analyse asymptotique de l'ETR stationnaire (ARONSON et CORNGOLD 1999; GRAAFF et TEN BOSCH 2000; GRAAFF et RINZEMA 2001; ELALOUFI *et al.* 2003) ont montré que le coefficient de diffusion dépend de l'absorption. L'analyse asymptotique de l'ETR empruntée à la théorie du transport de neutrons (CASE et ZWEIFEL 1967) conduit à une expression implicite du coefficient de diffusion pour le transport en régime stationnaire en terme de modes propres de l'ETR (ARONSON et CORNGOLD 1999; GRAAFF et TEN BOSCH 2000; ELALOUFI *et al.* 2003). Dans le cas d'une faible absorption, des expressions explicites peuvent être déduites (ARONSON et CORNGOLD 1999; KUSCER et MCCORMICK 1991). Leur validité a été confirmée expérimentalement

récemment (RIPOLL *et al.* 2005).

Ce résumé de l'état de l'art du sujet montre que la question de la définition du coefficient de diffusion dans un milieu absorbant n'est pas un problème entièrement résolu. En particulier, il semblerait qu'il y ait une différence notable entre le cas du régime stationnaire et celui du régime instationnaire. Cela est d'autant plus important qu'en imagerie biomédicale, des techniques résolues en temps et d'autres sous illumination continue sont couramment utilisées.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode de détermination du coefficient de diffusion en régime stationnaire¹ (i.e. \mathcal{D}_s) ou instationnaire (i.e. \mathcal{D}_i). Les expressions obtenues sont en accord avec l'expérimentation numérique aussi bien en milieu absorbant qu'amplificateur (voir Chap. V) et dans le cas d'une indicatrice de diffusion pour les particules anisotrope. Le résultat obtenu peut s'exprimer ainsi : le coefficient de diffusion est donné par

$$\mathcal{D}_s = \frac{c\mu_a}{k_0^2} \quad \text{en régime stationnaire}$$

et $\mathcal{D}_i = \frac{cl_{tr}}{3} \quad \text{en régime instationnaire}$

où k_0 est la valeur propre correspondant au mode propre spatial de l'ETR stationnaire qui s'atténue le moins aux grandes échelles d'espace (PIERRAT *et al.* 2006). Par conséquent, le coefficient de diffusion en régime stationnaire dépend de l'absorption, il s'agit de l'expression obtenue dans les références (ARONSON et CORNGOLD 1999; GRAAFF et TEN BOSCH 2000; ELALOUDI *et al.* 2003) également vérifiée expérimentalement (RIPOLL *et al.* 2005). La dépendance à l'absorption est clairement différente de celle issue de l'approximation P1 de l'ETR (ISHIMARU 1997). Celui du régime instationnaire n'en dépend pas. Il est donné par le résultat classique obtenu par exemple par une méthode dite de marche au hasard (LAGENDIJK et VAN TIGGELEN 1996).

Dans un premier temps, nous allons démontrer l'expression du coefficient de diffusion puis nous nous attarderons dans la suite à définir correctement les conditions aux limites à appliquer aux bornes du domaine lorsqu'on utilise l'approximation de la diffusion.

III.1 Expression du coefficient de diffusion

Pour obtenir l'expression du coefficient de diffusion, la démarche est la suivante : nous nous intéressons tout d'abord au régime le plus général (régime instationnaire) pour déduire une forme non-locale et dispersive du coefficient de diffusion. Ensuite, les cas des régimes stationnaire et instationnaire sont envisagés afin de déduire les formes \mathcal{D}_s et \mathcal{D}_i du coefficient de diffusion (voir Fig. III.1).

Pour simplifier les calculs et les notations, nous nous plaçons en géométrie plane telle que représentée par la figure I.7. Notons que cette géométrie ne réduit en rien la généralité du problème. En particulier, c'est une vraie géométrie 3D dans laquelle la diffusion s'opère dans les trois directions de l'espace.

¹Notons que le coefficient de diffusion en régime stationnaire \mathcal{D}_s n'est en fait qu'une échelle de longueur, plus qu'un vrai coefficient de diffusion. Il est en particulier largement utilisé en optique biomédicale (YODH et CHANCE 1995).

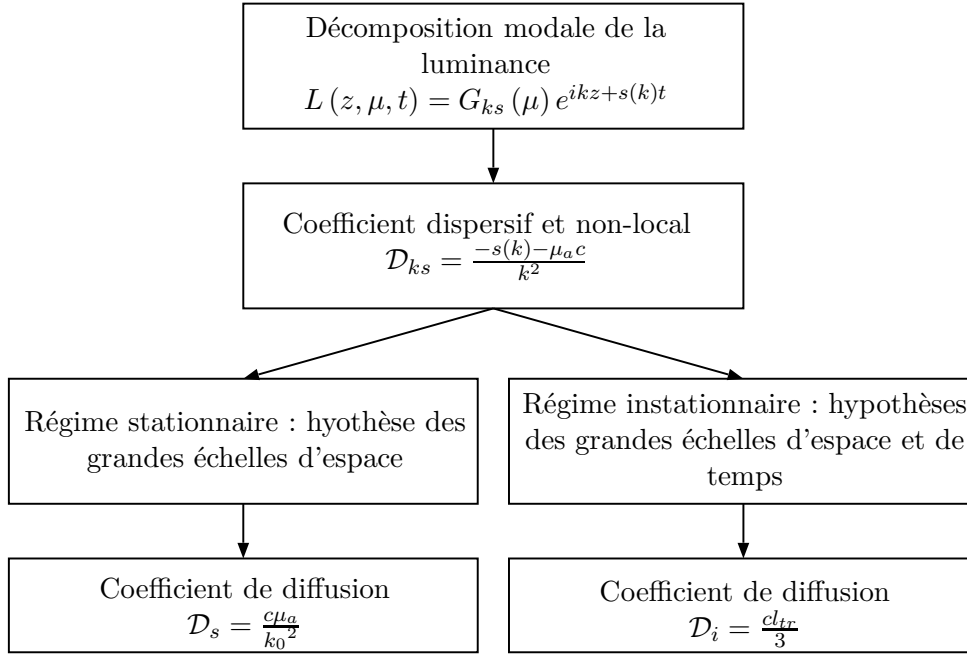


Fig. III.1 – Représentation de la démarche suivie pour obtenir l'expression du coefficient de diffusion. En utilisant une décomposition modale de la luminance, on obtient une expression non-locale et dispersive du coefficient de diffusion. Les hypothèses de grandes échelles de temps et d'espace relatives au régime diffusif dans les régimes stationnaires et instationnaires conduisent ensuite aux expressions de D_s et D_i .

III.1.1 Un coefficient de diffusion non-local et dispersif

On rappelle que l'ETR en géométrie plane et en régime instationnaire s'écrit :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L(z, \mu, t) = -\mu_e L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L(z, \mu', t) d\mu', \quad (\text{III.1})$$

avec $\mu = \cos \theta$. Le flux traversant une surface $z = \text{Cte}$ s'écrit :

$$\phi(z, t) = \int_{-1}^{+1} L(z, \mu, t) \mu d\mu \quad (\text{III.2})$$

et la densité d'énergie est donnée par :

$$u(z, t) = \frac{1}{c} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu, t) d\mu. \quad (\text{III.3})$$

Afin d'écrire l'équation de la diffusion, nous utilisons une décomposition modale de la luminance telle qu'introduite dans la théorie du transport de neutrons (CASE et ZWEIFEL 1967). Tout d'abord, introduisons une décomposition en modes propres spatiaux de la luminance (i.e. une transformée de FOURIER spatiale) :

$$L(z, \mu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{L}_k(\mu, t) \exp[ikz] \frac{dk}{2\pi}. \quad (\text{III.4})$$

Pour un k donné et fixé, on cherche ensuite $\tilde{L}_k(\mu, t)$ sous la forme d'une décomposition en modes propres temporels :

$$\tilde{L}_k(\mu, t) = 2\pi G_{ks}(\mu) \exp[st]. \quad (\text{III.5})$$

où $s(k)$ décrit l'évolution temporelle et $G_{ks}(\mu)$ la distribution angulaire de la luminance. Autrement-dit, à k fixé, nous cherchons des modes propres de l'ETR de la forme :

$$L(z, \mu, t) = G_{ks}(\mu) \exp [ikz + s(k)t] \quad (\text{III.6})$$

où $s(k)$ et $G_{ks}(\mu)$ sont respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de l'ETR (CASE et ZWEIFEL 1967). Notons que k est toujours réel et que les $s(k)$ peuvent être complexes. Comme nous le verrons, dans le cas d'une fonction de phase isotrope, il est possible d'obtenir analytiquement l'expression de ces modes propres. Dans tous les autres cas, un calcul numérique est nécessaire. Celui-ci peut être effectué par exemple grâce à la méthode des ordonnées discrètes (THOMAS et STAMNES 1999; ELALOUI *et al.* 2002) présentée en annexe C.

Définissons les moments d'ordre i d'une fonction G par :

$$\mathcal{G}_i = \int_{-1}^{+1} G(\mu) \mu^i d\mu. \quad (\text{III.7})$$

Le flux et la densité d'énergie pour le mode spatio-temporel $[k, s(k)]$ s'écrivent alors :

$$\phi_{ks}(z, t) = \int_{-1}^{+1} G_{ks}(\mu) \mu d\mu \exp [ikz + s(k)t] = \mathcal{G}_1 \exp [ikz + s(k)t] \quad (\text{III.8})$$

$$\text{et } u_{ks}(z, t) = \frac{1}{c} \int_{-1}^{+1} G_{ks}(\mu) d\mu \exp [ikz + s(k)t] = \mathcal{G}_0 \exp [ikz + s(k)t]. \quad (\text{III.9})$$

On choisit conventionnellement de normaliser les modes de telle sorte que $\mathcal{G}_0 = 1$.

Remplaçons l'expression de la luminance III.6 dans l'ETR instationnaire III.1 et simplifions par les exponentielles pour obtenir :

$$\boxed{[s(k) + ik\mu] G_{ks}(\mu) = -\mu_e G_{ks}(\mu) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) G_{ks}(\mu') d\mu'}. \quad (\text{III.10})$$

Il s'agit de l'équation fondamentale sur laquelle nous allons travailler dans la suite.

Coefficient de diffusion modal

Calculons maintenant le moment d'ordre 0 de l'équation III.10 :

$$\frac{s(k)}{c} \mathcal{G}_0 + ik\mathcal{G}_1 = -\mu_a \mathcal{G}_0 \quad (\text{III.11})$$

où on a utilisé le fait que $\int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) d\mu' = 2$ du fait de la normalisation de la fonction de phase. L'équation III.11 décrit simplement la conservation de l'énergie dans le système. En insérant les définitions du flux et de la densité d'énergie pour le mode spatio-temporel $[k, s(k)]$ des équations III.8 et III.9, on obtient :

$$\phi_{ks}(z, t) = -\frac{-s(k) - \mu_a c}{k^2} ik u_{ks}(z, t). \quad (\text{III.12})$$

Le terme de droite représente le gradient de la densité d'énergie. Cette équation s'apparente à une loi de FICK (ou loi de FOURIER) pour un mode de l'ETR dont le coefficient de diffusion est dispersif et non-local et est donné par :

$$\mathcal{D}_{ks} = \frac{-s(k) - \mu_a c}{k^2}. \quad (\text{III.13})$$

Cette relation est à la base de notre démonstration. Elle stipule que la solution générale de l'ETR qui peut être comprise comme une superposition linéaire de modes propres conduit à un flux radiatif modal qui dépend du gradient de la densité d'énergie de manière linéaire :

$$\phi_{ks}(z, t) = -ik\mathcal{D}_{ks}u_{ks}(z, t). \quad (\text{III.14})$$

L'équation III.11 nous permet aussi d'écrire une deuxième expression du coefficient de diffusion qui nous servira dans la suite :

$$\mathcal{D}_{ks} = \frac{i}{k}\mathcal{G}_1. \quad (\text{III.15})$$

Au final, nous avons donc deux expressions du coefficient de diffusion non-local équivalentes :

$$\boxed{\mathcal{D}_{ks} = \frac{i}{k}\mathcal{G}_1 = \frac{-s(k) - \mu_a c}{k^2}}. \quad (\text{III.16})$$

Équation de diffusion modale

Si on repart de l'équation III.11 avec les définitions du flux et de la densité d'énergie, on peut injecter la relation III.14 pour obtenir une équation régissant l'évolution de u_{ks} :

$$\boxed{[s(k) + \mu_a c] u_{ks}(z, t) - k^2 \mathcal{D}_{ks} u_{ks}(z, t) = 0}. \quad (\text{III.17})$$

On reconnaît ici une équation de diffusion écrite pour le mode $[k, s(k)]$. Il est intéressant de noter qu'on a fait aucune hypothèse simplificatrice pour aboutir à cette équation.

Comment obtenir une expression utilisable du coefficient de diffusion ?

Il est bien établi que le régime diffusif est atteint pour la limite des grandes échelles de temps et d'espace. La décomposition modale de la luminance va nous permettre de ne conserver que le mode qui survit le plus longtemps et le plus profondément dans le milieu, et ainsi de déduire une expression du coefficient de diffusion à appliquer dans l'équation de la diffusion. Ainsi, pour un k donné, nous allons faire une approximation des longs temps en ne retenant que la valeur propre $s_0(k)$ dont la partie réelle (négative) est la plus petite en valeur absolue. Le temps caractéristique de décroissance du mode sera alors $\tau_k = -\mathcal{R}[s_0(k)]^{-1}$. Ensuite, nous ferons une approximation des grandes échelles d'espace. Les théorèmes d'ABEL-TAUBER permettent d'affirmer que le comportement d'une fonction à l'infini est donné par le comportement de sa transformée de FOURIER à l'origine (SEDLITSKII 2000; SIROVITCH 1971). Ainsi, le comportement asymptotique de la luminance aux grandes échelles d'espace sera donné par la limite $k \rightarrow 0$.

Le cas du régime stationnaire tel que présenté ci-après sera un cas particulier du régime instationnaire et se déduira directement de l'équation III.16 en retenant $s = 0$ et en faisant l'hypothèse des grandes échelles d'espace.

III.1.2 Cas du régime stationnaire

Dans le cas du régime stationnaire, on retient simplement $s(k) = 0$ (ce qui supprime la dérivée temporelle dans l'ETR). Les modes prennent alors la forme $\exp[ikz]$. Définir le régime diffusif dans ce cas revient à ne retenir que le mode dont l'atténuation spatiale est la plus faible spatialement. CASE et ZWEIFEL (CASE et ZWEIFEL 1967) ont montré que le mode diffusif correspond alors à la valeur propre discrète $k = ik_0$ qui est imaginaire pure (voir Ann. E). Dans ces conditions, on retrouve le coefficient de diffusion donné par une approche asymptotique stationnaire (CASE et ZWEIFEL 1967; ARONSON et CORNGOLD 1999; ELALOUI *et al.* 2003) :

$$\boxed{\mathcal{D}_s = \frac{c\mu_a}{k_0^2}}. \quad (\text{III.18})$$

L'équation de la diffusion est quant à elle donnée par :

$$-\mathcal{D}_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu_a c u = 0. \quad (\text{III.19})$$

Autrement-dit, l'approximation de la diffusion en régime stationnaire est valable aux *grandes échelles d'espace* et le coefficient de diffusion dépend fortement de l'absorption. Notons au passage que la vitesse de l'énergie c se factorise dans l'équation de la diffusion. Pour cette raison, on travaille usuellement avec le coefficient de diffusion $\mathcal{D}'_s = \mu_a/k_0^2$, homogène à une longueur. Choisir de travailler avec \mathcal{D}_s ou \mathcal{D}'_s n'affecte en rien les propos tenus ici. Aussi, ce n'est pas à proprement parlé un coefficient de diffusion mais il est très utilisé en optique biomédicale (YODH et CHANCE 1995).

Une autre approche

Une autre approche décrite par GRAAFF (GRAAFF et TEN BOSCH 2000) consiste à étudier un système se composant d'un milieu homogène et isotrope, infini dans toutes les directions, diffusant et absorbant. Un point source émet de manière isotrope un rayonnement constant. L'étude de ce problème d'une part en utilisant l'ETR et d'autre part en utilisant l'approximation de la diffusion permet d'aboutir au même résultat.

III.1.3 Cas du régime instationnaire

En régime instationnaire, obtenir le régime diffusif requiert l'approximation des temps longs et des grandes échelles spatiales. Comme mentionné ci-dessus, on doit tout d'abord retenir le mode temporel qui s'atténue le plus lentement (valeur propre $s_0(k)$), puis le mode spatial qui survit le plus profondément ($k \rightarrow 0$). On va montrer analytiquement ci-après que \mathcal{D}_i s'exprime alors par :

$$\mathcal{D}_i = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-s_0(k) - \mu_a c}{k^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_i = \frac{cl_{tr}}{3}}. \quad (\text{III.20})$$

Ce coefficient de diffusion est alors indépendant de l'absorption en régime instationnaire et l'approximation de la diffusion est valable aux *grandes échelles de temps et d'espace*. Il est

à noter que la relation de dispersion $s_0(k)$ ne passe pas par l'origine ($s_0(0) \neq 0$) et que par conséquent le coefficient de diffusion à retenir est différent en régime stationnaire et en régime instationnaire. L'équation de la diffusion sera alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{D}_i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu_a c u = 0. \quad (\text{III.21})$$

Étude analytique dans le cas d'une fonction de phase isotrope

La recherche analytique de $s_0(k)$ dans le cas d'une diffusion isotrope est présentée dans la section 7.3 de (CASE et ZWEIFEL 1967). On trouvera le détail également dans l'annexe E.

On obtient la relation de dispersion :

$$s_0(k) = -\mu_e c + \frac{kc}{\tan(k/\mu_s)} \quad \text{avec} \quad |k| < \frac{\pi\mu_s}{2}. \quad (\text{III.22})$$

Si on suppose maintenant que pour un système de taille L , la valeur de k dominante est donnée par $k \approx 2\pi/L$ (transformée de FOURIER), s'intéresser aux grandes échelles d'espace (i.e. $z \gg l_s$), revient à considérer $k \ll \mu_s$. Ainsi, le développement limité en $k/\mu_s \rightarrow 0$ de l'équation précédente donne :

$$s_0(k) \sim -\mu_e c + \frac{k}{\frac{kc}{\mu_s} \left(1 + \frac{k^2}{3\mu_s^2}\right)} \sim -\mu_e c + \mu_s \left(1 - \frac{k^2}{3\mu_s^2}\right). \quad (\text{III.23})$$

On obtient alors :

$$\mathcal{D}_i = \frac{c}{3\mu_s} \Rightarrow \mathcal{D}_i = \frac{cl_{tr}}{3} \quad (\text{III.24})$$

où on rappelle que pour des diffuseurs ayant un diagramme de diffusion isotrope $l_{tr} = l_s$. On obtient effectivement l'expression correcte du coefficient de diffusion en régime instationnaire indépendante de l'absorption.

Si on effectue le développement limité au deuxième ordre, on trouve que l'approximation est valable si $L \gg l_s$, ce qui suppose d'être en régime diffusif.

La figure III.2 représente la relation de dispersion et le coefficient de diffusion non-local (s étant déjà remplacé par s_0) en comparant les résultats numériques aux résultats analytiques pour une diffusion isotrope. Les calculs numériques sont effectués en utilisant la méthode des ordonnées discrètes (voir Ann. C).

Étude analytique dans le cas d'une fonction de phase quelconque

Dans le cas où la fonction de phase n'est ni constante, ni piquée totalement vers l'avant (facteur d'anisotropie $g = 1$), il n'est pas possible de déterminer l'expression analytique de la relation de dispersion. Nous allons alors travailler asymptotiquement avec des équivalents. Une seule hypothèse est nécessaire pour déterminer analytiquement la limite du coefficient de diffusion, il s'agit de postuler que la limite existe, nous l'appelons bien évidemment \mathcal{D}_i .

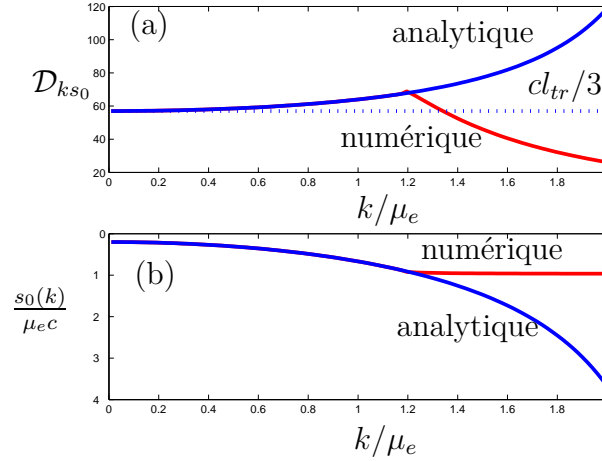


Fig. III.2 – (a). Tracé du coefficient de diffusion non-local en fonction de k . (b). Tracé de la relation de dispersion $s_0(k)$. L'albédo vaut $a = 0.8$, le facteur d'anisotropie $g = 0$ (fonction de phase d'HENYEEY-GREENSTEIN) et la longueur de diffusion $l_s = 0.57 \times 10^{-6}$ m. La divergence pour $k/\mu_e > 1.2$ vient du fait que le critère de validité de la formule analytique III.22 n'est plus respecté.

Nous rappelons à partir de l'équation III.16 que deux expressions du coefficient de diffusion non-local sont disponibles :

$$\mathcal{D}_{ks_0(k)} = \frac{i}{k} \mathcal{G}_1 = \frac{-s_0(k) - \mu_a c}{k^2}. \quad (\text{III.25})$$

- La première va nous permettre de trouver l'expression de \mathcal{D}_i en recherchant un développement limité à l'ordre 1 du mode G_{ks_0} . Pour cela, on pose :

$$G_{ks_0}(\mu) = \alpha(\mu) + k\beta(\mu). \quad (\text{III.26})$$

- La deuxième permet de déduire un équivalent de $s_0(k)$ pour $k \rightarrow 0$:

$$s_0(k) \sim k^2 \mathcal{D}_i - \mu_a c. \quad (\text{III.27})$$

Pour déterminer l'expression de la limite du coefficient de diffusion non-local, il nous faut connaître les moments d'ordre 1 des fonctions α et β . Pour cela, on injecte l'équivalent de $s_0(k)$ (équation III.27) et le développement de G_{ks_0} (équation III.26) dans l'ETR écrite pour le mode propre $[k, s_0(k)]$ (équation III.10) :

$$\begin{aligned} \left[-k^2 \mathcal{D}_i - \mu_a c + ikc\mu \right] (\alpha(\mu) + k\beta(\mu)) &= -\mu_e c (\alpha(\mu) + k\beta(\mu)) \\ &+ \frac{\mu_s c}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) (\alpha(\mu') + k\beta(\mu')) d\mu'. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Nous pouvons en déduire les ordres suivants du développement limité :

- **Ordre 0 :**

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \alpha(\mu') d\mu'. \quad (\text{III.29})$$

On pourrait se contenter de montrer que le moment d'ordre 1 de la fonction α est nul en prenant précisément le moment d'ordre 1 de l'équation précédente avec $g \neq 1$ (cas

improbable d'une diffusion totalement vers l'avant). Mais on peut montrer explicitement que α est en fait une constante ce qui sera interprété physiquement dans la section III.3. Le détail de la démonstration est donné en annexe F. Le mode propre est normalisé à 1, donc en faisant tendre k vers 0, on en déduit que l'intégrale de α est également normalisé à 1 :

$$\int_{-1}^{+1} \alpha d\mu = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}. \quad (\text{III.30})$$

On a ainsi :

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} \alpha(\mu) \mu d\mu = 0}. \quad (\text{III.31})$$

Ainsi, la luminance est isotrope aux grandes échelles de temps et d'espace (voir Sec. III.3).

• **Ordre 1 :**

$$\beta(\mu) = -\frac{i\mu\alpha(\mu)}{\mu_s} + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \beta(\mu') d\mu'. \quad (\text{III.32})$$

En prenant le moment d'ordre 1 de cette équation et en utilisant le fait que $\int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \mu d\mu' = 2g\mu'$ (voir Ann. G), on aboutit à :

$$\int_{-1}^{+1} \mu\beta(\mu) d\mu = -\frac{i}{\mu_s(1-g)} \int_{-1}^{+1} \mu^2\alpha(\mu) d\mu. \quad (\text{III.33})$$

Sachant que $\alpha = 1/2$, on en déduit :

$$\boxed{\int_{-1}^{+1} \mu\beta(\mu) d\mu = -\frac{i}{3\mu_s(1-g)}}. \quad (\text{III.34})$$

Finalement, à partir des relations III.31 et III.34 et en utilisant la première forme du coefficient de diffusion donnée dans l'équation III.25, on en déduit un équivalent de \mathcal{D}_{ks_0} :

$$\mathcal{D}_{ks_0} = \frac{i}{k} \mathcal{G}_1 \sim \frac{i}{k} \left\{ \int_{-1}^{+1} \alpha \mu d\mu + k \int_{-1}^{+1} \beta(\mu) \mu d\mu \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_i = \frac{1}{3\mu_s(1-g)}}. \quad (\text{III.35})$$

Le coefficient de diffusion est alors bien donné par :

$$\boxed{\mathcal{D}_i = \frac{cl_{tr}}{3}}. \quad (\text{III.36})$$

III.2 Discussions physiques et illustrations

III.2.1 Interprétation physique

Pour interpréter les résultats, prenons tout d'abord le cas du régime stationnaire. Dans un tel régime, nous ne faisons que l'hypothèse des grandes échelles d'espace et par conséquent, nous ne connaissons rien sur la dynamique des photons dans le milieu. En particulier, nous

ne discriminons pas ceux qui ont subi beaucoup de diffusions de ceux qui ont peu diffusé. Dans ce cas, le mode propre qu'on retient pour l'approximation de la diffusion, mode que nous appelons maintenant fondamental, n'est pas forcément isotrope et dépend fortement de l'absorption (ELALOUI *et al.* 2003). En effet, à cause de l'absorption, les photons qui ont fortement diffusé et qui ont suivi de longs chemins ont été absorbés. Dans un tel régime, on peut tout de même définir une approximation de la diffusion mais avec un coefficient dépendant de l'absorption.

D'un autre côté, dans le cas du régime instationnaire, nous faisons les hypothèses de grandes échelles de temps et d'espace. C'est ainsi que les photons pris en compte ont tous largement diffusé dans le milieu, ils ont tous parcouru de longs chemins au sein du milieu diffusant. Aussi ont-ils tous été atténués par l'absorption d'une manière équivalente et le mode fondamental est isotrope. Le coefficient de diffusion est dans ce cas indépendant de l'absorption.

La figure III.3 résume de manière schématique les comportements physiques dans les cas des régimes stationnaire et instationnaire.

Les deux équations de la diffusion en régime stationnaire et instationnaire ne représentent pas la même chose. Dans le premier cas, nous faisons l'hypothèse des grandes échelles d'espace, prenant ainsi en compte à la fois des photons qui ont largement diffusé et d'autres suivants des trajectoires plus serpentes. Dans le deuxième cas, les hypothèses de grandes échelles de temps et d'espace font qu'on ne considère que les photons qui ont suivi de longs chemins. Les deux approches sont donc différentes, les hypothèses n'étant pas les mêmes. Ainsi il n'est pas possible d'intégrer sur le temps l'approche du régime instationnaire pour retrouver celle du régime stationnaire (GRAAFF et TEN BOSCH 2000; ARONSON et CORNGOLD 1999) car l'équation de la diffusion temporelle n'est pas valable aux temps courts. On sait en particulier qu'elle surestime l'importance des chemins courts. Considérer que le coefficient de diffusion stationnaire vaut $cl_{tr}/3$ signifierait élaborer une théorie stationnaire dans laquelle il n'existerait pas de chemins courts.

En résumé, nous avons :

$$-\mathcal{D}_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c\mu_a u = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_s = \frac{c\mu_a}{k_0^2} \quad \text{en régime stationnaire} \quad (\text{III.37})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathcal{D}_i \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c\mu_a u = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_i = \frac{cl_{tr}}{3} \quad \text{en régime instationnaire} \quad (\text{III.38})$$

III.2.2 Illustrations de l'importance du choix du coefficient de diffusion

Afin de montrer à quel point l'expression du coefficient de diffusion est importante, nous avons choisi de comparer les pentes temporelles des flux transmis par une couche de milieu diffusant calculés en utilisant l'ETR et l'approximation de la diffusion. Le terme source est une impulsion lumineuse brève (dont la largeur est faible devant tous les temps caractéristiques du système comme le temps de vol balistique $t_{\text{vol}} = L/c$ ou le temps de diffusion $t_{\text{diff}} = L^2/\mathcal{D}$) sous incidence normale. Le problème correspond donc à celui de la figure I.7.

- En approximation de la diffusion, le flux transmis en régime temporel s'écrit de la manière suivante (voir Ann. H) :

$$\phi_{\text{sort,diff}}^+(t) = \frac{E_{\text{inc}} \mathcal{H}(t) \mathcal{D}}{d} \exp[-\mu_a ct] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi m}{d} \sin\left(\frac{\pi mL}{d}\right) \exp\left[-\frac{\pi^2 m^2 \mathcal{D} t}{d^2}\right] \quad (\text{III.39})$$

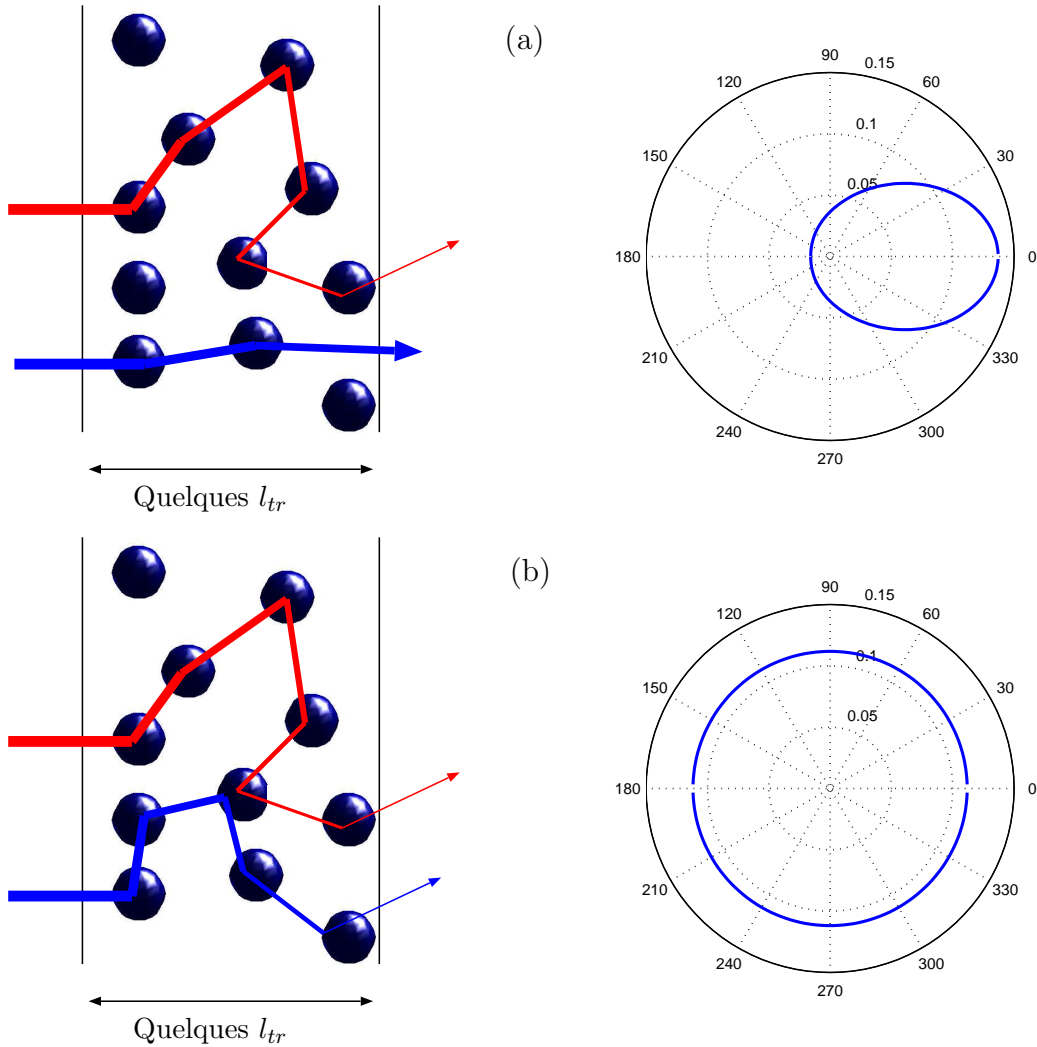


Fig. III.3 – Représentation schématique du transport diffusif de photons et des modes fondamentaux en régime stationnaire (a) et instationnaire (b). En régime stationnaire, tous les photons ayant atteint une profondeur de pénétration suffisante (de l'ordre de quelques longueurs de transport l_{tr}) sont pris en compte, qu'ils aient peu ou beaucoup diffusé dans le milieu. Le mode diffusif est anisotrope. Au contraire, dans le régime instationnaire, seuls les photons ayant largement diffusés sont conservés grâce à l'hypothèse supplémentaire des temps longs. Le mode diffusif est isotrope. Paramètres : $a = 0.8$, $g = 0.4$ (fonction de phase d'HENYEEY-GREENSTEIN), $l_s = 100 \mu\text{m}$.

avec H fonction d'HEAVYSIDE et $d = L + 2z_0$ où z_0 est la longueur d'extrapolation. Cette distance fictive permet de prendre en compte les conditions aux limites. Les détails du calcul de z_0 sont donnés dans l'annexe I. Enfin, E_{inc} est l'énergie du pulse incident.

Puisque nous nous plaçons aux grandes échelles de temps et d'espace, nous pouvons nous limiter au terme $m = 1$ dans la somme, soit :

$$\phi_{\text{sort,diff}}^+(t) = \frac{\pi E_{\text{inc}} H(t) \mathcal{D}}{d^2} \sin\left(\frac{\pi L}{d}\right) \exp\left[-\mu_a ct - \frac{\pi^2 \mathcal{D} t}{d^2}\right]. \quad (\text{III.40})$$

On a alors :

$$\phi_{\text{sort,diff}}^+(t) \propto \exp\left[-\frac{t}{T_{\text{diff}}}\right] \exp[-\mu_a ct] \quad (\text{III.41})$$

où on a défini le facteur $T_{\text{diff}} = d^2 / (\pi^2 \mathcal{D})$.

- Dans le cas de l'ETR, il existe une loi d'échelle donnant le flux transmis en présence d'absorption (i.e. $\mu_a \neq 0$) en fonction de ce même flux dans le cas sans absorption (voir Sec. J.2.3 de l'annexe J) :

$$\phi_{\text{sort,ETR},\mu_a}^+(t) = \phi_{\text{sort,ETR},0}^+(t) \exp[-\mu_a ct]. \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, aux temps longs et pour des largeurs de milieu grandes devant le libre parcours moyen de diffusion, le flux transmis calculé en ETR sera de la forme :

$$\phi_{\text{sort,ETR},\mu_a}^+(t) \propto \exp\left[-\frac{t}{T_{\text{ETR}}}\right] \exp[-\mu_a ct]. \quad (\text{III.43})$$

Le calcul numérique du flux transmis $\phi_{\text{sort,ETR},\mu_a}^+(t)$ s'effectue en résolvant l'ETR en géométrie plane par utilisation de la méthode des ordonnées discrètes (voir Ann. C). L'éclairement incident est représenté par une gaussienne temporelle de largeur à mi-hauteur $T_{1/2}$ petite devant tous les temps caractéristiques du système (temps de vol balistique $t_{\text{vol}} = L/c$, temps de diffusion $t_{\text{diff}} = L^2/\mathcal{D}_i$).

Nous choisissons alors simplement de comparer les inverses des facteurs T_{diff} (pour les coefficients de diffusion \mathcal{D}_s (régime stationnaire) et \mathcal{D}_{P1} (approximation P1)) et T_{ETR} caractérisant les pentes des flux transmis en approximation de la diffusion et en ETR une fois corrigés par le terme $\exp[\mu_a ct]$ (car l'absorption a tendance à masquer les effets résiduels, surtout aux temps longs). La figure III.4 donne les résultats en fonction du niveau d'absorption du milieu diffusant (albédo $a < 1$) ou de gain (albédo $a > 1$, voir Chap. V).

À noter que l_s est fixé ici. Par conséquent, le fait de faire varier l'albédo ne joue que sur le niveau d'absorption. On remarque donc qu'on obtient une constante dans le cas ETR. Cela permet d'affirmer que le meilleur choix pour le coefficient de diffusion est celui ne dépendant pas de l'absorption, c'est à dire celui qu'on obtient en régime instationnaire. Pour que les niveaux soient identiques, il faut que ce dernier soit précisément donné par : $\mathcal{D}_i = cl_{\text{tr}}/3$. Quant aux autres expressions, elles ne conviennent pas même si le coefficient de diffusion donné par une méthode asymptotique en régime stationnaire (\mathcal{D}_s) a un net avantage sur celui de l'approximation P1 (\mathcal{D}_{P1}). Enfin, notons que ce résultat reste valable dans la configuration d'un milieu amplificateur (voir Chap. V).

La figure III.5 donne un exemple de flux transmis en régime temporel dans le cas d'un milieu absorbant. Ces résultats sont obtenus dans le cas d'un milieu fin (sous-figure (a), régime diffusif non-atteint) et d'un milieu épais (sous-figure (b), régime diffusif atteint, approximation de la diffusion valide).

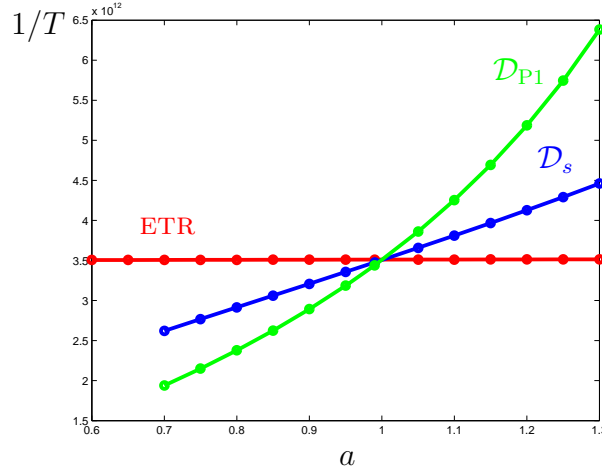


Fig. III.4 – Comparaison des pentes des logarithmes des flux transmis aux temps longs en fonction de l'albédo a pour un facteur d'anisotropie $g = 0.5$ (fonction de phase d'HENYHEY-GREENSTEIN), une longueur de diffusion $l_s = 4.75 \times 10^{-7}$ m, des indices optiques tous égaux $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ et une épaisseur de milieu de $L = 1.5 \times 10^{-5}$ m pour le calcul ETR et l'approximation de la diffusion (\mathcal{D}_s asymptotique en régime stationnaire et \mathcal{D}_{P1} en approximation P1).

III.3 Détermination des conditions aux limites

Après la recherche de l'équation de la diffusion nécessaire pour décrire le transport des photons en régime diffusif, nous devons nous attarder sur l'expression des conditions aux limites aux interfaces. Nous allons réaliser cette étude en régime stationnaire, les résultats obtenus seront alors utilisés également en régime instationnaire.

III.3.1 Introduction

Le fait d'utiliser l'ETR ne présente pas de problème particulier pour prendre en compte les conditions aux limites. Il suffit de les écrire sous forme de réflexion et de transmission de la luminance aux parois à l'aide des coefficients de FRESNEL en énergie (voir Sec. I.4). De cette manière, nous pouvons également considérer le terme source sous la forme d'une luminance incidente L_{inc} monochromatique et de direction normale à la paroi. Sous forme d'équations, cela s'écrit :

$$\begin{cases} L(0, \mu > 0) &= R_{21}(|\mu|) L(0, \mu < 0) + T_{12} L_{\text{inc}} \delta(\mu + 1) \\ L(L, \mu < 0) &= R_{23}(|\mu|) L(L, \mu > 0) \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Par contre, on rappelle que dans l'approximation de la diffusion on perd la notion angulaire du rayonnement pour ne s'intéresser qu'à la densité d'énergie radiative définie de la manière suivante :

$$u(z) = \frac{1}{c} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu) d\mu. \quad (\text{III.45})$$

Comme vu précédemment, l'approximation de la diffusion n'est valable qu'aux temps longs et pour les grandes échelles d'espace. Elle n'est donc pas valable près des parois. La recherche

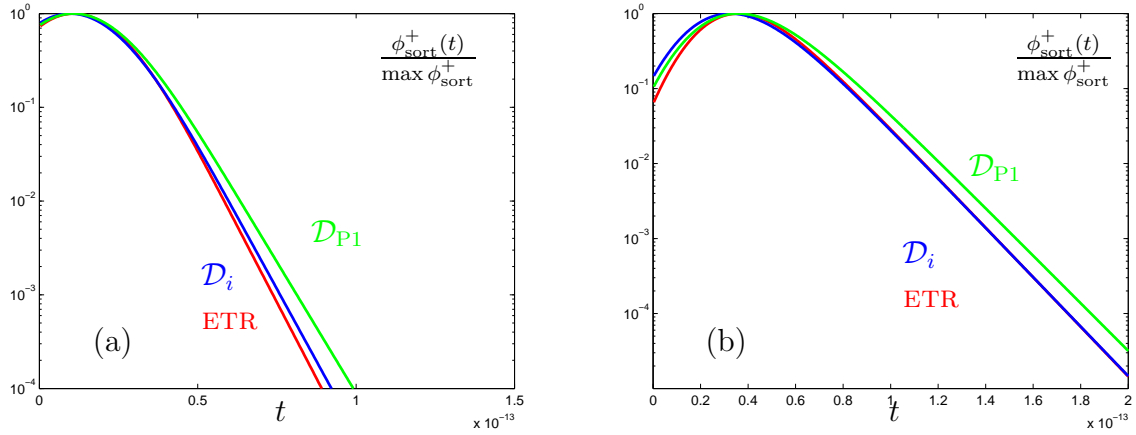


Fig. III.5 – Tracé du flux transmis ϕ_{sort}^+ normalisé en fonction du temps t calculé à l'aide de l'ETR et de l'approximation de la diffusion (coefficient modal instationnaire \mathcal{D}_i et P1 \mathcal{D}_{P1}) avec $g = 0.4$ (fonction de phase d'HENYEV-GREENSTEIN), $l_s = 0.57 \times 10^{-6}$ m, une largeur à mi-hauteur du pulse gaussien de $T_{1/2} = 30$ fs, des indices optiques tous égaux $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ et $L = 2 \times 10^{-6}$ m (a) ou $L = 6 \times 10^{-6}$ m (b). Nous avons choisi un milieu absorbant ($a = 0.90$, $\mu_a > 0$). On remarque que l'approximation de la diffusion par utilisation du coefficient modal instationnaire est valide uniquement aux temps longs et dans le cas d'une grande épaisseur de milieu.

de conditions aux limites pour l'équation de la diffusion est donc un problème délicat à traiter (ZHU *et al.* 1991; ARONSON 1995; ISHIMARU 1997).

III.3.2 Équation de la diffusion

Comme vue précédemment, l'équation de la diffusion peut être obtenue par approche asymptotique modale. Pour cela, nous nous basons sur la décomposition de la luminance en modes propres de l'ETR. Cette décomposition donne deux valeurs propres discrètes k_0 et $-k_0$ et un continuum :

$$L(z, \mu) = C_0^+ G_0^+(\mu) \exp(k_0 z) + C_0^- G_0^-(\mu) \exp(-k_0 z) + \int_{-1}^{+1} C_\nu G_\nu(\mu) \exp\left(\frac{z}{\nu}\right) d\nu \quad (\text{III.46})$$

avec $\nu = 1/k$. Les k sont les valeurs propres et les G les vecteurs propres associés. Nous démontrons cette décomposition dans le cas d'une fonction de phase isotrope $p = 1$ (CASE et ZWEIFEL 1967) dans l'annexe E.

Les conditions aux limites pondèrent la contribution des différents modes propres par l'intermédiaire des coefficients C . On a alors la propriété :

$$\begin{cases} \nu_0 > 1 \Rightarrow k_0 < 1 & \text{spectre discret,} \\ -1 < \nu < 1 \Rightarrow |k| > 1 & \text{spectre continu.} \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

L'équation de la diffusion en régime stationnaire s'obtient alors en retenant le mode qui survit le plus profondément dans le milieu (valeur propre $\pm k_0$, vecteur propre G_0^\pm) :

$$\mathcal{D}_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z) - \mu_a c u(z) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_s = \frac{c \mu_a}{k_0^2}. \quad (\text{III.48})$$

Pour que le problème mathématique soit bien posé, deux éléments doivent être pris en compte dans cette équation :

- la luminance source L_{inc} qu'on pouvait intégrer aux conditions aux limites dans le cas de l'utilisation de l'ETR.
- les réflexions sur les parois qui étaient également prises en compte dans les conditions aux limites.

En ce qui concerne le premier point, il peut simplement être résolu par ajout d'un terme source dans l'équation de la diffusion, ce qui donne :

$$\mathcal{D}_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z) - \mu_a c u(z) = -\frac{\delta(z) L_{\text{inc}}}{c}. \quad (\text{III.49})$$

Le deuxième est plus délicat comme nous l'avons mentionné plus haut. Nous choisissons de faire intervenir à ce stade une longueur d'extrapolation, notée z_0 , telle que :

$$u(-z_0) = u(L + z_0) = 0. \quad (\text{III.50})$$

Il s'agit d'une approximation de l'équation I.32. Le problème consiste donc à déterminer cette longueur d'extrapolation pour que la solution de l'équation de la diffusion corresponde à celle de l'ETR pour les grandes profondeurs dans le milieu diffusant et les temps longs.

III.3.3 Étude analytique

Tout comme pour la recherche de l'équation de la diffusion, il existe différentes méthodes pour déterminer la longueur d'extrapolation z_0 . Une des plus connues est présentée en annexe I. Elle utilise l'approximation P1 (ISHIMARU 1997). Elle nous servira en particulier pour l'étude des fluctuations temporelles d'intensité diffusée (voir Chap. IV). Cependant, nous avons vu qu'une méthode de dérivation rigoureuse de l'approximation de la diffusion existe. Nous présentons donc également en annexe I une technique de calcul de z_0 fondée sur une approche modale (CASE et ZWEIFEL 1967) dans le cas d'une indicatrice isotrope.

III.3.4 Étude numérique

L'étude numérique va nous permettre de déduire la longueur d'extrapolation correspondant à l'approche modale sans se restreindre sur la fonction de phase, l'albédo ou encore l'indice optique réel du milieu diffusant comme c'est le cas dans l'étude analytique. Pour cela, nous devons adapter la méthode des ordonnées discrètes présentée dans le cadre d'une tranche de milieu diffusant (voir Fig. I.7) au cas du problème de MILNE présenté en section I.1 de l'annexe I. Le problème de MILNE consiste à prendre un milieu semi-infini éclairé sous incidence normale par le côté situé à l'infini et à rechercher en quel point à l'extérieur du milieu (donc à l'opposé de la zone éclairée) s'annule la densité d'énergie asymptotique u_{As} (c'est à dire la densité d'énergie du mode fondamental, le seul intervenant dans l'approximation de la diffusion).

Nous allons donc considérer une grande épaisseur optique L^* pour la tranche de milieu diffusant de manière à pouvoir considérer qu'elle est semi-infinie. La luminance incidente arrivant par la gauche (i.e. paroi située entre les milieux **1** et **2**), nous allons chercher la longueur d'extrapolation sur la paroi de droite (i.e. entre les milieux **2** et **3**).

La résolution numérique de l'ETR donne une décomposition en modes propres de la luminance comprenant toujours le spectre discret et une discrétisation du continuum (voir Ann. C)) :

$$L(z, \mu) = \sum_{i=0}^{N_2} \left[C_i^+ G_i^+(\mu) \exp(k_i z) + C_i^- G_i^-(\mu) \exp(-k_i z) \right]. \quad (\text{III.51})$$

La densité d'énergie asymptotique s'écrit alors :

$$u_{As}(z) = \frac{C_0^+ \exp(k_0 z)}{c} \int_{-1}^{+1} G_0^+(\mu) d\mu + \frac{C_0^- \exp(-k_0 z)}{c} \int_{-1}^{+1} G_0^-(\mu) d\mu \quad (\text{III.52})$$

$$= \alpha \exp(k_0 z) + \beta \exp(-k_0 z), \quad (\text{III.53})$$

puisque le mode s'atténuant le moins est celui correspondant à la valeur propre discrète k_0 . Les intégrales sont calculées par quadrature de GAUSS. On souhaite ici avoir $u_{As}(L + z_0) = 0$, cela implique :

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{2k_0} \ln \left(\frac{-\beta}{\alpha} \right) - L}. \quad (\text{III.54})$$

Cette formulation nous a permis de retrouver les valeurs présentées par ARONSON dans le cas d'un indice optique n_2 différent de l'unité pour le milieu diffusant (ARONSON 1995) et à étendre cela au cas d'une fonction de phase anisotrope.

Résultats

Les tableaux suivants présentent brièvement certains résultats obtenus pour z_0 adimensionné en longueur de transport l_{tr} .

Fonction de phase isotrope $p = 1$

a	$n_2 = 1.00$	$n_2 = 1.33$
0.7	0.72	1.68
0.8	0.71	1.68
0.9	0.71	1.64
1.0	0.71	1.59
1.1	0.71	1.53

Cas anisotrope $g = 0.5$ (fonction de phase d'Heney-Greenstein)

a	$n_2 = 1.00$	$n_2 = 1.33$
0.7	0.60	0.69
0.8	0.64	1.02
0.9	0.68	2.78
1.0	0.71	1.62
1.1	0.74	1.43

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons porté notre attention sur la détermination de l'équation de diffusion à partir de l'ETR. La méthode par décomposition modale de la luminance que nous avons employée est rigoureuse mathématiquement et clôt ainsi la controverse qui était née sur la détermination correcte de l'expression du coefficient de diffusion en présence d'absorption. Pour que le problème posé soit complet, nous avons également présenté une méthode de détermination correcte des conditions aux limites à appliquer.

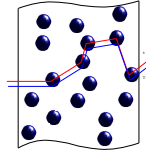
Notons que l'ensemble de ces résultats est repris dans un logiciel écrit en FORTRAN qu'il est possible de se procurer librement (sous réserve d'avoir une license valide d'utilisation de la bibliothèque scientifique NAG). Ce logiciel permet de calculer en géométrie plane, les coefficients de diffusion $\mathcal{D}_{i,s}$ et la longueur d'extrapolation z_0 .

Chapitre IV

Fluctuations temporelles d'intensité en régime non-diffusif

Table des matières

IV.1	Fonctions de corrélations	59
IV.1.1	Fonction de corrélation temporelle	59
IV.1.2	Relation de SIEGERT	60
IV.2	Extension de la DWS au régime non-diffusif	60
IV.2.1	Théories existantes	60
IV.2.2	Présentation du modèle étendu	61
IV.3	Calculs pratiques en géométrie plane	64
IV.3.1	Calcul indirect de la fonction de corrélation	64
	Relation entre $P(s)$ et les flux de sortie	65
	Calcul pratique de $\mathcal{M}(n) = 1 - \langle \cos \Theta \rangle$	65
	Amélioration possible du calcul ?	65
IV.3.2	Calcul direct de la fonction de corrélation	66
	Cas du régime diffusif : la formule de PINE	66
	Intégrale de la théorie standard avec $P(s)$ calculé par l'ETR	66
	Intégrale de la théorie étendue avec $P(s)$ calculé par l'ETR	67
IV.4	Résultats numériques et validation expérimentale	69
IV.4.1	Théories comparées	69
IV.4.2	Étude numérique en transmission	70
	Premier cas : $L = 2.00 \times 10^{-4}$ m soit $= 4.418l_{tr}$	70
	Second cas : $L = 8.00 \times 10^{-4}$ m soit $= 16.72l_{tr}$	71
	Interprétation	71
IV.4.3	Étude en réflexion : rôle de la diffusion anisotrope	72
	Introduction de la pente effective γ_{eff}	73
	Approximation de la diffusion corrigée	73
	Résultats numériques et expérimentaux	74
IV.5	Conclusion	75



Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux fluctuations temporelles d'intensité diffusée induites par le mouvement des diffuseurs dans le milieu (comme par exemple le mouvement brownien (BROWN 1828; EINSTEIN 1905)). L'étude de ces fluctuations est devenu un domaine très actif de recherche (SEBBAH 2001). Les propriétés statistiques des fluctuations temporelles de lumière diffusée permettent de remonter aux informations sur le mouvement des diffuseurs. À ce titre, des théories bien établies existent : la QELS (*Quasi-Elastic Light Scattering* en anglais) aussi appelée DLS (*Dynamic Light Scattering* en anglais) largement utilisée dans le régime de diffusion simple (BERNE et PECORA 1976; BLOOMFIELD et LIM 1978) et la DWS (*Diffusing-Wave Spectroscopy* en anglais) dans le régime diffusif (MARET et WOLF 1987; PINE *et al.* 1988; SCHEFFOLD *et al.* 1998).

Les domaines d'application sont très vastes : la DLS est une technique standard pour caractériser par exemple la taille des diffuseurs, la DWS est quant à elle très utilisée pour étudier la matière molle (colloïdes, mousses, ...) (DURIAN *et al.* 1991; KAPLAN *et al.* 1992; MASON et WEITZ 1995; SCHEFFOLD et SCHURTENBERGER 2003), les matériaux granulaires et les fluides complexes. Plus récemment, cette technique a été adaptée à l'imagerie biomédicale (BOAS *et al.* 1995; YODH et CHANCE 1995; GAYEN et ALFANO 1996; TUALLE *et al.* 2006) par utilisation de lumière diffuse dans le domaine visible ou proche infra-rouge. Elle a été utilisée en particulier pour l'imagerie des vaisseaux sanguins du cerveau (WEBER *et al.* 2004) et le sondage de l'activité neuronale (LI *et al.* 2005). Des applications sont également envisagées en mammographie (CHEIKH *et al.* 2006). Tous ces travaux montrent à quel point l'étude des fluctuations temporelles d'intensité constitue un enjeu majeure pour les applications biologiques.

Comme nous l'avons discuté au chapitre III, dans le cas des grandes échelles d'espace (plus grandes que la longueur de transport l_{tr}) et de temps (plus grandes que le temps de transport l_{tr}/c), le transport de l'intensité est décrit de manière suffisamment précise par l'approximation de la diffusion (voir Chap. III) (ISHIMARU 1997). Cette approximation est à la base de nombreuses théories et très utilisée en pratique car simple à mettre en œuvre. De ce fait, elle est également au cœur d'une des théories des fluctuations temporelles d'intensité en milieu diffusant (PINE *et al.* 1990). Malheureusement, elle souffre de limitations qui peuvent devenir sérieuses dans certaines applications. Par exemple, l'approximation de la diffusion ne prend pas en compte correctement les conditions aux limites aux interfaces (ZHU *et al.* 1991; ARONSON 1995) et surestime la contribution des chemins courts (MACKINTOSH et JOHN 1989a; LEMIEUX *et al.* 1998; ROJAS-OCHOA *et al.* 2004).

Dans ce travail, nous présentons plusieurs approches permettant de dépasser les limitations de l'approximation de la diffusion dans l'étude des fluctuations temporelles d'intensité. Fondées sur l'ETR, ces approches théoriques s'adaptent facilement aux géométries planes en réflexion ou en transmission. En particulier, nous présenterons une analyse de l'impact

du facteur d'anisotropie g sur la réflexion diffuse, avec comparaison à des résultats expérimentaux obtenus dans l'équipe de Frank SCHEFFOLD (PIERRAT *et al.* 2006; PIERRAT *et al.* 2007). L'ETR a déjà fait l'objet d'études dans le cadre de la DWS. Elle est en particulier très bien adaptée à l'étude de milieux stratifiés, comme par exemple le crâne humain (JAILLON *et al.* 2001).

Notons enfin qu'il existe des techniques similaires basées également sur des corrélations de figures de tavelure (*speckle* en anglais). Mentionons par exemple les modulations dynamiques de speckle générées par effet acousto-optique (envoi d'une onde ultrasonore localisée dans une zone précise du milieu diffusant pour mettre en mouvement les diffuseurs et ainsi engendrer des fluctuations d'intensité lumineuse) (LÉVÊQUE-FORT *et al.* 2001; SELB *et al.* 2001; GROSS *et al.* 2005; ATLAN *et al.* 2006).

IV.1 Fonctions de corrélations

IV.1.1 Fonction de corrélation temporelle

L'étude statistique des fluctuations temporelles passe par les fonctions de corrélation temporelles du champ (i.e. $G_1(t_1, t_2)$) et en intensité (i.e. $G_2(t_1, t_2)$) définies par :

$$G_1(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \langle E(\mathbf{r}, t_1) E^*(\mathbf{r}, t_2) \rangle \quad ; \quad G_2(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \langle I(\mathbf{r}, t_1) I(\mathbf{r}, t_2) \rangle^1 \quad (\text{IV.1})$$

où $E(\mathbf{r}, t)$ est le champ dans l'approximation scalaire, $I(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) = |E(\mathbf{r}, t)|^2$ l'intensité et où $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur l'ensemble des réalisations du système. Nous faisons l'hypothèse de stationnarité statistique du champ. Les fonctions de corrélation ne dépendent alors plus que de la différence des temps $\tau = t_2 - t_1$. On écrit :

$$G_1(\mathbf{r}, \tau) = \langle E(\mathbf{r}, 0) E^*(\mathbf{r}, \tau) \rangle \quad ; \quad G_2(\mathbf{r}, \tau) = \langle I(\mathbf{r}, 0) I^*(\mathbf{r}, \tau) \rangle. \quad (\text{IV.4})$$

Ces fonctions nous renseignent sur les corrélations qui existent entre deux champs pris au même point mais séparés d'un temps τ . On définit également les degrés de cohérence temporelle comme étant les fonctions de corrélations normalisées comme suit :

$$g_1(\mathbf{r}, \tau) = \frac{G_1(\mathbf{r}, \tau)}{G_1(\mathbf{r}, 0)} \quad ; \quad g_2(\mathbf{r}, \tau) = \frac{G_2(\mathbf{r}, \tau)}{|G_1(\mathbf{r}, 0)|^2}. \quad (\text{IV.5})$$

Dans le cas où g_1 vaut l'unité en module, le champ est dit totalement cohérent temporellement. Il est incohérent si $|g_1| = 0$. Dans les autres cas, il est partiellement cohérent. En ce qui concerne g_2 , le champ est dit respectivement cohérent, incohérent ou partiellement cohérent d'ordre 2 si $|g_2| = 1, 0$ ou différent de 1 et 0.

¹D'une manière plus générale, les fonctions de corrélation (ou d'autocorrélation) spatio-temporelles d'ordre 1 et 2 sont données par :

$$G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \quad (\text{notée } \Gamma \text{ dans le chapitre II}), \quad (\text{IV.2})$$

$$G_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, t'_1, t'_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) E^*(\mathbf{r}'_1, t'_1) E^*(\mathbf{r}'_2, t'_2) \rangle. \quad (\text{IV.3})$$

Habituellement, nous supposons des milieux ergodiques, c'est à dire qu'il est possible de remplacer la moyenne d'ensemble réalisée sur des milieux différents par une moyenne temporelle réalisée sur le même milieu :

$$G_1(\mathbf{r}, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t + \tau) dt. \quad (\text{IV.6})$$

Il est cependant possible d'avoir des situations non ergodiques (SCHEFFOLD *et al.* 2001) pour lesquelles cette hypothèse n'est plus valable.

IV.1.2 Relation de Siegert

Dans le cas le plus général, les fonctions de corrélation G_1 et G_2 sont indépendantes. Cependant, dans le cas particulier mais fréquent où la densité de probabilité du champ suit un processus gaussien, nous avons une relation entre les degrés de cohérence g_1 et g_2 ² (VENTSEL 1973). On a alors la relation :

$$G_2(\mathbf{r}, t_1, t_2) = G_1(\mathbf{r}, t_1, t_1) G_1(\mathbf{r}, t_2, t_2) + G_1(\mathbf{r}, t_1, t_2) G_1(\mathbf{r}, t_1, t_2). \quad (\text{IV.7})$$

Dans le cas stationnaire où $t_1 = 0$ et $t_2 = \tau$, on obtient :

$$G_2(\mathbf{r}, \tau) = |G_1(\mathbf{r}, 0)|^2 + |G_1(\mathbf{r}, \tau)|^2 \quad (\text{IV.8})$$

ce qui devient en normalisant :

$$\boxed{g_2(\mathbf{r}, \tau) = 1 + |g_1(\mathbf{r}, \tau)|^2}. \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi, il est possible de passer d'une fonction de corrélation à une autre en remarquant toutefois que la connaissance de g_2 n'apportera que la connaissance du module de g_1 . Les expériences peuvent nous renseigner sur la fonction de corrélation en intensité (détection homodyne basée sur une mesure directe de l'intensité diffusée) ou sur la fonction de corrélation du champ (détection hétérodyne basée sur une mesure interférentielle entre un faisceau de référence et le faisceau diffusé) (BERNE et PECORA 1976). Dans la suite, nous nous intéressons au calcul de G_1 , fonction de corrélation temporelle du champ.

IV.2 Extension de la dws au régime non-diffusif

IV.2.1 Théories existantes

On rappelle que des modèles bien établis existent permettant d'exprimer la fonction de corrélation. Citons par exemple :

- la QELS (*Quasi-Elastic Light Scattering* en anglais) ou DLS (*Dynamic Light Scattering* en anglais) permettant de décrire le comportement de la fonction de corrélation dans le régime de diffusion simple (BERNE et PECORA 1976; BLOOMFIELD et LIM 1978).

²D'une manière générale, on peut relier le degré de cohérence d'ordre n au degré de cohérence d'ordre 1.

- la DWS (*Diffusing-Wave Spectroscopy* en anglais) rendant compte des variations de la fonction de corrélation dans la régime diffusif (MARET et WOLF 1987; PINE *et al.* 1988). Dans ce cadre, diverses expressions de la fonction de corrélation sont présentées dans l'annexe K.

Récemment, une théorie permettant de rendre compte de la transition entre le régime diffusif et le régime de diffusion multiple a été élaborée (CARMINATI *et al.* 2004). Nous allons la développer et l'utiliser pour présenter des résultats numériques originaux sur la pente de la fonction de corrélation, résultats qui seront validés expérimentalement dans le cas de la réflexion (PIERRAT *et al.* 2006; PIERRAT *et al.* 2007).

Tous ces modèles visent à rendre compte quantitativement des résultats expérimentaux dont certains sont résolus en chemin (l'utilisation de l'interférométrie par l'intermédiaire d'un bras de référence permet de discriminer entre les photons ayant suivis des chemins de longueurs différentes au sein du milieu diffusant) (BIZHEVA *et al.* 1998; WAX *et al.* 2001; POPESCU et DOGARIU 2001; TUALLE *et al.* 2006).

IV.2.2 Présentation du modèle étendu

La démarche suivie ici est celle originale de PINE (PINE *et al.* 1988) qu'on généralise (ELALOUI 2003; CARMINATI *et al.* 2004).

Définissons tout d'abord la fonction de corrélation temporelle pour n événements de diffusion. Elle est donnée par :

$$G_1^{(n)}(\mathbf{r}, \tau) = \langle E^{(n)}(\mathbf{r}, \tau) E^{(n)*}(\mathbf{r}, 0) \rangle. \quad (\text{IV.10})$$

Nous allons alors chercher à déterminer l'expression du champ $E^{(n)}(\mathbf{r}, \tau)$ en fonction du champ $E^{(n)}(\mathbf{r}, 0)$.

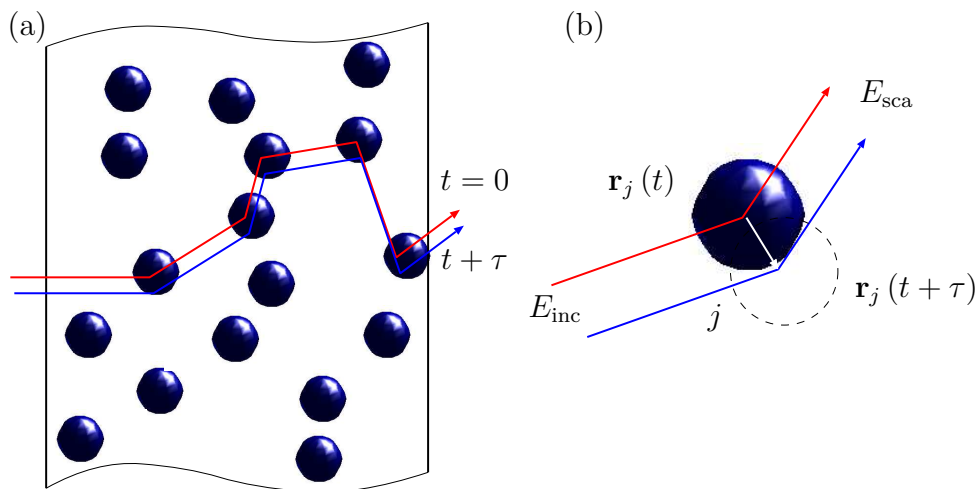


Fig. IV.1 – Diffusion par des particules en mouvement. La figure (a) représente la diffusion d'une onde par n particules au temps $t = 0$ et au temps $t + \tau$. La figure (b) schématise la diffusion par la particule j .

Intéressons-nous tout d'abord à la diffusion par une particule, la $j^{\text{ème}}$ du nom par exemple. La figure IV.1 représente la situation étudiée. Le champ incident est noté $E_{inc}(t)$ de vecteur

d'onde $\mathbf{k}_{\text{inc}} = \mathbf{k}_{j-1}$ et le champ diffusé $E_{\text{sca}}(t)$ de vecteur d'onde $\mathbf{k}_{\text{sca}} = \mathbf{k}_j$. Le déphasage subit par le champ lors de la diffusion à l'instant t est :

$$\Delta\varphi(t) = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}_j(t) \quad \text{où} \quad \mathbf{q}_j = \mathbf{k}_j - \mathbf{k}_{j-1} \quad \text{vecteur diffusion.} \quad (\text{IV.11})$$

On a alors les deux cas particuliers :

$$\Delta\varphi(0) = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}_j(0) \quad ; \quad \Delta\varphi(\tau) = \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{r}_j(\tau). \quad (\text{IV.12})$$

Cela permet d'obtenir le déphasage entre les champs diffusés à $t = 0$ (i.e. $E_{\text{sca}}(0)$) et le champ diffusé à $t = \tau$ (i.e. $E_{\text{sca}}(\tau)$) donné par :

$$\Delta\Delta\varphi = \mathbf{q}_j \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) \quad \text{où} \quad \Delta\mathbf{r}_j(\tau) = \mathbf{r}_j(\tau) - \mathbf{r}_j(0). \quad (\text{IV.13})$$

Au final, sur l'ensemble des n diffusions, on obtient l'expression du déphasage total ce qui permet d'écrire le champ diffusé à l'instant τ sous la forme :

$$E^{(n)}(\mathbf{r}, \tau) = E^{(n)}(\mathbf{r}, 0) \exp \left[i \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) \right]. \quad (\text{IV.14})$$

La fonction de corrélation du champ devient alors :

$$\begin{aligned} G_1^{(n)}(\mathbf{r}, \tau) &= \left\langle E^{(n)}(\mathbf{r}, 0) E^{(n)*}(\mathbf{r}, 0) \exp \left[i \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) \right] \right\rangle \\ &= \left\langle I^{(n)}(\mathbf{r}, 0) \exp \left[i \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Tout comme dans la théorie de la DWS standard (PINE *et al.* 1988), nous ignorons la condition sur les vecteurs d'onde $\sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j = \mathbf{k}_n - \mathbf{k}_0$ et supposons que les contributions au champ de chemins différents ne sont pas corrélées. Cette hypothèse est vraie dans le cas où la distance moyenne entre chaque diffusion l_s est grande devant la longueur d'onde λ (i.e. le déphasage entre les champs issus de deux chemins différents est grand devant 2π , ce déphasage est donc totalement aléatoire et la moyenne sur l'ensemble des réalisations est nulle). En terme diagrammatique, cela revient à ne considérer que des diagrammes en échelle (voir Ann. A)³. Ainsi, l'intensité $I^{(n)}(\mathbf{r}, 0)$ peut être remplacée par le terme $I_0 P(n)$ où I_0 représente l'intensité incidente et où $P(n)$ est la fraction de l'intensité incidente diffusée n fois. La fonction de corrélation devient :

$$G_1^{(n)}(\tau) = I_0 P(n) \left\langle \exp \left[i \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j \cdot \Delta\mathbf{r}_j(\tau) \right] \right\rangle. \quad (\text{IV.16})$$

Nous supposons maintenant que la distribution des \mathbf{q}_j ne dépend que de la fonction de phase et du nombre d'événements de diffusion n . Pour le mouvement brownien, la distribution de $\Delta\mathbf{r}_j(\tau)$ est gaussienne ce qui permet de moyennner sur le déplacement aléatoire des particules. On obtient :

$$G_1^{(n)}(\tau) = I_0 P(n) \left\langle \exp \left[-q^2 \frac{\langle \Delta r^2(\tau) \rangle}{6} \right] \right\rangle_q \quad (\text{IV.17})$$

³Le développement diagrammatique permet de conclure que la fonction de corrélation temporelle en intensité étudiée ici n'est autre que celle décrivant la corrélation dite c_1 .

où $\langle \dots \rangle_q^n$ représente la moyenne sur le module du vecteur de diffusion \mathbf{q} pour un nombre de diffusion n donné. Dans le cas du mouvement brownien $\langle \Delta r^2(\tau) \rangle = 6\mathcal{D}_B\tau$ où \mathcal{D}_B est le coefficient de diffusion brownien. Si Θ est l'angle de diffusion (i.e. l'angle entre les vecteurs d'onde incident et difusé) et $k = 2\pi/\lambda$, le module du vecteur de diffusion s'écrit :

$$q = 2k \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right). \quad (\text{IV.18})$$

En définissant la constante de temps $\tau_0 = 1/(\mathcal{D}_B k^2)$, la fonction de corrélation s'écrit :

$$G_1^{(n)}(\tau) = I_0 P(n) \left\langle \exp\left[-4 \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \frac{\tau}{\tau_0}\right] \right\rangle_q^n. \quad (\text{IV.19})$$

Si maintenant on se restreint aux faibles temps de corrélation (i.e. $\tau \ll \tau_0$), on peut évaluer la moyenne sur q en faisant un développement limité :

$$\begin{aligned} \left\langle \exp\left[-4 \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \frac{\tau}{\tau_0}\right] \right\rangle_q^n &\sim \left\langle 1 - 4 \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \frac{\tau}{\tau_0} \right\rangle_q^n = \left(1 - 4 \left\langle \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right\rangle_q \frac{\tau}{\tau_0}\right)^n \\ &\sim \exp\left[-4n \left\langle \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right\rangle_q \frac{\tau}{\tau_0}\right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Ainsi, la fonction de corrélation s'écrit :

$$G_1^{(n)}(\tau) = I_0 P(n) \exp\left[-4n \left\langle \sin^2\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right\rangle_q \frac{\tau}{\tau_0}\right]. \quad (\text{IV.21})$$

Finalement, on définit la quantité moyenne $\mathcal{M}(n) = 2 \left\langle \sin^2(\Theta/2) \right\rangle_q^n = 1 - \langle \cos \Theta \rangle_q^n$. Cette quantité représente la moyenne du cosinus de l'angle de diffusion pour n événements de diffusion. Elle peut être évaluée numériquement en utilisant une approche de type MONTE CARLO. Il suffit pour cela de mémoriser les angles de diffusion pour chaque tirage aléatoire de direction de diffusion et le nombre de diffusions pour un chemin donné (voir Ann. J). Il est évident que dans le cas où $n \rightarrow \infty$ (grand nombre d'événements de diffusion), le cosinus de l'angle de diffusion moyenné tend vers le facteur d'anisotropie g . La prise en compte du facteur $\mathcal{M}(n)$ est la première amélioration que nous incluons dans la théorie étendue par rapport à la théorie de PINE :

1. La moyenne de l'angle de diffusion dépend du nombre d'événements de diffusion.

Ainsi, la fonction de corrélation s'écrit :

$$G_1^{(n)}(\tau) = I_0 P(n) \exp\left[-2n\mathcal{M}(n) \frac{\tau}{\tau_0}\right]. \quad (\text{IV.22})$$

Nous introduisons maintenant la longueur du chemin s dans le milieu comme cela a été proposé dans (WAX *et al.* 2001; ELALOUI 2003; CARMINATI *et al.* 2004). La fonction de corrélation correspondant à un chemin de longueur s avec n événements de diffusion s'écrit :

$$G_1^{(n)}(\tau, s) = I_0 P(s) P(n, s) \exp\left[-2n\mathcal{M}(n) \frac{\tau}{\tau_0}\right] \quad (\text{IV.23})$$

où $P(s)$ est la densité de probabilité d'avoir un chemin de longueur s et $P(n, s)$ la densité de probabilité d'avoir n événements de diffusion sur un chemin de longueur s . Cette dernière grandeur est donnée par une loi de POISSON (ceci est vrai sous certaines hypothèses, voir Ann. L) :

$$P(n, s) = \frac{1}{n!} \left(\frac{s}{l_s}\right)^n \exp\left(-\frac{s}{l_s}\right). \quad (\text{IV.24})$$

Dans le cas de la théorie standard, on l'écrit simplement sous forme d'une distribution de DIRAC $\delta(n - s/l_s)$, ce qui signifie que la longueur d'un chemin est proportionnelle au nombre de diffusions. Cela n'est vrai en toute rigueur qu'en moyenne. Ici, on considère qu'il peut exister des chemins longs avec peu d'événements de diffusion ou au contraire des chemins courts avec un grand nombre de diffusions. Cela se révélera important dans les résultats numériques. Il s'agit ici de la deuxième amélioration par rapport à la théorie standard :

2. Nous décrivons statistiquement le rapport entre la longueur des chemins et le nombre d'événements de diffusion.

Pour calculer la fonction de corrélation du champ pour un chemin de longueur s , on somme sur le nombre d'événements de diffusion n , ce qui conduit à :

$$G_1(\tau, s) = I_0 P(s) \sum_{n=1}^{\infty} P(n, s) \exp\left[-2n\mathcal{M}(n) \frac{\tau}{\tau_0}\right]. \quad (\text{IV.25})$$

Finalement, la fonction de corrélation complète s'écrit :

$$G_{1\text{étendue}} = I_0 \int_0^{\infty} P(s) \sum_{n=1}^{\infty} P(n, s) \exp\left[-2n\mathcal{M}(n) \frac{\tau}{\tau_0}\right] ds. \quad (\text{IV.26})$$

Notons enfin la troisième amélioration du modèle qui sera détaillée dans la suite :

3. La densité de probabilité $P(s)$ sera calculée en utilisant l'ETR.

L'utilisation de l'ETR permet d'aller au-delà des inconvénients de l'approximation de la diffusion. Elle décrit les différents régimes de transport (voir Chap. II) sans se limiter au cas diffusif et permet de traiter proprement les conditions aux limites aux interfaces. L'ETR est également très bien adaptée à l'étude de milieux stratifiés, comme le crâne humain (JAILLON *et al.* 2001).

Remarque : Il est possible de retrouver la formule dite de la théorie DWS standard en remplaçant :

- $P(n, s)$ par $\delta(n - s/l_s)$: le nombre d'événements de diffusion pour un chemin de longueur s est donné par s/l_s .
- $\mathcal{M}(n)$ par $1 - g = l_s/l_{tr}$. Cela est vrai dans le régime diffusif où le nombre d'événements de diffusion n est suffisant pour supposer que la moyenne du cosinus de l'angle de diffusion est indépendante de n .

La fonction de corrélation s'énonce alors :

$$G_{1\text{standard}}(\tau) = I_0 \int_0^\infty P(s) \exp\left[-2\frac{\tau s}{\tau_0 l_{tr}}\right] ds. \quad (\text{IV.27})$$

C'est le résultat de (PINE *et al.* 1988). On remarque que cette théorie donne accès à la distribution des chemins et au coefficient de diffusion brownien (à travers τ_0) à partir de la fonction de corrélation temporelle.

IV.3 Calculs pratiques en géométrie plane

Dans cette partie, nous étudions la fonction de corrélation temporelle du champ dans une géométrie plane (voir Sec. I.4) en transmission ou réflexion. Le milieu est supposé éclairé par un impulsion brève (de largeur à mi-hauteur faible devant les temps caractéristiques du système) sous incidence normale.

IV.3.1 Calcul indirect de la fonction de corrélation

Le principe du calcul indirect consiste dans un premier temps à déterminer l'expression de $P(s)$ et celle de $\mathcal{M}(n)$ puis ensuite à effectuer le calcul de l'intégrale sur la longueur des chemins s . En général, nous n'avons pas d'autre choix que d'effectuer le calcul de $P(s)$ et $\mathcal{M}(n)$ numériquement, que ce soit par approximation de la diffusion ou ETR.

Relation entre $P(s)$ et les flux de sortie

Le milieu étant homogène en moyenne, la célérité de la lumière est constante, il est alors possible de calculer la densité de probabilité $P(s)$ d'avoir un chemin de longueur s à partir du flux transmis ou réfléchi :

$$P(s) = \frac{\phi_{\text{sort}}^\pm(t = s/c)}{cE_{\text{inc}}} \quad \text{où } E_{\text{inc}} \text{ est l'énergie surfacique incidente.} \quad (\text{IV.28})$$

Calcul pratique de $\mathcal{M}(n) = 1 - \langle \cos \Theta \rangle$

La méthode de MONTE CARLO nous permet alors de calculer $\mathcal{M}(n)$ en fonction des paramètres du milieu et de l'ouverture numérique d'éclairage et de détection⁴. La figure IV.2

⁴L'ouverture numérique NA renseigne sur l'étendue de l'angle solide de regard, on a alors $NA = n \sin \theta_l$ avec n l'indice optique du milieu de sortie (i.e. n_1 en réflexion et n_3 en transmission) et θ_l l'angle limite de

donne un exemple de résultat obtenu. Nous avons de plus les deux cas particuliers suivants pour une faible ouverture numérique (flux de sortie suivant l'axe z) :

- en transmission, $\mathcal{M}(1) = 1 - 1 = 0$,
- en réflexion, $\mathcal{M}(1) = 1 - (-1) = 2$.

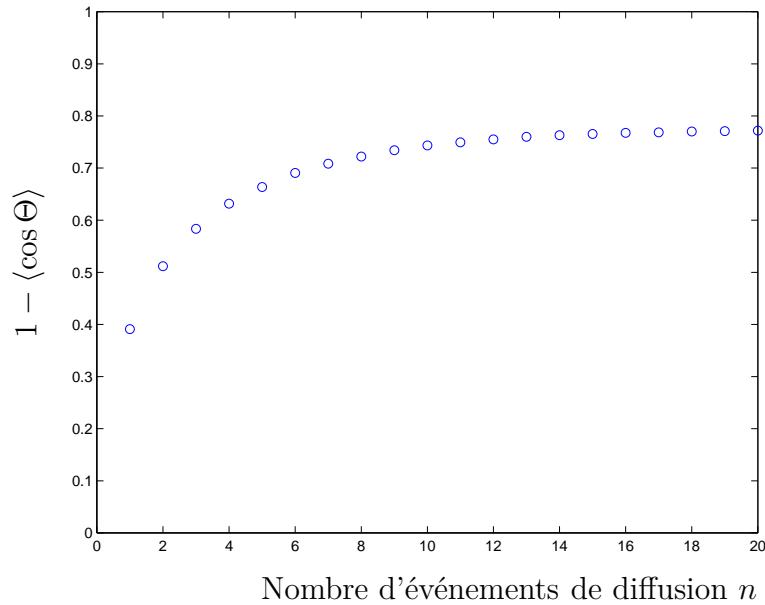


Fig. IV.2 – Exemple de représentation de $\mathcal{M}(n)$ en transmission pour une faible ouverture numérique. Le facteur d'anisotropie vaut $g = 0.23$. Pour $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{M}(n) \rightarrow 1 - g$.

Amélioration possible du calcul ?

Le calcul indirect d'apparence simple (grâce à l'exponentielle décroissante dans l'intégrale) est limité par les variations du flux. Des tests ont montré qu'il est nécessaire de discrétiser largement les longueurs de chemins et de considérer de larges s . Dans le cas d'une géométrie plane, nous allons montrer qu'il existe une méthode de calcul différente, plus précise et surtout moins gourmande en temps de calcul.

IV.3.2 Calcul direct de la fonction de corrélation

Dans le cas du calcul direct, on cherche à s'affranchir du calcul des flux et des intégrales pour obtenir dans la mesure du possible et sous certaines hypothèses une équation de transport pour la fonction de corrélation.

Cas du régime diffusif : la formule de Pine

Dans le cas du régime diffusif en géométrie plane, il est possible de calculer explicitement la fonction de corrélation à partir de la formule IV.27 dite de la DWS standard. Cette expression finale détaillée en annexe K (équation K.12) est appelée formule de PINE (PINE

l'ouverture.

et al. 1990). La méthode consiste à prendre la transformée de LAPLACE de l'équation de la diffusion. La résolution de l'équation obtenue donne ensuite facilement l'expression de la fonction de corrélation. D'autres théories ont été élaborées sur le même principe en cherchant directement une équation de transport (ACKERSON *et al.* 1992; DOUGHERTY *et al.* 1994) ou de la diffusion pour la fonction de corrélation (YODH *et al.* 1990).

Nous allons appliquer la méthode suivie par PINE à l'ETR pour calculer la fonction de corrélation tout d'abord en utilisant la formule de la DWS standard IV.27 puis celle étendue IV.26.

Intégrale de la théorie standard avec $P(s)$ calculé par l'etr

Nous cherchons dans cette section à éviter le calcul de la densité de probabilité $P(s)$. Nous recherchons alors une équation de transport pour la transformée de LAPLACE de la luminance à partir de l'ETR.

On rappelle tout d'abord que le problème est invariant par translation selon les directions x et y et par rotation selon l'angle φ et que par conséquent, on ne considère que la variable d'espace z et l'angle θ .

Nous introduisons tout d'abord la transformée de LAPLACE de la luminance :

$$\bar{L}(z, \mu, p) = \int_0^\infty L(z, \mu, t) \exp[-pt] dt \quad \text{avec} \quad p = \frac{2\tau c}{\tau_0 l_{tr}} \quad (\text{IV.29})$$

où $\mu = \cos\theta$, et nous prenons la transformée de LAPLACE temporelle de l'ETR (équation I.27). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \underbrace{L(z, \mu, t=0)}_{=0} + \frac{1}{c} p \bar{L}(z, \mu, p) + \mu \frac{\partial \bar{L}}{\partial z}(z, \mu, p) &= -\mu_e \bar{L}(z, \mu, p) \\ + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') \bar{L}(z, \mu', p) d\mu' + \underbrace{\int_0^\infty L_i T_{12}(1) \delta(\mu-1) \delta(z) \delta(t) \exp[-pt] dt}_{L_{inc} T_{12}(1) \delta(\mu-1) \delta(z)} & \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

où L_{inc} est la luminance incidente normalement à l'interface en $z = 0$ à l'instant $t = 0$ (impulsion supposée infiniment brève) et $T_{12}(|\mu|)$ est le coefficient de transmission de FRESNEL en énergie du milieu **1** vers le milieu **2** (transmission du rayonnement incident vers le milieu diffusant). La résolution numérique de cette équation se fait tout comme dans le cas d'une ETR classique stationnaire par la méthode des ordonnées discrètes (voir Ann. C). Nous obtenons alors directement l'expression de la fonction de corrélation normalisée en fonction de la transformée de LAPLACE du flux transmis :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) \propto \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \int_0^1 \mu \bar{L}(L, \mu, p) T_{23}(|\mu|) d\mu, \quad (\text{IV.31})$$

ou réfléchi :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) \propto \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \int_{-1}^0 -\mu \bar{L}(0, \mu, p) T_{21}(|\mu|) d\mu. \quad (\text{IV.32})$$

Calculer la fonction de corrélation par cette méthode est beaucoup plus précis (pas d'intégrale temporelle à calculer numériquement) et beaucoup plus rapide (discrétisation angulaire uniquement) que par la méthode indirecte consistant à passer par un calcul de $P(s)$ puis par une intégration.

Intégrale de la théorie étendue avec $P(s)$ calculé par l'etr

Nous cherchons dans cette section à éviter le calcul de la densité de probabilité $P(s)$ dans le cas de la théorie étendue. Pour cela, nous allons chercher une transformée de l'ETR nous permettant de déduire rapidement l'expression de la fonction de corrélation.

Simplification partielle du terme $\mathcal{M}(n)$ En première approximation, nous pouvons considérer $\mathcal{M}(n) = 1 - g$ avec g facteur d'anisotropie pour $n > n_0$ et conserver l'expression initiale pour $n \leq n_0$. Plus n_0 sera grand, plus la précision du calcul sera fine. Il est alors possible de couper en deux la série de la formule étendue IV.26. La partie correspondant à $n > n_0$ peut être calculée analytiquement.

On rappelle que la densité de probabilité $P(n, s)$ est une distribution de POISSON donnée par :

$$P(n, s) = \frac{1}{n!} \left(\frac{s}{l_s}\right)^n \exp\left[-\frac{s}{l_s}\right]. \quad (\text{IV.33})$$

Ainsi, la fonction de corrélation normalisée calculée en DWS étendue devient :

$$g_{1\text{étendue}}(\tau) \propto \int_0^\infty P(s) \left\{ \exp\left[\frac{s}{l_s} \exp\left(-\frac{2\tau l_s}{\tau_0 l_{tr}}\right)\right] \exp\left(-\frac{s}{l_s}\right) - \exp\left(-\frac{s}{l_s}\right) + \sum_{n=0}^{n_0} P(n, s) \left[\exp\left\{-2\frac{n\tau \mathcal{M}(n)}{\tau_0}\right\} - \exp\left\{-2\frac{n\tau l_s}{\tau_0 l_{tr}}\right\} \right] \right\} ds. \quad (\text{IV.34})$$

De telles expressions ont déjà été obtenues et utilisées en pratique (NGHIEM 2005). On remarque néanmoins que dans un tel cas, il est toujours nécessaire de calculer le flux puis l'intégrale. Pour pouvoir aller plus loin, il est nécessaire de considérer que $\mathcal{M}(n)$ est indépendant du nombre d'événements de diffusion.

Cas particulier où $\mathcal{M}(n) = 1 - g$ Dans le cas de la DWS étendue, utiliser $\mathcal{M}(n) = 1 - g$ est une très bonne approximation dès que $n > 1$. Considérons cette approximation comme bonne dès que $n = 0$. Dans ce cas, nous ne prenons pas en compte de manière exacte la relaxation en angle et il est possible d'obtenir une équation de transport directement pour la fonction de corrélation temporelle comme cela est fait dans le cas de la DWS standard avec flux ETR par utilisation d'une transformée de LAPLACE. L'intérêt réside ici dans le fait qu'on peut s'affranchir du calcul numérique de la série et de l'intégrale. Sur le même principe, en posant

$$g_1^n(\tau, z, \mu) = \int_0^\infty L(z, \mu, t) P(n, s) \exp\left[-2n\frac{\tau l_s}{\tau_0 l_{tr}}\right] ds \quad \text{avec} \quad s = ct \quad (\text{IV.35})$$

la fonction d'autocorrélation normalisée du champ en transmission est donnée par :

$$\boxed{g_{1\text{étendue}}(\tau) \propto \left(\frac{n_3}{n_2}\right)^2 \int_0^1 \mu g_1(\tau, L, \mu) T_{23}(|\mu|) d\mu} \quad \text{avec} \quad g_1(\tau, z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_1^n(\tau, z, \mu) \quad (\text{IV.36})$$

et en réflexion par :

$$\boxed{g_{1\text{étendue}}(\tau) \propto \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \int_{-1}^0 -\mu g_1(\tau, 0, \mu) T_{21}(|\mu|) d\mu} \quad \text{avec} \quad g_1(\tau, z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} g_1^n(\tau, z, \mu). \quad (\text{IV.37})$$

Recherchons alors une équation de transport pour la fonction $g_1^n(\tau, z, \mu)$. L'ETR s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L(z, \mu, t) = -\mu_e L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') L(z, \mu', t) d\mu' + L_{\text{inc}} T_{12}(1) \delta(\mu - 1) \delta(z) \delta(t) \quad (\text{IV.38})$$

Nous allons intégrer l'ETR après l'avoir multipliée par le terme $P(n, s) \exp[-2n\tau l_s / (\tau_0 l_{tr})]$. Cela nécessite la connaissance de la dérivée de la distribution de POISSON par rapport à s . D'après son expression analytique, on remarque aisément que :

$$\frac{\partial P}{\partial s}(n, s) = \begin{cases} \frac{1}{l_s} [P(n-1, s) - P(n, s)] & \text{si } n \neq 0, \\ -\frac{P(n, s)}{l_s} & \text{si } n = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

ce qui conduit à une équation de transport directement pour la quantité $g_1^n(\tau, z, \mu)$ dans le cas $n \neq 0$:

$$\frac{g_1^n(\tau, z, \mu) - g_1^{n-1}(\tau, z, \mu) \exp[-2\tau l_s / (\tau_0 l_{tr})]}{l_s} + \mu \frac{\partial g_1^n}{\partial z}(\tau, z, \mu) = -\mu_e g_1^n(\tau, z, \mu) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') g_1^n(\tau, z, \mu') d\mu' + c L_{\text{inc}} T_{12}(1) \delta(\mu - 1) \delta(z) P(n, 0) \exp\left[-2n \frac{\tau l_s}{\tau_0 l_{tr}}\right]. \quad (\text{IV.40})$$

Dans le cas $n = 0$, le terme en $n - 1$ disparaît. Finalement, en sommant sur n l'équation précédente, on obtient une équation de transport pour $g_1(\tau, z, \mu)$:

$$\frac{1 - \exp[-2\tau l_s / (\tau_0 l_{tr})]}{l_s} g_1(\tau, z, \mu) + \mu \frac{\partial g_1}{\partial z}(\tau, z, \mu) = -\mu_e g_1(\tau, z, \mu) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') g_1(\tau, z, \mu) d\mu' + c L_{\text{inc}} T_{12}(1) \delta(\mu - 1) \delta(z) \quad (\text{IV.41})$$

qu'il est possible de résoudre par la même méthode que précédemment puisqu'il s'agit à nouveau d'une équation de transfert radiatif stationnaire.

Remarque :

- Dans le cas où $\tau \rightarrow 0$, un développement limité montre qu'on retrouve l'équation de transport pour $\bar{L}(z, \mu, p)$ ce qui est attendu. En effet, cela équivaut à ne conserver que les grands s (du fait de la structure de la transformée de LAPLACE). La largeur de la distribution de POISSON diminue, on est dans le cas où on a quasiment $n = s/l_s$. Il est donc normal de retrouver le résultat précédent qui correspond au cas où la distribution $P(n, s) = \delta(n - s/l_s)$. Ainsi les fonctions de corrélation calculées en utilisant d'une part la formule de la DWS standard (équation IV.27) dont le flux est donné par un calcul ETR et d'autre part la formule de la DWS étendue IV.26 auront la même pente à l'origine.
- À l'inverse, si $\tau \rightarrow \infty$, l'exponentielle devient négligeable dans l'équation de transport. La fonction de corrélation ne dépend alors plus de τ . On observe donc une asymptote, la fonction de corrélation ne tend pas vers 0. Cela est dû à l'utilisation de la distribution de POISSON qui énonce qu'il existe toujours des chemins très longs avec peu d'événements de diffusion et qu'ainsi des corrélations résiduelles existent toujours pour tout temps de corrélation τ .

Des comparaisons entre des calculs directs et indirects ont montré *a fortiori* que dans les situations étudiées ci-après où la diffusion multiple est prépondérante l'effet de $\mathcal{M}(n)$ reste négligeable.

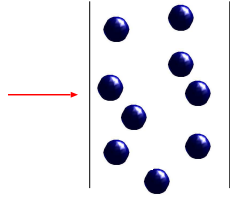
IV.4 Résultats numériques et validation expérimentale

IV.4.1 Théories comparées

Dans cette section, nous nous proposons de comparer les théories suivantes :

- La formule de PINE (équation K.12) donnant une expression explicite de la fonction de corrélation (voir Ann. K) valable en régime diffusif. L'utilisation de l'approximation de la diffusion dans ce cas nécessite de prendre en compte la longueur d'extrapolation z_0 pour décrire les conditions aux limites aux interfaces et la longueur z_s pour spécifier la profondeur de la source supposée isotrope. PINE a retenu $z_0 = 2/3l_{tr}$ (voir Ann. I) et $z_s = l_{tr}$.
- L'intégrale de la DWS standard (équation IV.27) avec
 - $P(s)$ calculé en approximation de la diffusion (voir Ann. H). Nous avons choisi de retenir $z_0 = 0.7104l_{tr}$ (voir Ann. I) et $z_s = 0$. De ce fait, le résultat sera différent de la formule de PINE.
 - $P(s)$ calculé à l'aide de l'ETR. La méthode directe du paragraphe IV.3.2 pour la DWS standard sera utilisée pour calculer la fonction de corrélation.
- L'intégrale de la DWS étendue (équation IV.26) avec bien entendu $P(s)$ calculé à l'aide de l'ETR et $\mathcal{M}(n) = 1 - g$. La méthode directe du paragraphe IV.3.2 pour la DWS étendue sera donc utilisée pour calculer la fonction de corrélation.

IV.4.2 Étude numérique en transmission



Dans cette sous-section, nous étudions les déviations sur la fonction de corrélation en transmission calculée à l'aide des diverses théories mentionnées ci-dessus.

Les paramètres du milieu plan étudié sont repérés dans le tableau ci-après :

Paramètre	Description	Valeur
n_1	Indice optique du milieu 1	1.33
n_2	Indice optique du milieu 2	1.33
n_3	Indice optique du milieu 3	1.33
\mathcal{D}_B	Coefficient de mouvement brownien	$1.077 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
λ	Longueur d'onde incidente	532.00 nm
n_p	Indice complexe des particules	$1.59 + 1.00 \times 10^{-4}i$
n_h	Indice complexe du milieu hôte absorbant	1.33
n_{eff}	Indice effectif du milieu 2	1.339132
a	Rayon des particules	210.00 nm
C	Concentration en particules	4.29 %
NA	Ouverture numérique pour le flux transmis	0.31

Ces paramètres correspondent à des microsphères de polystyrène immergées dans de l'eau. Le coefficient de diffusion brownien est calculé en utilisant la viscosité du liquide $\eta = 0.955$ cps, la constante de BOLTZMANN k_B , la température $T = 300$ K et le rayon des particules a (i.e. $\mathcal{D}_B = k_B T / (6\pi\eta a)$). L'indice effectif n_{eff} se calcule aisément (moyenne de n_h et n_p pondérée par les fractions volumiques) puisque la concentration C est faible.

Notons que les propriétés radiatives du milieu sont déduites par l'utilisation de la théorie de MIE. Elles sont données par :

Paramètre	Description	Valeur
l_s	Longueur de diffusion	$8.51 \times 10^{-6} \text{ m}$
a	Albédo	0.99
l_{tr}	Longueur de transport	$4.78 \times 10^{-5} \text{ m}$
g	Facteur d'anisotropie	0.82

Premier cas : $L = 2.00 \times 10^{-4} \text{ m soit } = 4.418l_{tr}$

Pour cette configuration, le maximum de la densité de probabilité $P(s)$ coïncide avec la transition entre la théorie de la DWS standard (régime diffusif) et la QELS (régime de diffusion simple).

La figure IV.3 représente le tracé de la fonction de corrélation normalisée $g_1(\tau)$ calculée par les diverses théories présentées ci-dessus.

Second cas : $L = 8.00 \times 10^{-4} \text{ m soit } = 16.72l_{tr}$

Dans ce cas, la densité de probabilité $P(s)$ est nulle pour les petits s (i.e. dans le régime QELS). Nous nous attendons donc à ne pas visualiser de différences majeurs entre la théorie de la DWS standard et la théorie étendue.

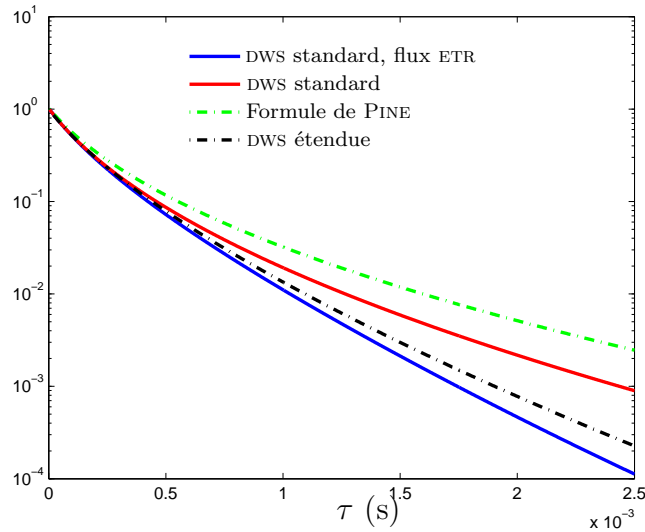


Fig. IV.3 – Tracé de la fonction de corrélation $g_1(\tau)$ dans le cas d'un milieu fin : la courbe bleue correspond l'équation (IV.27) avec $P(s)$ calculé en utilisant l'ETR, la courbe rouge correspond à l'équation (IV.27) avec $P(s)$ calculé par l'approximation de la diffusion, la courbe en pointillés verts représente la formule de PINE et la courbe en pointillés noirs représente le résultat de la théorie étendue.

La figure IV.4 représente les mêmes grandeurs que la figure IV.3 avec le second jeu de paramètres.

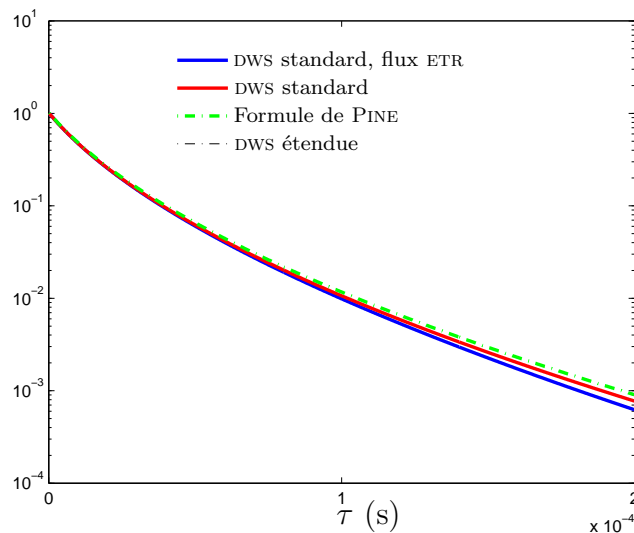


Fig. IV.4 – Tracé de la fonction de corrélation $g_1(\tau)$ dans le cas d'un milieu épais.

Interprétation

Nous voyons que pour les grandes épaisseurs optiques (voir Fig. IV.4), toutes les théories donnent le même comportement, les quelques différences étant principalement dues à la

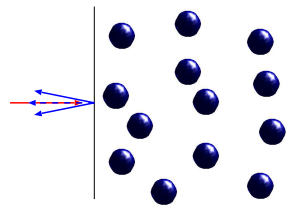
prise en compte plus ou moins précise des conditions aux limites. On rappelle que dans le cas de l'approximation de la diffusion qui est à la base de la théorie de la DWS standard et de la formule de PINE, on utilise une longueur d'extrapolation z_0 pour spécifier les conditions aux limites (voir Ann. I).

Au contraire, des déviations notables sont constatées dans le cas de milieux fins (voir Fig. IV.3). Les différences les plus flagrantes entre la théorie standard et la théorie étendue peuvent être résumées en deux points particuliers :

- Dans la théorie standard, la densité de probabilité $P(n, s)$ vaut $\delta(n - s/l_s)$, cela signifie qu'on considère que le nombre d'événements de diffusion le long d'un chemin de longueur s vaut exactement s/l_s . Dans la théorie étendue, nous prenons en compte le fait qu'il existe des chemins longs avec peu d'événements de diffusion. Ces événements sont à la fois rares et importants quantitativement parlant comme le soulignent les courbes de la figure IV.3.
- Dans la théorie standard, la densité de probabilité $P(s)$ est calculée en utilisant l'approximation de la diffusion. Il est connu que cette approximation surestime l'importance des chemins courts. En utilisant l'ETR, nous prenons en compte convenablement les chemins courts.

Notons que les déviations visualisées sont suffisamment importantes pour être mesurées expérimentalement avec les techniques récentes (ZAKHAROV *et al.* 2006; GROSS *et al.* 2005; LESAFFRE *et al.* 2006).

IV.4.3 Étude en réflexion : rôle de la diffusion anisotrope



Dans cette sous-section, nous montrons que l'anisotropie de la diffusion a un rôle prépondérant sur la pente de la fonction de corrélation. Les résultats numériques obtenus en utilisant la théorie standard dont la densité de probabilité $P(s)$ est calculée à partir de l'ETR sont validés expérimentalement grâce à une collaboration avec l'équipe de Frank SCHEFFOLD à l'université de FRIBOURG.

De plus, cet effet n'est pas du tout reproduit par les théories utilisant l'approximation de la diffusion, offrant de fait une démonstration de l'intérêt de l'ETR.

Des tentatives ont déjà été menées pour tenter d'obtenir un comportement correct de la fonction de la corrélation vis à vis de l'anisotropie de la diffusion. On peut citer des travaux utilisant l'équation des télégraphistes (LEMIEUX *et al.* 1998) ou une approximation de la diffusion améliorée (DURIAN 1995). Ces travaux validés numériquement ne le sont toutefois pas par l'expérience décrite ci-dessous.

Nous nous concentrons sur un milieu plan semi-infini. En réflexion et dans le cas des faibles temps de corrélation (i.e. $\tau \ll \tau_0$), la formule de PINE donne (voir Ann. K) :

$$g_1(x) = \exp(-\gamma x) \quad \text{avec} \quad x = \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \ll 1 \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma_s + \gamma_0 \quad (\text{IV.42})$$

où $\gamma_s = 1$ et $\gamma_0 = 2/3$, soit $\gamma = 5/3$. La pente logarithmique de la fonction de corrélation (i.e. γ) est constante et ne dépend pas du facteur d'anisotropie de la diffusion g .

Afin d'effectuer des comparaisons, nous allons définir une pente effective γ_{eff} dans les autres théories de calcul de la fonction de corrélation g_1 .

Introduction de la pente effective γ_{eff}

Considérons alors la théorie de la DWS standard dans laquelle le flux réfléchi est calculé en utilisant l'ETR (équation IV.27). On peut définir un coefficient effectif de la manière suivante :

$$\gamma_{\text{eff}}(x') = - \left. \frac{\partial \ln g_1}{\partial x} \right|_{x=x'} \quad (\text{IV.43})$$

où x' est une valeur de x que l'on fixera dans la suite.

Approximation de la diffusion corrigée

Il est connu que l'approximation de la diffusion surestime les chemins courts. Il a alors été proposé d'améliorer le modèle diffusif en y adjoignant un *cut-off* des chemins courts (MAC-KINTOSH et JOHN 1989b; ROJAS-OCHOA *et al.* 2004). La densité de probabilité d'avoir un chemin de longueur s en réflexion dans un milieu plan semi-infini est donnée par (voir Ann. K) :

$$P_{\text{diff}}(s) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi l_{tr}} s^{3/2}} \left\{ z_s \exp \left[-\frac{3z_s^2}{4sl_{tr}} \right] + (z_s + 2z_0) \exp \left[-\frac{3(z_s + 2z_0)^2}{4sl_{tr}} \right] \right\} \quad (\text{IV.44})$$

avec z_s position de la source isotrope dans le milieu. On retient fréquemment $z_s = l_{tr}$ en disant qu'au bout d'une profondeur dans le milieu d'une longueur de transport, le rayonnement est quasi isotrope. L'introduction du filtre se fait alors en corrigeant la densité de probabilité en régime diffusif sur les chemins courts :

$$P_{\text{corr}}(s) = P_{\text{diff}}(s) \left[1 - f(g) \exp \left(-\frac{s}{l_{tr}} \right) \right] \quad \text{avec} \quad f(g) = \frac{3g}{2}. \quad (\text{IV.45})$$

L'expression de la fonction $f(g)$ est issue d'un ajustement (*fit* en anglais) avec des données expérimentales (ROJAS-OCHOA *et al.* 2004). Cette approche empirique, si elle est validée, est très intéressante en pratique.

Résultats numériques et expérimentaux

Paramètres numériques On choisit de tracer γ_{eff} en fonction du facteur d'anisotropie g pour $x' = -1/2$ fixé. La comparaison s'effectue entre les points expérimentaux et la formule de la DWS standard dont le flux est calculé en approximation de la diffusion, en approximation de la diffusion corrigée et en ETR. Les paramètres sont les suivants :

Paramètre	Description	Valeur
n_1	Indice optique du milieu 1	1.33
n_2	Indice optique du milieu 2	1.33
n_3	Indice optique du milieu 3	1.33
\mathcal{D}_B	Coefficient de diffusion brownien	$1.077 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
λ	Longueur d'onde incidente	532.00 nm
n_p	Indice complexe des particules	$1.59 + 1.00 \times 10^{-8}i$
n_h	Indice complexe du milieu hôte absorbant	1.33
n_{eff}	Indice effectif du milieu 2	1.339132
C	Concentration en particules	4.00 %
NA	Ouverture numérique pour le flux réfléchi	1.0

L'épaisseur du milieu est grande pour être dans les conditions d'un milieu semi-infini (i.e. $L = 1 \text{ m}$).

Paramètres réels Les paramètres ci-dessus sont les mêmes que pour l'expérience menée par Nasser ben BRAHAM dans l'équipe de Frank SCHEFFOLD *et al.* Dans cette dernière, le milieu diffusant contenu dans une cellule de dimensions $10 \times 5 \text{ mm}$ est immergé dans de l'eau pour éviter les réflexions aux parois et pour le maintenir à une température constante $T = 22^\circ \text{ C}$. C'est pour cette raison que les indices optiques des trois milieux sont les mêmes (i.e. $n_1 = n_2 = n_3 = 1.33$). La variation du facteur d'anisotropie est réalisée en faisant varier le diamètre des sphères de polystyrène d'indice réel 1.59 entre 110 nm et 990 nm (i.e. g varie entre 0.1 et 0.95). Le milieu est ainsi très opaque. Il est éclairé par un laser incident sous incidence normale de longueur d'onde $\lambda = 532 \text{ nm}$.

Résultats La figure IV.5 présente les résultats obtenus.

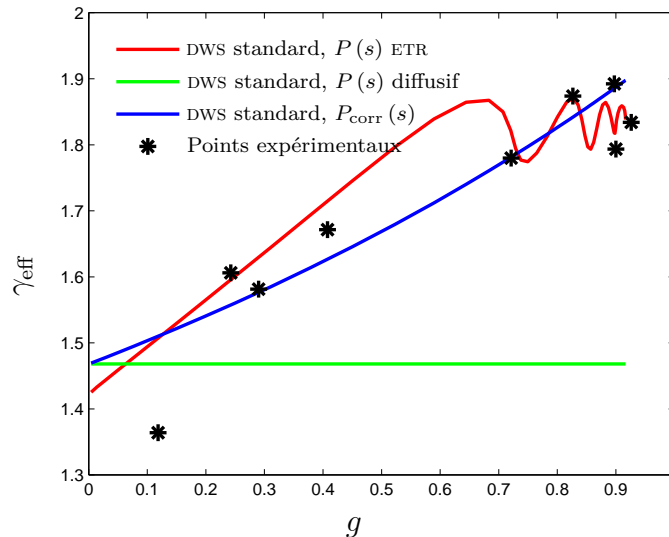


Fig. IV.5 – Tracé de la pente de la fonction de corrélation temporelle pour un milieu semi-infini en réflexion. Les oscillations visibles pour $g \rightarrow 1$ et reproduites également par les points expérimentaux correspondent en fait aux résonances de Mie, la différence de rayon entre chaque pic étant constante et égale à 82 nm.

Nous voyons clairement que la décroissance effective de g_1 dépend du facteur d'anisotropie g ce qui n'est pas pris en compte dans la théorie diffusive. En fait, le meilleur résultat est obtenu en utilisant l'ETR pour le calcul du flux. Notons que le calcul ETR et le calcul diffusif ne donnent pas le même résultat pour $g \rightarrow 0$ car les chemins courts ne sont pas bien décrits en approximation de la diffusion, qui plus est en réflexion.

Il est utile également de mentionner que γ_{eff} est quasi-independant de g pour $x \rightarrow 0$. En fait, dans le cas où $\tau \rightarrow 0$, on considère les larges s dans la transformée de LAPLACE que constitue l'expression de g_1 . Cela signifie que l'approximation de la diffusion est valide et que par conséquent γ_{eff} est une constante en g . Néanmoins, l'utilisation de l'approximation de la diffusion corrigée ne donne pas une constante. Il s'agit d'une limitation de cette théorie empirique : la correction censée corriger les chemins courts affecte également les chemins longs et procure des résultats incertains aux temps courts.

IV.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé la statistique des fluctuations temporelles de l'intensité réfléchie ou transmise par un milieu diffusant. Cette étude a permis de mettre en évidence des différences notables de comportements entre les régimes diffusifs et non-diffusifs. En particulier, une théorie plus précise de calcul de la fonction de corrélation a été élaborée à partir de l'ETR pour prendre en compte le régime de transport non-diffusif. Les calculs numériques de la fonction de corrélation en transmission ont montré des déviations importantes avec la théorie standard dans le cas de milieux diffusants de faible épaisseur.

Dans un deuxième temps, il a été montré que la décroissance temporelle de la fonction de corrélation en réflexion dépend fortement de l'anisotropie de la diffusion par les particules, ce qui n'est pas mis en évidence par la théorie standard de la DWS. L'utilisation de l'ETR décrit cette dépendance en bon accord avec les mesures expérimentales. De plus, une correction *ad-hoc* de la distribution des chemins en régime diffusif permet d'avoir une approche simple à mettre en œuvre dans les situations pratiques.

Tous ces résultats devraient permettre d'améliorer les techniques de diagnostics optiques dans la caractérisation de la matière molle ou l'imagerie biomédicale des tissus.

Deuxième partie

Émission de lumière en milieu diffusant

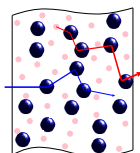
Chapitre V

Laser aléatoire avec rétroaction incohérente

Table des matières

V.1	Un modèle fondé sur l'ETR	83
V.1.1	Équation de relaxation	84
V.1.2	Équations de Transfert Radiatif	85
Faisceau pompe		85
Faisceau émis		85
V.1.3	Adaptation du modèle à la géométrie étudiée	86
V.2	Un problème complexe qu'il faut simplifier	87
V.3	Un seuil laser observable sous de nombreuses formes	88
V.3.1	Approximation à quatre flux	88
V.3.2	Méthode de MONTE-CARLO	90
V.3.3	Résultats numériques	91
Valeurs numériques		91
<u>Définition 1</u> : forte augmentation de l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe au-delà du seuil		92
<u>Définition 2</u> : oscillations temporelles de la densité de population des molécules fluorescentes excitées		93
<u>Définition 3</u> : rétrécissement spectral de l'intensité émise		93
<u>Définition 4</u> : pics de faible largeur spectrale dans le spectre de l'intensité émise		94
<u>Définition 5</u> : intensité d'émission en fonction du nombre de diffusions		96
V.3.4	Rôle de la diffusion dans un laser aléatoire	96
V.3.5	Conclusion	97
V.4	Une définition modale du seuil laser	97
V.4.1	Méthode modale	97
Du problème couplé vers une seule équation de transfert		98
Étude modale instationnaire en diffusion isotrope		99
Étude modale instationnaire en diffusion anisotrope		101
Étude en approximation de la diffusion		101

V.4.2	Recherche de l'albédo effectif en fonction de l'intensité de pompe	102
	Approximation monochromatique	102
V.4.3	Résultats numériques	103
	Valeurs numériques	103
	Détermination de l'intensité de pompe de seuil laser	104
	Détermination de l'albédo effectif de seuil par calcul numérique complet	105
	Détermination de l'albédo effectif de seuil par approche modale	105
	Comparaison des albédos effectifs pour différentes largeurs de milieu	106
	Distribution angulaire de la luminance d'émission	106
V.4.4	Conclusion	107
V.4.5	Remarque : étude modale stationnaire en diffusion isotrope	108
	Définition du coefficient de diffusion stationnaire en milieu amplificateur	110
V.5	Conclusion	111



L'émission de lumière dans des milieux fortement diffusants avec gain a tout d'abord été étudiée par LETOKHOV (LETOKHOV 1968). Pendant la dernière décennie, les lasers aléatoires (nom donné maintenant à ces systèmes) ont attiré une grande attention en particulier à cause de leur relation avec les problèmes fondamentaux de la diffusion multiple de lumière et leurs applications potentielles comme nouvelles sources de lumière (CAO 2003; NOGINOV 2005). Les lasers aléatoires sont habituellement divisés en deux catégories différentes, en fonction du mécanisme de rétroaction.

- Dans le régime de rétroaction incohérente (ou rétroaction en intensité), la diffusion augmente la longueur des chemins et la rétroaction est provoquée par un accroissement du temps de vie des photons dans le système. Il s'agit du cas traité dans ce travail. L'effet laser dans ce régime a été observé expérimentalement dans beaucoup de systèmes, comme des cristaux de poudres (GOUEDARD *et al.* 1993), des solutions de colorants contenant des microparticules (LAWANDY *et al.* 1994; PRASAD *et al.* 1997), des matériaux à l'état solide (NOGINOV 2005), des verres poreux infiltrés par une solution de colorants de cristaux liquides (WIERSMA et CAVALIERI 2001) ou des matériaux organiques et en particulier des tissus biologiques (POLSON et VARDENY 2004; POLSON et VARDENY 2005). Dans ce dernier cas et d'après les auteurs, le comportement spectral de l'effet laser peut être considéré comme une signature de la structure des tissus. En particulier, cela permettrait de discriminer les tissus sains de ceux cancéreux. Au-delà du seuil laser, tous ces systèmes présentent une émission amplifiée de largeur spectrale étroite (LAWANDY *et al.* 1994; PRASAD *et al.* 1997), des oscillations laser (GOUEDARD *et al.* 1993) et une statistique de photons poissonienne (ZACHARAKIS *et al.* 2000). Les études numériques et théoriques de ces systèmes ont surtout été développées en régime diffusif (WIERSMA et LAGENDIJK 1996; BERGER *et al.* 1997; BEENAKKER *et al.* 1996; BALACHANDRAN *et al.* 1997; BEENAKKER 1998; TOTSUKA *et al.* 2000; SOEST 2001; SOEST *et al.* 2001; FLORESCU et JOHN 2004; NOGINOV *et al.* 2004; NOGINOV *et al.* 2004; PINHEIRO et SAMPAIO 2006).
- Dans un régime où les effets d'interférences survivent au processus de diffusion aléatoire, une rétroaction cohérente (ou rétroaction en amplitude) est attendue, ce qui conduit à un comportement proche de celui observé dans les lasers conventionnels. Au premier abord, ce comportement est attendu lorsqu'on se rapproche du régime de localisation forte (localisation d'ANDERSON) (ANDERSON 1958). Des expériences dans cette direction ont été menées sur des poudres d'oxyde de zinc (CAO *et al.* 1999; CAO *et al.* 2000; MILNER et GENACK 2005). Des approches théoriques combinant désordre, modes de l'équation d'ondes (amplitude du champ) et gain ont été développées principalement à une puis deux dimensions (JIAND et SOUKOULIS 2000; VANNESTE et SEBBAH 2001; PATRA 2003; BURIN *et al.* 2001; BURIN *et al.* 2002).

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur les lasers aléatoires en régime de rétroaction en

intensité. Notre étude numérique et théorique a été motivée par deux observations.

- Tout d'abord, dans le cas de réalisations expérimentales de lasers aléatoires, le fait d'être dans le cas de rétroaction en intensité ou en amplitude semble être une question difficile à trancher. En effet, le spectre d'émission mesuré pour une impulsion de pompe envoyée dans un milieu contenant des microparticules de ZnO, TiO₂ ou SiO₂ montre des pics étroits, même loin du seuil de localisation estimé (i.e. $\lambda \sim l_s$) (MUJUMDAR *et al.* 2004; WU *et al.* 2006). Est-ce que l'existence de ces pics est une conséquence du gain exponentiel obtenu le long des très longs chemins de diffusion (MUJUMDAR *et al.* 2004) ou une conséquence de la rétroaction cohérente dans la limite de faible diffusion (WU *et al.* 2006; VANNESTE *et al.* 2007) ? Cela montre à quel point des questions fondamentales sur les lasers aléatoires doivent encore être clarifiées.
- Le concept de modes étendus amplifiés a été introduit pour discuter l'origine des pics d'émission étroits dans la limite du transport diffusif (MUJUMDAR *et al.* 2004). Un modèle pour les lasers aléatoires avec rétroaction incohérente a été introduit récemment dans le but d'aller au-delà d'un modèle purement diffusif (NOGINOV *et al.* 2004; NOGINOV *et al.* 2004; NOGINOV *et al.* 2006). Il est basé sur une approche unidimensionnelle et phénoménologique du transport de lumière. De notre côté, nous avons développé un modèle fondé sur l'ETR en trois dimensions. Ce modèle nous permet de prendre en compte les phénomènes de diffusion, émission, absorption de manière réaliste et de décrire correctement les différents régimes de transport (ballistique, diffusion simple, diffusion multiple, diffusif) (voir Chap. II). De plus, il nous permet de construire une théorie modale de l'effet laser en terme de modes de l'ETR moyennés sur le désordre. En tant que première illustration, nous montrons que ce modèle est capable de décrire le seuil laser au-delà de l'approximation de la diffusion (PIERRAT et CARMINATI 2007).

Dans toute la suite, nous considérons un milieu aléatoire composé d'un milieu hôte absorbant. La diffusion de la lumière et son amplification sont générées respectivement par des particules diffusantes et absorbantes et des molécules fluorescentes disposées aléatoirement dans le milieu et pompées optiquement (voir Fig. V.1).

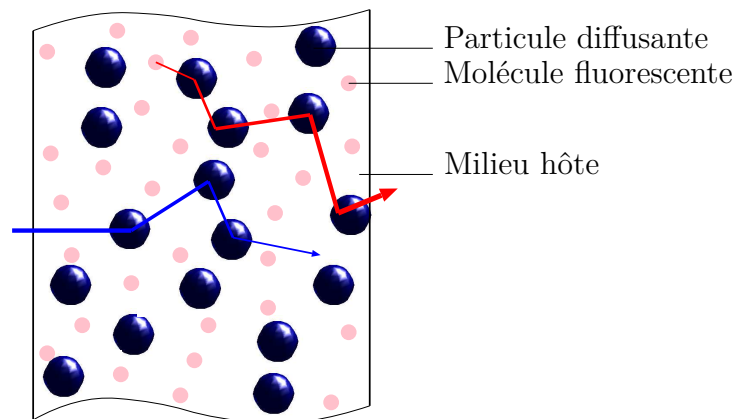


Fig. V.1 – Représentation schématique d'un milieu diffusant amplificateur. Les particules diffusent la lumière, les molécules fluorescentes pompées l'amplifient sur son trajet.

Un tel système est appelé laser aléatoire en vertu de ses propriétés similaires avec les lasers classiques, la cavité laser étant remplacée par le phénomène de diffusion dans le milieu. Le mécanisme est alors le suivant : par pompage optique, les molécules fluorescentes sont excitées et émettent alors spontanément. Cette émission peut ensuite être amplifiée par

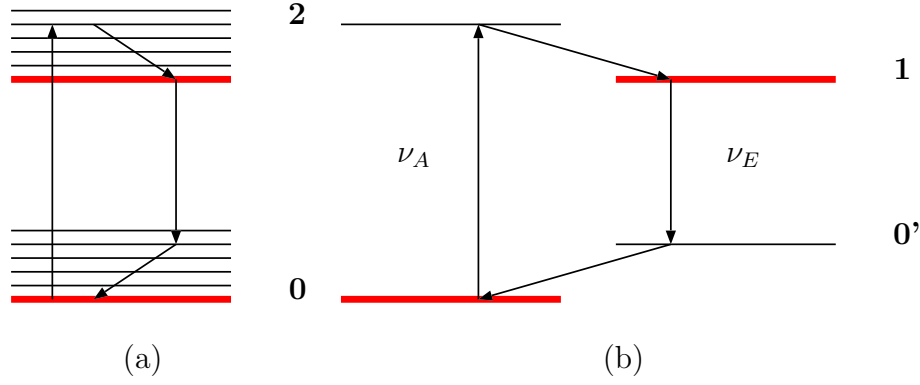


Fig. V.3 – La figure (a) est une représentation des niveaux moléculaires des molécules fluorescentes telles que la rhodamine 6G par exemple. Les niveaux électroniques sont tracés en rouge tandis que les sous-niveaux vibrationnels et rotationnels sont en noir. La figure (b) correspond au modèle à quatre niveaux retenu.

à la transition $1-0'$. Les grandeurs radiométriques sont indiquées pour séparer les différentes fréquences mises en jeu. On a ainsi pour la densité d'énergie radiative :

$$u_{A,E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{4\pi} L_{A,E}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\Omega \quad (\text{V.1})$$

où c est la vitesse de l'énergie dans le milieu, L étant la luminance.

V.1.1 Équation de relaxation

L'équation de relaxation régissant la densité de population du niveau 1 notée N_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = & B_{02} N_0(\mathbf{r}, t) u_A(\mathbf{r}, t) - A_{10'} N_1(\mathbf{r}, t) \int_{-\infty}^{\infty} g'(\nu) d\nu \\ & - B_{10'} \int_{-\infty}^{\infty} N_1(\mathbf{r}, t) u_E(\mathbf{r}, t, \nu) g(\nu) d\nu. \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

Si on note N_t la densité totale de population des niveaux, N_0 celle du niveau fondamental et N_1 celle du niveau excité, on a $N_0(\mathbf{r}, t) + N_1(\mathbf{r}, t) = N_t$. $A_{10'}$ est le coefficient d'EINSTEIN d'émission spontanée de l'état 1 à l'état $0'$. On pose alors $\tau_e = 1/A_{10'}$ comme étant la durée de vie radiative de l'état excité 1 . B_{02} est le coefficient d'EINSTEIN d'absorption entre les niveaux 0 et 2 , $B_{10'}$ est le coefficient d'EINSTEIN d'émission stimulée. Pour permettre la prise en compte des largeurs spectrales, on fait intervenir un profil de raie $g(\nu)$ sous la forme d'une lorentzienne de largeur à mi-hauteur $1/\pi\tau_e$, centrée sur la fréquence d'émission ν_E aussi bien pour l'émission spontanée que pour l'émission stimulée :

$$g(\nu) = \frac{1}{1 + 4\pi^2\tau_e^2(\nu - \nu_E)^2} \quad ; \quad g'(\nu) = 2\tau_e g(\nu) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} g'(\nu) d\nu = 1. \quad (\text{V.3})$$

On peut réécrire l'équation V.2 à partir de τ_e et des sections efficaces d'absorption σ_{abs} et d'émission stimulée σ_{em} des molécules. Dans ce cas, à la place de la densité d'énergie, on travaillera avec la densité de photons (densité d'énergie divisée par $h\nu$) pour laquelle on conservera la notation u . Cette convention est souvent utilisée dans les ouvrages traitant

de lasers. De même L ne sera plus la luminance car on conservera la relation V.1 entre u et L . L s'apparente alors à une fonction de distribution pour les photons. Néanmoins, nous parlerons toujours dans la suite de luminance, de flux, de puissance, d'énergie et de densité d'énergie. On obtient :

$$\frac{\partial N_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{\text{abs}} c [N_t - N_1(\mathbf{r}, t)] u_A(\mathbf{r}, t) - \frac{N_1(\mathbf{r}, t)}{\tau_e} - \sigma_{\text{em}} c \int_{-\infty}^{\infty} N_1(\mathbf{r}, t) u_E(\mathbf{r}, t, \nu) g(\nu) d\nu. \quad (\text{V.4})$$

Notons que la densité d'énergie (au sens densité de photons ici) $u_A(\mathbf{r}, t)$ s'exprime en m^{-3} alors que $u_E(\mathbf{r}, t, \nu)$ s'exprime en $\text{m}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$. De même, les luminances (au sens fonctions de distribution de photons ici) $L_A(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ et $L_E(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \nu)$ s'expriment respectivement en $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

V.1.2 Équations de Transfert Radiatif

Ici, il est nécessaire d'écrire une ETR pour chaque faisceau (pompe et émission) présent dans le problème.

Faisceau pompe

Le faisceau pompe correspond au faisceau incident sur le milieu. Il permet d'exciter les molécules fluorescentes. L'ETR pour ce faisceau s'écrit :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right) L_A(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = -\sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(\mathbf{r}, t)] L_A(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) - \mu_s L_A(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) L_A(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega'. \quad (\text{V.5})$$

Par rapport à la version classiquement utilisée, on a remplacé le terme d'absorption écrit à l'aide du coefficient μ_a par un nouveau terme d'absorption prenant en compte les densités de population des niveaux (on a négligé ici l'absorption intrinsèque du milieu). On rappelle que μ_s est le coefficient de diffusion et p la fonction de phase. En principe, les propriétés de diffusion μ_s et p dépendent de la fréquence du rayonnement mais nous supposons le milieu non dispersif, ces propriétés seront donc les mêmes pour toutes les fréquences. De plus, les sections efficaces d'absorption et d'émission stimulée dépendent de l'indice optique du milieu de propagation, ce qui n'est pas pris en compte dans cette étude.

Faisceau émis

Le faisceau émis correspond au rayonnement d'émission spontanée et qui peut aussi être amplifié par émission stimulée. L'ETR dans ce cas s'écrit :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right) L_E(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \nu) = -(\mu_a + \mu_s) L_E(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \nu) + \sigma_{\text{em}} g(\nu) N_1(\mathbf{r}, t) L_E(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t, \nu) + \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}', \mathbf{u}) L_E(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t, \nu) d\Omega' + \frac{1}{4\pi} \frac{N_1(\mathbf{r}, t)}{\tau_e} g'(\nu). \quad (\text{V.6})$$

Cette équation est écrite pour une fréquence particulière. La luminance d'émission a en fait un spectre qui dépend du milieu et du niveau de gain. La luminance L_E est créée par émission spontanée dont la présence dans l'ETR V.6 est modélisée par le terme source prenant en compte la durée de vie radiative τ_e . Cette émission est isotrope dans le milieu. La luminance étant une grandeur directionnelle, il est nécessaire de normaliser le terme d'émission spontanée par 4π stéradians. Ce rayonnement peut également être amplifié par émission stimulée ce qui est décrit par le terme proportionnel à σ_{em} . On remarquera que dans le cas de l'émission, nous avons conservé le terme d'absorption par le milieu intrinsèque.

V.1.3 Adaptation du modèle à la géométrie étudiée

La géométrie retenue ici est celle présentée au chapitre I (voir Sec. I.4) à savoir une tranche de milieu diffusant infinie selon les directions x et y et de largeur L selon la direction z . Le pompage optique de ce milieu peut se faire soit du côté du milieu **1** (par la gauche du milieu diffusant), soit du côté du milieu **3** (par la droite du milieu diffusant), soit des deux côtés à la fois sous incidence normale (voir figure V.4). Nous avons donc toujours les hypothèses d'indépendance des grandeurs par rapport à x et y et par rapport à l'angle φ (i.e. invariance par rotation autour de l'axe z).

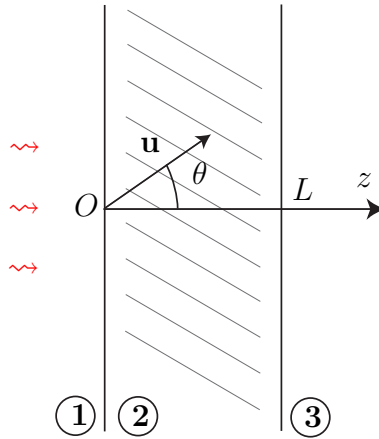


Fig. V.4 – Géométrie du système étudié : le milieu de gauche est noté **1**, le milieu diffusant est noté **2** et le milieu de droite est noté **3**. Sur l'exemple, le rayonnement pompe provient uniquement du milieu **1**.

Pour la luminance et la fonction de phase, on continuera à utiliser les relations suivantes (où $\mu = \cos \theta$) :

$$L(z, \mu, t) = \int_0^{2\pi} L(z, \mu, \varphi, t) d\varphi \quad (\text{V.7})$$

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \varphi - \varphi') d\varphi. \quad (\text{V.8})$$

On prendra soin de remplacer également les densités de photons $u_{A,E}$ par leurs expressions en fonction des fonctions de distributions de photons $L_{A,E}$. La densité de population N_1 s'écrira :

$$N_1(z, t) = N_1(\mathbf{r}, t). \quad (\text{V.9})$$

Pour la luminance de pompe, on peut séparer la partie collimatée de la partie diffuse ce qui permettra d'écrire facilement les conditions aux limites. En revanche, la notion de faisceau collimaté pour le rayonnement émis spontanément n'a pas d'utilité ici. On a :

$$L_A(z, \mu, t) = L_{Ac}^+(z, t) \delta(\mu - 1) + L_{Ac}^-(z, t) \delta(\mu + 1) + L_{Ad}(z, \mu, t) \quad (\text{V.10})$$

Les luminances L_{Ac}^+ et L_{Ac}^- correspondent au rayonnement de pompe se propageant selon l'axe z (faisceau collimaté) respectivement vers l'avant (i.e. vers les z croissants) et vers l'arrière (i.e. vers les z décroissants). La luminance L_{Ad} correspond quant à elle au rayonnement de pompe diffus.

C'est ainsi que l'équation de relaxation et les ETR des faisceaux pompes et émis deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t}(z, t) = & \sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(z, t)] (L_{Ac}^+ + L_{Ac}^-)(z, t) - \frac{N_1(z, t)}{\tau_e} + \int_{-1}^{+1} \left\{ \sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(z, t)] \right. \\ & \left. \times L_{Ad}(z, \mu, t) - \sigma_{\text{em}} N_1(z, t) \int_{-\infty}^{\infty} L_E(z, \mu, t, \nu) g(\nu) d\nu \right\} d\mu, \end{aligned} \quad (\text{V.11})$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right) L_{Ac}^{\pm}(z, t) = - [\sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z, t)) + \mu_s] L_{Ac}^{\pm}(z, t) \quad (\text{V.12})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L_{Ad}(z, \mu, t) = & - [\sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z, t)) + \mu_s] L_{Ad}(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \\ & \times L_{Ad}(z, \mu', t) d\mu' + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, 1) L_{Ac}^+(z, t) + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, -1) L_{Ac}^-(z, t), \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L_E(z, \mu, t, \nu) = & [\sigma_{\text{em}} g(\nu) N_1(z, t) - \mu_e] L_E(z, \mu, t, \nu) \\ & + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L_E(z, \mu', t, \nu) d\mu' + \frac{N_1(z, t)}{2\tau_e} g'(\nu). \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} L_{Ad,E}(0, \mu > 0, t) & = R_{21}(|\mu|) L_{Ad,E}(0, \mu < 0, t), \\ L_{Ad,E}(L, \mu < 0, t) & = R_{23}(|\mu|) L_{Ad,E}(L, \mu > 0, t), \end{cases} \quad (\text{V.15})$$

$$\begin{cases} L_{Ac}^+(0, t) & = R_{21}(\mu = 1) L_{Ac}^-(0, t) + T_{12}(\mu = 1) L_{A,\text{inc}}^+(t) & \text{faisceau pompe du milieu } \mathbf{1}, \\ L_{Ac}^-(L, t) & = R_{23}(\mu = 1) L_{Ac}^+(L, t) + T_{32}(\mu = 1) L_{A,\text{inc}}^-(t) & \text{faisceau pompe du milieu } \mathbf{3}. \end{cases} \quad (\text{V.16})$$

Les facteurs T_{ij} et R_{ij} sont les coefficients de FRESNEL respectivement de transmission et de réflexion en énergie (voir Chap. I).

V.2 Un problème complexe qu'il faut simplifier

Aussi puissantes soient les machines de calcul et les méthodes numériques, le modèle présenté ci-dessus est d'une grande complexité à résoudre, complexe de par la nature non-linéaire du système, le couplage des équations et l'intervention de grandeurs spatiales, temporelles, directionnelles et fréquentielles. La résolution du problème va donc inévitablement passer par sa simplification en fonction des effets physiques et des grandeurs que l'on souhaite observer.

Nous allons donc envisager différentes méthodes de calcul. En premier lieu, nous allons nous intéresser à une méthode classique de simplification de l'ETR dite à quatre flux couplée à un schéma de discrétisation par différences finies, le tout adapté au cas du système V.11, V.13 et V.14 étudié. Cette méthode nous permettra de visualiser l'effet du seuil laser sur l'intensité totale d'émission, la densité de population des molécules excitées et la largeur spectrale de l'intensité émise. Ensuite, une méthode de type MONTE CARLO nous renseignera plus finement sur le spectre de l'intensité émise de part et d'autre du seuil laser dans le cas non-moyenné sur un ensemble de réalisations d'expériences (c'est à dire pour une seule réalisation de pulse pompe incident).

Dans un second temps, nous évoquerons une méthode fondée sur une décomposition en modes de la luminance d'émission afin de quantifier l'intensité de pompe nécessaire à l'apparition du seuil laser. Cette méthode sera validée par des calculs numériques de résolution du système couplé V.11, V.13 et V.14 dans le cas où l'on néglige la largeur spectrale d'émission (approximation monochromatique) et à l'aide d'un schéma de discrétisation par différences finies également.

V.3 Un seuil laser observable sous de nombreuses formes

De nombreuses observations numériques du seuil laser ont déjà été évoquées dans la littérature, en particulier sur l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe (NOGINOV *et al.* 2004), sur le comportement temporel de la densité de population des molécules excitées (WIERSMA et LAGENDIJK 1996; NOGINOV *et al.* 2004) et sur la largeur spectrale de l'émission (BERGER *et al.* 1997; SOEST 2001). Des études ont également été réalisées plus précisément sur la structure spectrale de l'intensité émise pour un pulse de pompe donné (MUJUMDAR *et al.* 2004)

Afin de concilier tous ces résultats connus et de montrer qu'ils sont tous équivalents, nous avons développé d'une part, une méthode de résolution du problème couplé précédemment évoqué en utilisant une approximation à quatre flux et d'autre part une approche de type MONTE CARLO.

V.3.1 Approximation à quatre flux

Nous avons utilisé ici une méthode du type SCHUSTER-SCHWARZSCHILD en régime stationnaire.

On fait les mêmes hypothèses que pour une méthode à quatre flux de l'ETR classique et ce pour les deux luminances d'absorption et d'émission à savoir isotropie de la fonction de phase et décomposition de la luminance sur deux directions uniquement :

$$p(\mu', \mu) = 1 \quad L_{Ad,E}(z, \mu, t) = \begin{cases} L_{Ad,E}^+(z, t) & \text{si } \mu > 0 \\ L_{Ad,E}^-(z, t) & \text{si } \mu < 0 \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

On considère de plus que les indices optiques sont tous égaux et valent $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Il n'y aura donc pas de réflexions internes.

L'intérêt par rapport à l'utilisation de l'approximation de la diffusion (WIERSMA et LANGENDIJK 1996; TOTSUKA *et al.* 2000; MUJUMDAR *et al.* 2004) réside dans le fait que l'on conserve la composante collimatée du rayonnement de pompe. Toutes les inconnues ne dépendent alors que de z (espace), t (temps) et ν (fréquence). Par intégration sur la variable angulaire μ , les équations du laser aléatoire deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t}(z, t) = & \sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(z, t)] (L_{Ac}^+ + L_{Ac}^- + L_{Ad}^+ + L_{Ad}^-)(z, t) \\ & - \sigma_{\text{em}} N_1(z) \int_{-\infty}^{\infty} (L_E^+ + L_E^-)(z, t, \nu) g(\nu) d\nu - \frac{N_1(z)}{\tau_e}, \end{aligned} \quad (\text{V.18})$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z} \right) L_{Ac}^{\pm}(z, t) = - [\sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z)) + \mu_s] L_{Ac}^{\pm}(z, t) \quad (\text{V.19})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) L_{Ad}(z, t) = & - [\sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z)) + \mu_s] L_{Ad}(z, t) \\ & + \frac{\mu_s}{2} (L_{Ac}^+ + L_{Ac}^- + L_{Ad}^+ + L_{Ad}^-)(z, t), \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) L_E(z, t, \nu) = & [\sigma_{\text{em}} g(\nu) N_1(z) - \mu_e] L_E(z, t, \nu) + \frac{\mu_s}{2} (L_E^+ + L_E^-)(z, t, \nu) \\ & + \frac{N_1(z)}{2\tau_e} g'(\nu). \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Les conditions aux limites s'écrivent simplement :

$$\begin{cases} L_{Ad,E}^+(0, t) = 0 \\ L_{Ad,E}^-(L, t) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} L_{Ac}^+(0, t) = L_{A,\text{inc}}^+(t) \\ L_{Ac}^-(L, t) = L_{A,\text{inc}}^-(t) \end{cases} . \quad (\text{V.22})$$

Elles décrivent le fait qu'il n'y a pas de luminance diffuse de pompe ou d'émission entrante. La luminance collimatée de pompe est quant à elle donnée par la luminance incidente aux interfaces.

Le problème couplé étant non linéaire, nous ne pouvons pas le résoudre analytiquement. Nous allons alors faire appel à un schéma de discrétisation numérique par différences finies (MITCHELL 1969; MITCHELL et GRIFFITHS 1980) :

- Discrétisation spatiale : pour les équations régissant les luminances en L^+ , nous choisissons un schéma explicite décentré vers la « droite » et inversement pour les luminances en L^- . Si j est l'indice de discrétisation et Δz le pas, on a :

$$\frac{\partial L^+}{\partial z}(z_j) \approx \frac{L_j^+ - L_{j-1}^+}{\Delta z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial L^-}{\partial z}(z_j) \approx \frac{L_{j+1}^- - L_j^-}{\Delta z}. \quad (\text{V.23})$$

- Discrétisation temporelle : on choisit simplement un schéma explicite. Si k est l'indice de discrétisation et Δt le pas, on a :

$$\frac{\partial L}{\partial t}(t_k) \approx \frac{L_{k+1} - L_k}{\Delta t}. \quad (\text{V.24})$$

La fenêtre temporelle est définie par $t \in [t_-, t_+]$.

- Discrétisation fréquentielle : le calcul de l'intégrale sur les fréquences est fait par méthode des trapèzes sur une fenêtre définie à partir d'un seuil S (compris entre 0 et 1) :

$$\nu_{\pm} = \nu_e \pm \frac{1}{2\pi\tau_e} \sqrt{\frac{1-S}{S}} \quad ; \quad \nu \in [\nu_-, \nu_+] \quad ; \quad g(\nu_{\pm}) = Sg(\nu_e). \quad (\text{V.25})$$

Les discrétisations doivent vérifier la condition CFL (MITCHELL 1969; MITCHELL et GRIF-FITHS 1980) : $c\Delta t/\Delta z \leq 1$.

Finalement, les flux de sortie correspondant au rayonnement émis sont donnés par :

$$\phi_{E,\text{sort}}^+(t, \nu) = \int_0^1 L_E^+(L, t, \nu) \mu d\mu = \frac{1}{2} L_E^+(L, t, \nu) \text{ en } \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}, \quad (\text{V.26})$$

$$\phi_{E,\text{sort}}^-(t, \nu) = \int_{-1}^0 L_E^-(0, t, \nu) \mu d\mu = \frac{1}{2} L_E^-(0, t, \nu) \text{ en } \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}. \quad (\text{V.27})$$

V.3.2 Méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de MONTE CARLO sont des méthodes statistiques de résolution d'équations par calcul d'intégrales. Dans le cas de l'ETR, elles décrivent l'histoire des photons effectuant une marche aléatoire dans le milieu diffusant (émission, propagation, diffusion, absorption) (voir Ann. J). Elles sont donc assimilables à un calcul numérique de marche au hasard. Habituellement, dans le cas d'un milieu absorbant, la méthode de MONTE CARLO converge. Nous allons voir qu'il n'en va pas de même dans le cas amplificateur étudié ici. En particulier, la méthode de MONTE CARLO ne sera pas ici une méthode de résolution de l'ETR mais bien une méthode permettant d'obtenir de l'information sur une réalisation d'expérience (envoi d'un seul et unique pulse de pompe à travers un milieu diffusant et amplificateur).

La mise en œuvre nécessite la connaissance de toutes les propriétés radiatives du milieu. Dans notre cas, ces propriétés évoluent au cours du temps en fonction de la dynamique de l'excitation des molécules fluorescentes. Il s'agit donc d'adapter la méthode classique à notre problème couplé non-linéaire.

La complexité du problème nous amène à faire l'hypothèse de découplage du pompage des molécules fluorescentes et du phénomène d'émission qui s'en suit. Nous allons voir dans quel cas cette hypothèse est vérifiée. Nous allons ici n'exposer que les spécificités de la méthode au cas du problème de modélisation des lasers aléatoires. Pour la démarche classique de l'étude numérique du transfert radiatif par méthode de MONTE CARLO, on se reportera à l'annexe J.

Considérons tout d'abord la propagation de l'énergie de pompe dans le milieu. Pour cela, discrétisons le milieu diffusant en tranches d'épaisseur Δz petite devant les échelles caractéristiques du problème (longueur de diffusion l_s , taille du milieu L). Pour un tir donné

et en supposant qu'à l'entrée d'une tranche, on dispose de l'énergie surfacique E , l'énergie absorbée par les molécules fluorescentes en traversant la tranche sera :

$$\Delta E = E \left\{ 1 - \exp \left[-\sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z)) \frac{\Delta z}{|\mu|} \right] \right\} \approx E \sigma_{\text{abs}} (N_t - N_1(z)) \frac{\Delta z}{|\mu|} > 0 \quad (\text{V.28})$$

où μ est toujours le cosinus de l'angle entre le rayon et l'axe z . Il suffit donc de mettre à jour immédiatement la densité de population des molécules excitées. Elle sera alors donnée par :

$$\Delta N_1(z) = \frac{\Delta E}{\Delta z} > 0. \quad (\text{V.29})$$

Ensuite le faisceau continue son chemin dans le milieu, de tranches en tranches.

Dans le cas de l'émission, la première étape consiste à faire émettre une molécule du milieu de manière isotrope. Pour cela, il est nécessaire de faire intervenir la dynamique du système. On décide alors de définir un intervalle de temps δt , choisi de telle sorte qu'il soit bien plus petit que les temps caractéristiques de transport dans le système (temps de vol balistique $t_{\text{vol}} = L/c$, temps de diffusion $t_{\text{diff}} = L^2/\mathcal{D}$) et pendant lequel nous faisons un tir d'émission spontanée. Nous savons que la puissance émise par émission spontanée seule décroît exponentiellement dans le temps (d'où le profil de raie lorentzien). Sous forme discrétisée, l'énergie surfacique disponible pour le tir sera alors dans une tranche :

$$E = N_1(z) \Delta z [1 - \exp(-\delta t/\tau_e)]. \quad (\text{V.30})$$

La variation de densité de population sera alors :

$$\Delta N_1(z) = \frac{E}{\Delta z} < 0. \quad (\text{V.31})$$

Ensuite, le phénomène d'émission stimulée sera géré de la même manière que l'absorption. En supposant qu'à l'entrée d'une tranche on ait à notre disposition l'énergie surfacique E , le différentiel d'énergie surfacique au travers de la tranche sera donné par :

$$\Delta E = E \left\{ 1 - \exp \left[(\sigma_{\text{em}} N_1(z) - \mu_a) \frac{\Delta z}{|\mu|} \right] \right\} \approx \underbrace{-E \sigma_{\text{em}} N_1(z) \frac{\Delta z}{|\mu|}}_{=\Delta E'} + \underbrace{E \mu_a \frac{\Delta z}{|\mu|}}_{=\Delta E''} < 0. \quad (\text{V.32})$$

La part absorbée par le milieu intrinsèque $\Delta E''$ est bien sûr beaucoup plus faible que la part amplifiée par les molécules fluorescentes $\Delta E'$. La variation de densité de population sera alors :

$$\Delta N_1(z) = \frac{\Delta E'}{\Delta z} < 0. \quad (\text{V.33})$$

Ensuite le faisceau d'émission continue son chemin dans le milieu, de tranches en tranches.

Valeurs numériques	
$L_{A,\text{inc}}^+ \in [2.13 \times 10^{20}, 2.13 \times 10^{31}] \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$	$L_{A,\text{inc}}^- \in [2.13 \times 10^{20}, 2.13 \times 10^{31}] \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
$T_{1/2} = 14 \text{ ns}$	$\tau_e = 3.2 \times 10^{-6} \text{ s}$
$\sigma_{\text{abs}} = 3.00 \times 10^{-24} \text{ m}^2$	$\sigma_{\text{em}} = 3.00 \times 10^{-23} \text{ m}^2$
$\lambda_A = c/\nu_A = 532 \text{ nm}$	$S = 10 \%$
$N_t = 1.6 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$	$a = 1$
$n_1 = n_3 = 1.00$	$n_2 = 1.33$
$l_s = 1/\mu_s = 100 \text{ }\mu\text{m}$	$L = 1 \text{ mm}$
$t_- = -20 \text{ ns}$	$t_+ = 100 \text{ ns}$
$\Delta z = 2 \times 10^{-5} \text{ m}$	$\Delta t = 6 \times 10^{-15} \text{ s}$
$\Delta \nu = 2.98 \times 10^3 \text{ Hz}$	$\delta t = 10^{-13} \text{ s}$

Tab. V.1 – Valeurs numériques retenues pour modéliser un laser aléatoire formé d'une poudre de Ti:saphire.

V.3.3 Résultats numériques

Valeurs numériques

On considère un milieu diffusant contenant une poudre de Ti:saphire. Pour la simulation qui suit, nous avons retenu les valeurs numériques utilisées dans (WIERSMA et LAGENDIJK 1996). Le tableau V.1 résume les propriétés de ce milieu.

Nous choisissons un profil gaussien pour la forme temporelle de l'impulsion de pompe sous la forme :

$$L_{A,\text{inc}}^\pm(t) = L_{A,\text{inc}}^\pm \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right) \text{ avec } T = \frac{T_{1/2}}{2\sqrt{\ln 2}} \quad (T_{1/2} \text{ étant la largeur à mi-hauteur}). \quad (\text{V.34})$$

Le pompage a lieu de manière identique des deux côtés de la couche de milieu diffusant. Pour le calcul par méthode de MONTE CARLO, nous avons besoin de l'énergie surfacique de pompe qui sera donnée par :

$$E_{A,\text{inc}}^\pm = \int_{-\infty}^{\infty} L_{A,\text{inc}}^\pm(t) dt = \frac{L_{A,\text{inc}}^\pm T_{1/2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \in [3.17 \times 10^{12} \text{ m}^{-2}, 3.17 \times 10^{23} \text{ m}^{-2}] \quad (\text{V.35})$$

Les sections qui suivent donnent cinq formulations différentes du seuil laser. On montre ainsi qu'elles sont toutes cohérentes entre-elles. Les trois premières définitions sont issues de résultats obtenus avec un calcul numérique en approximation à quatre flux, les deux dernières provenant des résultats de la méthode de MONTE CARLO.

Définition 1 : forte augmentation de l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe au-delà du seuil

La figure V.5 donne le tracé de l'intensité d'émission en fonction de celle de la pompe. On remarque nettement une cassure dans la courbe (quatrième point sur la figure en partant de

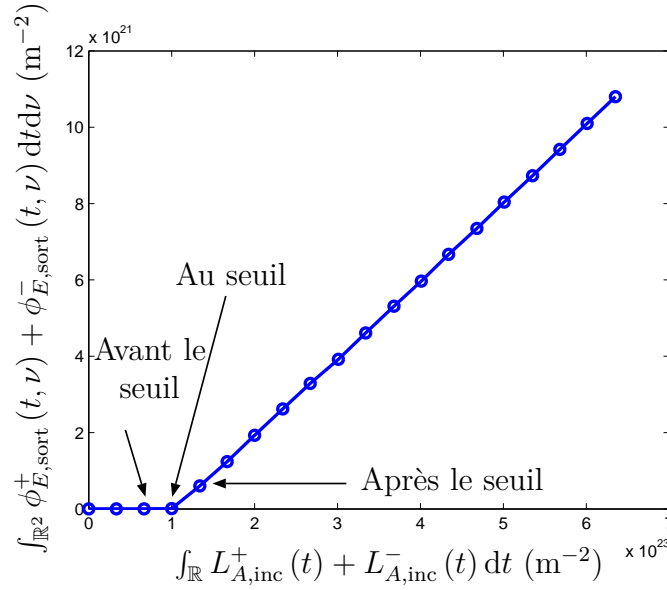


Fig. V.5 – Tracé de l'intensité d'émission totale sortant du milieu en fonction de l'intensité de pompe totale. Afin d'obtenir le flux total d'émission, on effectue des intégrations temporelles et fréquentielles du flux respectivement sur les fenêtres $t \in [t_-, t_+]$ et $\nu \in [\nu_-, \nu_+]$. Les paramètres sont définis dans le tableau V.1. Le pompage s'effectue de manière identique de chaque côté du milieu. Dans la suite, on s'intéresse aux intensités de pompe représentées par les trois flèches (avant le seuil, au seuil, après le seuil).

la gauche) ce qui permet de définir un seuil laser très facilement. C'est la définition standard du seuil dans un laser aléatoire. Elle fut déjà évoquée numériquement à l'aide d'un modèle couplant une équation de relaxation à une équation de transport phénoménologique à une dimension (NOGINOV *et al.* 2004).

Dans la suite, nous allons comparer différentes grandeurs comme la densité de population des molécules excitées et le profil du spectre d'émission juste avant le seuil (troisième point sur la figure en partant de la gauche, intensité de pompe $L_{A,\text{inc}}^\pm = 2.24 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$), au seuil (quatrième point, intensité de pompe $L_{A,\text{inc}}^\pm = 3.36 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) et juste après le seuil (cinquième point, intensité de pompe $L_{A,\text{inc}}^\pm = 4.48 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$). Ces comparaisons vont nous permettre de mettre en évidence la cohérence qui existe entre toutes ces observations du seuil laser.

Définition 2 : oscillations temporelles de la densité de population des molécules fluorescentes excitées

La figure V.6 représente la densité de population N_1 du niveau excité en fonction du temps. On voit nettement apparaître des oscillations au delà du seuil laser défini à la sous-section V.3.3, oscillations caractéristiques du phénomène de « laser spiking ». En effet, sous l'action du faisceau de pompe, les molécules s'excitent ce qui engendre une augmentation de N_1 et le passage au-dessus du seuil puis se désexcitent ensuite sous l'action de l'émission spontanée d'où une diminution de N_1 et un passage en-dessous du seuil. Il s'ensuit une réaugmentation de N_1 par pompage et ainsi de suite. Ce phénomène n'a lieu qu'aux temps courts, c'est à dire au moment où le faisceau de pompe est présent dans le milieu. Pour les temps longs, quand le faisceau de pompe est totalement éteint, on distingue la lente

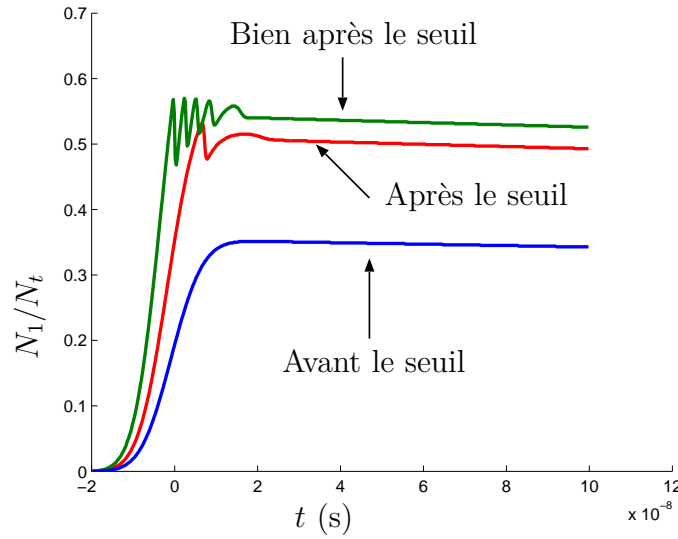


Fig. V.6 – Densité de population N_1 du niveau excité en fonction du temps pour trois niveaux de pompe différents : $L_{A,inc}^{\pm} = 2.24 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (courbe bleue, avant le seuil), $L_{A,inc}^{\pm} = 4.48 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (courbe rouge, après le seuil) et $L_{A,inc}^{\pm} = 8.97 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (courbe verte, bien après le seuil). Les paramètres sont définis dans le tableau V.1. Le pompage s'effectue de manière identique de chaque côté du milieu.

désexcitation exponentielle selon la durée de vie radiative τ_e .

Ce phénomène n'est bien entendu possible que pour des puissances de pompe suffisamment importantes, c'est à dire au-delà du seuil. S'il est bien connu dans les lasers classiques, il a déjà été évoqué dans le cadre des lasers aléatoires à partir de modèles basés sur l'approximation de la diffusion (WIERSMA et LAGENDIJK 1996) ou sur une équation de transport phénoménologique à une dimension (NOGINOV *et al.* 2004).

Définition 3 : rétrécissement spectral de l'intensité émise

La figure V.7 représente les profils de raies d'émission pour différents niveaux d'intensité de pompe. On remarque un rétrécissement spectral une fois le seuil laser dépassé. En effet, si on raisonne en terme de marche aléatoire, sous l'hypothèse de gain uniforme ($N_1 = Cte$), on remarque que pour un chemin de longueur l donné, nous avons une amplification donnée par $\exp[\sigma_{em} N_1 g(\nu) l]$. Le profil de raie de l'émission amplifiée est donc donné par l'exponentielle du profil de raie de l'émission spontanée. Plus l'énergie de pompe augmente, plus la densité de molécules excitées N_1 augmente et donc plus la largeur du profil de raie d'émission diminue.

À partir d'un calcul de type MONTE CARLO à une dimension sur des cellules de taille $l_s/2$, ce mécanisme est déjà évoqué dans les travaux de l'équipe de GENACK (BERGER *et al.* 1997). Courbes expérimentales à l'appui, SOEST parle également de cet effet (SOEST 2001).

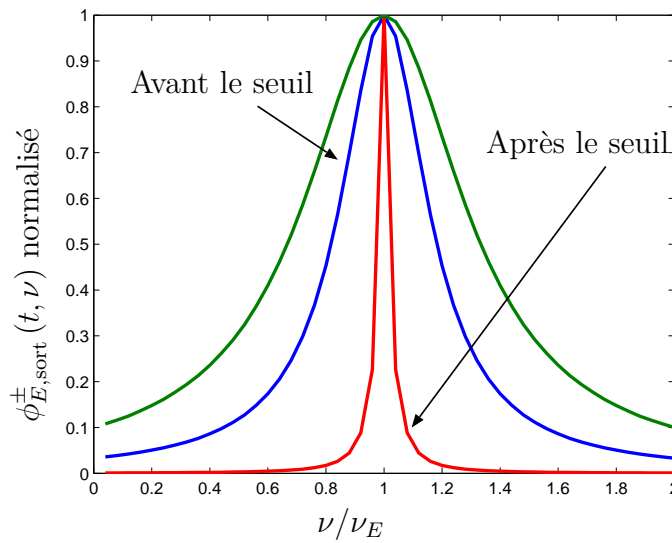


Fig. V.7 – Profils de raies de l'intensité émise d'un des deux côtés du milieu (il y a symétrie, le pompage s'effectuant de manière identique de chaque côté du milieu). La courbe verte est le profil lorentzien d'émission spontanée $g(\nu)$. Les courbes bleue et rouge correspondent respectivement au profil d'émission au temps $t = 28$ ns pour une intensité de pompe de $L_{A,inc}^{\pm} = 2.24 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (avant le seuil) et $L_{A,inc}^{\pm} = 4.48 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (après le seuil) respectivement. Les paramètres sont définis dans le tableau V.1.

Définition 4 : pics de faible largeur spectrale dans le spectre de l'intensité émise

La figure V.8 représente les profils de raies pour différents niveaux de pompe. En plus du rétrécissement spectral déjà évoqué ci-dessus, le tracé laisse apparaître des pics étroits de différentes amplitudes et de fréquences centrales aléatoires au-delà du seuil laser. Une autre réalisation du calcul donnerait une structure identique mais pour des positions et tailles de pics différentes.

La mise en évidence expérimentale et l'explication de la présence de ces pics spectraux étroits a été donnée par WIERSMA (MUJUMDAR *et al.* 2004). Ils sont dus à l'existence de rares mais très longs chemins dans le milieu. Un événement d'émission spontanée à la fréquence ν est amplifiée exponentiellement le long d'un chemin. Plus le chemin est long, plus l'amplification est importante de telle sorte qu'il apparaît des pics d'émission très étroits sur le spectre de l'intensité dans le cas des chemins les plus longs. Bien entendu, l'existence d'un long chemin pour un événement d'émission spontanée est aléatoire. On comprend alors pourquoi le fait de réaliser un autre calcul, donnerait des pics différents. Il faudrait de très nombreux calculs pour aboutir à une situation moyennée où l'on retrouverait le résultat de la figure V.7, c'est à dire un profil de raie régulier faisant apparaître un rétrécissement au delà du seuil laser. En ce sens, dans le cas d'un milieu amplificateur, la méthode de MONTE CARLO ne converge pas vers la solution de l'ETR mais donne bien un résultat pour un pulse de pompe.

En plus de calculs basés sur la méthode de MONTE CARLO pour l'approximation de la diffusion et à partir desquels elle montre un résultat semblable au nôtre, l'équipe de WIERSMA a réalisé une série d'expériences montrant l'existence de ce phénomène (MUJUMDAR *et al.* 2004) dans le cas de poudres de Ti:Saphire.

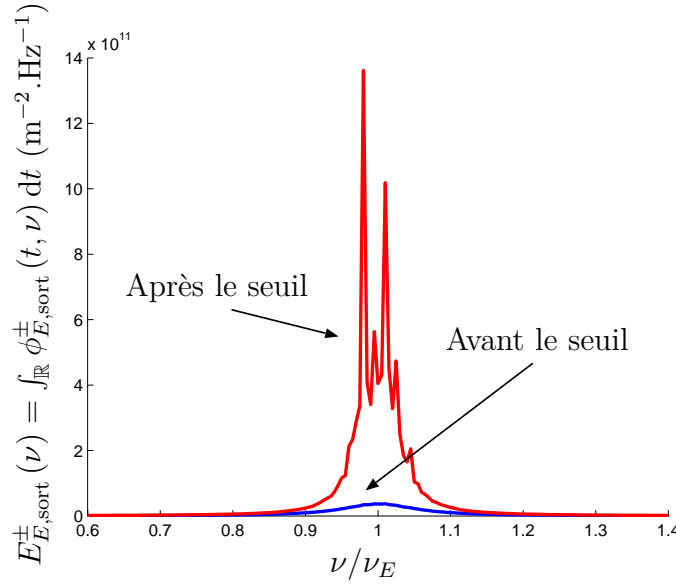


Fig. V.8 – Profils de raies de l'intensité d'émission pour un des deux côtés du milieu (il y a symétrie, le pompage s'effectuant de manière identique de chaque côté du milieu) calculés à partir d'une méthode de type MONTE CARLO. Les courbes bleue et rouge correspondent respectivement au profil de l'intensité d'émission intégrée sur le temps (fenêtre de 1 μ s) pour une intensité pompe de $L_{A,inc}^{\pm} = 2.24 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ et $L_{A,inc}^{\pm} = 4.48 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$. Les paramètres sont définis dans le tableau V.1.

De tels pics ont également été visualisés dans des tissus biologiques imbibés de molécules de rhodamine 6G (POLSON et VARDENY 2004; POLSON et VARDENY 2005). L'explication avancée est alors différente, elle fait intervenir un effet de rétroaction cohérente : par diffusion, des chemins fermés peuvent se former dans le milieu diffusant, on les appelle boucles. Dans le cas où la longueur l d'une boucle est un multiple de la longueur d'onde λ , un phénomène d'interférence constructive a lieu. Comme le milieu est également amplificateur, le rayonnement est amplifié au fur et à mesure qu'il parcourt inlassablement la boucle ce qui fait apparaître un pic sur le spectre de l'intensité émise. Aussi, si la structure du milieu change, les boucles ne seront plus les mêmes et donc les fréquences pour lesquelles des pics apparaissent non plus. C'est ainsi que le spectre d'émission obtenu par POLSON est très différent dans le cas d'un tissu sain présentant peu d'hétérogénéités et d'un tissu cancéreux possédant une structure beaucoup plus complexe. Quel que soit le mécanisme physique mis en jeu (effet des chemins longs ou localisation d'ANDERSON), ce résultat constitue une véritable signature de la structure d'un tissu biologique.

Définition 5 : intensité d'émission en fonction du nombre de diffusions

La figure V.9 représente la distribution de l'intensité d'émission en fonction du nombre d'événements de diffusion. Ce résultat obtenu par méthode de MONTE CARLO est directement relié au précédent et son interprétation est identique. Au-delà du seuil laser, de rares et longs chemins apparaissent. Au contraire d'un milieu absorbant, dans le cas d'un milieu amplificateur, ces chemins sont prépondérants, l'intensité qui les parcourt étant amplifiée exponentiellement. On remarque ainsi qu'au delà du seuil laser, la distribution de l'intensité émise devient croissante en fonction du nombre d'événements de diffusion (voir Fig. V.9 (b)),

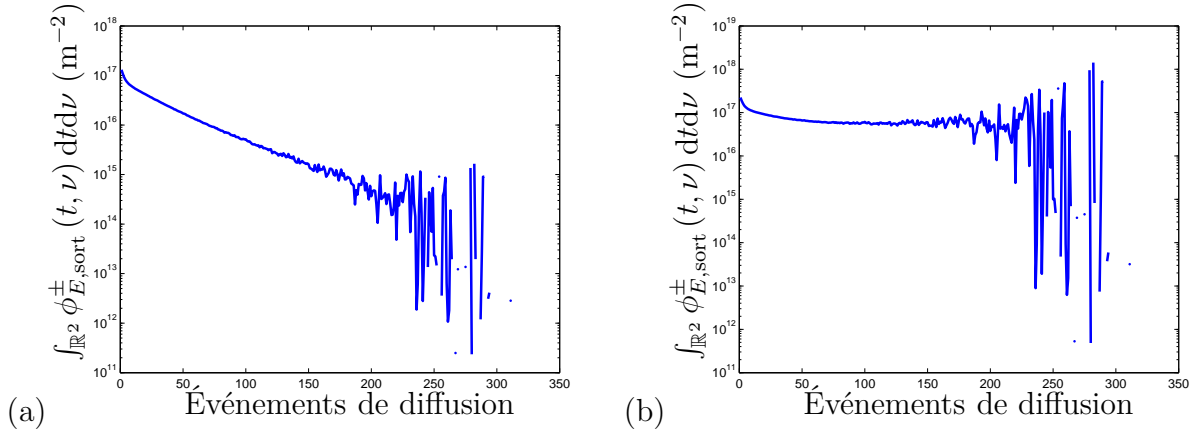


Fig. V.9 – Distributions d'intensité d'émission calculées à partir d'une méthode de type MONTE CARLO en fonction du nombre de diffusions. Le résultat est donné pour un des deux côtés du milieu, le comportement étant identique pour le côté opposé puisqu'il y a pompage des deux côtés. Les figures (a) et (b) correspondent respectivement à la distribution d'intensité d'émission pour une intensité de pompe de $L_{A,inc}^{\pm} = 2.24 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (avant le seuil) et $L_{A,inc}^{\pm} = 4.48 \times 10^{30} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (après le seuil). Les paramètres sont définis dans le tableau V.1. L'intégration temporelle du flux s'effectue sur un temps de $1 \mu\text{s}$.

alors qu'elle est décroissante avant le seuil (voir Fig. V.9 (a)). Ce résultat est identique à celui exposé par l'équipe de WIERSMA (MUJUMDAR *et al.* 2004).

V.3.4 Rôle de la diffusion dans un laser aléatoire

Comme nous venons de le voir, le seuil laser semble conditionné par l'existence de chemins longs au sein du milieu diffusant. Dès lors et afin de bien rendre compte de l'importance du phénomène de diffusion dans un laser aléatoire (en particulier en guise de remplacement de la cavité des lasers classiques), nous avons réalisé la même série de calculs mais en supprimant totalement la diffusion $\mu_s = 0$. À chaque fois, il n'était plus possible de visualiser de seuil laser. Cependant, en mettant en place des réflexions sur les parois du milieu, un seuil était de nouveau visible mais il s'agit dans ce cas d'un fonctionnement se rapprochant de celui d'un laser classique à colorant (sans prendre toutefois en compte les effets cohérents, primordiaux dans ce type de laser, puisque le calcul s'effectue à l'aide d'équations de transport).

V.3.5 Conclusion

Dans cette première partie sur les lasers aléatoires, nous avons montré la possibilité de définir un seuil laser avec rétroaction incohérente. En particulier, nous avons montré que les différentes approches déjà existantes sont toutes cohérentes entre-elles. L'originalité de cette partie réside également dans le fait que nous avons obtenu tous ces résultats à partir d'un modèle plus fin que ceux existants basé sur un couplage entre l'équation de relaxation et l'ETR. En effet, la plupart des autres modèles se basent sur une approche phénoménologique à une dimension (NOGINOV *et al.* 2004) ou l'approximation de la diffusion (MUJUMDAR *et al.* 2004). Dans la deuxième partie, nous allons quantifier le seuil laser à partir d'une

approche modale de l'ETR. Nous verrons que cette approche permet de localiser le seuil laser au-delà des prédictions de l'approximation de la diffusion.

V.4 Une définition modale du seuil laser

Dans cette section, nous montrons qu'il est possible de définir le seuil laser à l'aide d'une décomposition modale de la luminance. Dans un premier temps, nous présentons la théorie de cette approche. Puis nous évoquerons la méthode de calcul numérique permettant de comparer l'approche modale à la solution complète du problème du laser aléatoire.

V.4.1 Méthode modale

L'étude modale est fondée sur la décomposition en modes propres de l'ETR (CASE et ZWEI-FEL 1967). Il est important de noter que nous développons ici une méthode modale pour un système moyenné. Il ne s'agit pas d'une méthode permettant de décrire une résolution particulière du système désordonné.

Du problème couplé vers une seule équation de transfert

L'idée de la méthode modale consiste à trouver le moyen de s'affranchir de la complexité du problème couplé (représenté par les équations V.11, V.13 et V.14) pour ne conserver qu'une seule ETR faisant intervenir un coefficient amplificateur uniforme et constant. Ainsi, pour le faisceau d'émission (en omettant l'indice E pour la luminance d'émission), nous avons :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L(z, \mu, t) = - \underbrace{\mu_a L(z, \mu, t)}_{\substack{\text{absorption intrinsèque} \\ \text{au milieu}}} - \mu_s L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L(z, \mu', t) d\mu' + \underbrace{\sigma_{em} N_1(z, t) L(z, \mu)}_{\text{émission stimulée}}. \quad (\text{V.36})$$

Considérer l'excitation des molécules comme uniforme et constante revient dans l'équation précédente à retenir $N_1 = \text{Cte}$ pour tout z et pour tout t . Ces hypothèses seront vérifiées *a posteriori* lors de la comparaison de l'approche modale avec le calcul numérique. L'ETR peut alors se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L(z, \mu, t) = - \underbrace{[(\mu_a - \sigma_{em} N_1) + \mu_s]}_{=\mu'_a < 0} L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L(z, \mu', t) d\mu'. \quad (\text{V.37})$$

Il apparaît un coefficient d'absorption effectif μ'_a qui est négatif (gain). On fait l'hypothèse que $|\mu_a - \sigma_{em} N_1| < \mu_s$ avec $\mu'_a < 0$, ce qui permet de définir un albédo effectif a' donné par :

$$a' = \frac{\mu_s}{\mu'_a + \mu_s} \quad \text{et alors } a' > 1. \quad (\text{V.38})$$

Le coefficient d'extinction effectif sera alors donné par $\mu'_e = \mu'_a + \mu_s$ et l'épaisseur optique effective sera $L^* = \mu'_e L$. Si $\mu_a = 0$ (pas d'absorption intrinsèque du milieu), le coefficient d'absorption effectif est alors directement l'opposé du coefficient de gain : $\mu'_a = -\mu_g$. Dans toute la suite, on retiendra $\mu_a = 0$ mais cela ne change rien à la généralité.

En conclusion, nous avons affaire au même type d'équation que dans un milieu absorbant et diffusant mais avec un albédo effectif plus grand que 1 : $a' > 1$. C'est un milieu avec gain. L'albédo effectif est relié à l'intensité de pompe dans le milieu. Cette relation n'est pas triviale et nécessitera une résolution numérique. On peut néanmoins retenir que plus l'intensité de pompe sera élevée et plus l'albédo effectif sera supérieur à 1. L'unique ETR pourra être tout naturellement résolue par la méthode des ordonnées discrètes dans le cas d'une géométrie plane (voir Ann. C). Numériquement, la méthode permettra également d'obtenir les informations sur les modes propres de l'ETR en présence de gain.

L'étude modale de l'équation V.37 et son lien avec le seuil laser vont maintenant être présentés tout d'abord dans le cas d'une indicatrice de diffusion isotrope, puis étendu au cas anisotrope, ce dernier ne pouvant être résolu que numériquement. Ensuite, nous aborderons le cas du régime diffusif pour lequel un résultat intéressant peut être déduit. Nous montrerons en fin de chapitre qu'il est possible de retrouver l'ensemble de ces résultats en étudiant les modes de l'ETR en régime stationnaire (voir Sec. V.4.5).

Étude modale instationnaire en diffusion isotrope

Dans le cas de la diffusion isotrope, l'étude modale peut s'effectuer de manière analytique (CASE et ZWEIFEL 1967) (voir Ann. E). Retenons une fonction de phase constante ($p(\mu', \mu) = 1$). L'équation V.37 devient :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) L(z, \mu, t) = -\mu'_e L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu', t) d\mu'. \quad (\text{V.39})$$

Cherchons maintenant un mode propre de cette équation sous la forme (voir Chap. III) :

$$L(z, \mu, t) = G_{ks}(\mu) \exp [ikz + s(k)t]. \quad (\text{V.40})$$

Cette forme est obtenue par transformée de FOURIER spatiale de la luminance (k est ainsi réel, on superpose les modes spatiaux). À k fixé, s est une valeur propre temporelle de l'ETR, elle peut prendre des valeurs complexes. $G_{ks}(\mu)$ est le vecteur propre associé, il ne dépend que de la direction μ .

Localiser le seuil laser revient à rechercher les conditions sur k pour que la partie réelle de $s(k)$ soit positive est ainsi avoir une intensité qui diverge exponentiellement temporellement.

En posant $\mu'_e + s(k)/c = ik\alpha'$, on en déduit la structure du mode (voir Ann. E) :

$$G_{ks}(\mu) = \text{VP} \left[\frac{\mu_s}{2ik(\alpha' + \mu)} \right] + \lambda(\alpha') \delta(\alpha' + \mu) \quad (\text{V.41})$$

où VP désigne la valeur principale, δ la distribution de DIRAC et où λ est une fonction quelconque de α' .

- si $\alpha' \in]-1, 1[$, alors $\alpha' \in \mathbb{R}$. D'après la définition de α' , on a $\mathcal{R}[s(k)] = -1$. Or, pour être au-delà du seuil laser, il faut que la partie réelle de $s(k)$ soit positive. Il est donc impossible d'avoir un seuil laser dans ce cas.

- si $\alpha' \notin]-1, 1[$, $\alpha' + \mu \neq 0$. On montre alors que pour k fixé, il n'existe qu'une paire de valeurs propres temporelles $\pm s_0$ définies par (voir Ann. E) :

$$s_0(k) = -\mu'_e c + \frac{kc}{\tan(k/\mu_s)} \quad \text{pour} \quad |k| < \frac{\pi\mu_s}{2}. \quad (\text{V.42})$$

À noter que k est réel et ainsi s_0 l'est également. Rechercher la valeur de k pour laquelle s_0 devient positive revient à rechercher la taille L du milieu au delà de laquelle le système passe le seuil laser, si on pose que le mode prépondérant correspond à $k = \pi/L$ (propriété de la transformée de FOURIER). Cette longueur limite L devient alors la longueur critique et est notée l_{cr} (LETOKHOV 1968; WIERSMA et LAGENDIJK 1996; CAO 2003). Ainsi, de manière exacte, elle est donnée par :

$$\boxed{\frac{\pi}{\mu'_e l_{cr}} = \tan\left(\frac{\pi}{\mu_s l_{cr}}\right)}. \quad (\text{V.43})$$

On voit donc clairement que la notion de longueur critique est implicitement contenue dans l'ETR. Au-delà de la longueur critique, nous avons ce qu'on appelle une bombe photonique, notion à rapprocher de la bombe atomique pour laquelle existe le seuil de masse critique.

Remarque : Nous rencontrons fréquemment dans la littérature (WIERSMA et LAGENDIJK 1996) une expression de la longueur critique donnée par les longueurs de diffusion l_s et de gain l_g (inverse du coefficient de gain μ_g). En effet, en effectuant un développement limité de la tangente dans l'équation V.42 pour les petits k , on obtient :

$$s_0 \sim \frac{k}{k/\mu_s + k^3/(3\mu_s^3)} - \mu'_e \sim \mu_s - \frac{k^2}{3\mu_s} - \mu'_e. \quad (\text{V.44})$$

En retenant comme dans le cas exact $s_0 = 0$ et $k = \pi/l_{cr}$, nous retrouvons la formulation bien connue de la longueur critique (LETOKHOV 1968; WIERSMA et LAGENDIJK 1996; CAO 2003) (cas où il y a absence d'absorption intrinsèque par le milieu $\mu'_a = -\mu_g$) :

$$\boxed{l_{cr} = \pi \sqrt{\frac{l_s l_g}{3}}}. \quad (\text{V.45})$$

À noter que faire l'approximation des petits k revient à considérer les grandes échelles d'espace. L'expression de la longueur critique trouvée précédemment correspond en fait à celle qu'on trouverait dans le cas de l'approximation de la diffusion. Cela peut se vérifier par exemple facilement sur l'expression du flux transmis par une tranche éclairée sous incidence normale (voir Ann. H) :

$$\phi_{\text{sort,diff}}^+(t) = \frac{E_{\text{inc}} H(t) \mathcal{D}_i}{L + 2z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L + 2z_0} \sin \left[\frac{n\pi L}{L + 2z_0} \right] \exp \left[-\frac{n^2 \pi^2 \mathcal{D} t}{(L + 2z_0)^2} - \mu'_a c t \right] \quad (\text{V.46})$$

avec $\mathcal{D}_i = cl_{tr}/3$ coefficient de diffusion en régime instationnaire (voir Chap. III), z_0 longueur d'extrapolation (voir Ann. I) et H fonction d'HEAVYSIDE. La condition d'obtention d'une exponentielle divergente en temps redonne la longueur critique pour $n = 1$ et $z_0 = 0$. C'est l'approche initiale suivie par LETOKHOV (LETOKHOV 1968).

Quel albédo effectif pour atteindre le seuil laser ? Il est intéressant dans l'équation V.43 d'exprimer l'albédo effectif (lié à l'intensité de pompe) nécessaire pour atteindre le seuil laser en fonction de la largeur du milieu. De plus, nous pouvons ici prendre en compte la présence de réflexions internes aux interfaces (i.e. $n_2 \neq 1$) en augmentant la largeur du milieu de deux fois la longueur d'extrapolation z_0 (voir Ann. I) (ROSSUM et NIEUWENHUIZEN 1999). Ainsi, les coordonnées d'annulation de la densité d'énergie de part et d'autre de la couche diffusante seront bien intégrées à la théorie. L'équation V.43 devient :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\mu'_e (L + 2z_0)} &= \tan \left[\frac{\pi}{\mu_s (L + 2z_0)} \right] \Rightarrow \frac{\pi a'}{\mu_s (L + 2z_0)} = \tan \left[\frac{\pi}{\mu_s (L + 2z_0)} \right] \\ \frac{\pi a' l_s}{L + 2z_0} &= \tan \left[\frac{\pi l_s}{L + 2z_0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.47})$$

L'albédo effectif au seuil laser est alors donné par :

$$\boxed{a'_{\text{seuil,ETR}} = \frac{L + 2z_0}{\pi l_s} \tan \left(\frac{\pi l_s}{L + 2z_0} \right)}. \quad (\text{V.48})$$

Étude modale instationnaire en diffusion anisotrope

Dans le cas de la diffusion anisotrope, il est nécessaire de faire appel à un code de calcul utilisant la méthode des ordonnées discrètes afin de retrouver numériquement les modes propres de l'ETR (voir Ann. C). Il a été vérifié numériquement que l'ensemble des résultats mentionnés ci-dessus de manière analytique restent vrais comme nous allons pouvoir l'apprécier dans la section V.4.3.

Étude en approximation de la diffusion

La plupart des travaux réalisés sur les lasers aléatoires en régime de rétroaction incohérente l'ont été principalement en utilisant l'approximation de la diffusion (LETOKHOV 1968;

WIERSMA et LAGENDIJK 1996; BERGER *et al.* 1997; SOEST 2001). D'après l'équation V.46, on peut écrire l'expression de l'albédo effectif de seuil en fonction de la longueur du milieu :

$$(L + 2z_0)^2 = -\frac{\pi^2}{3} l_{tr} l'_a \text{ avec } l'_a < 0 \text{ longueur d'absorption effective} \quad (\text{V.49})$$

et z_0 longueur d'extrapolation, ce qui donne :

$$a'_{\text{seuil,diff}} = \frac{1}{1 - \pi^2 l_s^2 / [3(1-g)(L + 2z_0)^2]} \quad (\text{V.50})$$

Ce résultat est évidemment identique à celui qu'on trouverait en faisant une étude modale directe de l'équation de la diffusion tout comme cela a été proposé par LETOKHOV (LETOKHOV 1968).

Il est intéressant de noter que la dépendance de l'albédo effectif par rapport à la largeur de milieu suit une loi en $1/L^2$. Ce résultat est propre au régime diffusif dans le cas de lasers aléatoires en régime incohérent. Dans le cas de modes localisés présents dans les lasers en régime cohérent, cette dépendance devient exponentielle (BURIN *et al.* 2002). Notons que cela pourrait constituer un très bon critère de discrimination de l'un ou l'autre des régimes lors d'expériences.

V.4.2 Recherche de l'albédo effectif en fonction de l'intensité de pompe

Que ce soit analytiquement dans le cas d'une fonction de phase isotrope ou numériquement pour une diffusion anisotrope, nous sommes maintenant en mesure de calculer l'albédo effectif à atteindre pour être au-delà du seuil laser. Pour valider cette approche modale, il nous faut maintenant un moyen de déterminer la relation qui existe entre l'albédo effectif et l'intensité de pompe. Pour cela, nous devons résoudre numériquement le problème couplé complet correspondant aux équations V.11, V.13 et V.14 non sans faire une approximation sur la largeur spectrale de l'émission spontanée.

Approximation monochromatique

Dans cette méthode de calcul numérique, nous ne faisons que l'hypothèse d'un profil de raie du type DIRAC pour l'émission (i.e. $g'(\nu) = \delta(\nu - \nu_E)$). Les propriétés de diffusion des particules sont anisotropes, la luminance conserve sa dépendance angulaire et l'indice optique du milieu diffusant peut être différent de l'unité (i.e. $n_1 = n_3 = 1$ et $n_2 \neq 1$) ce qui autorise les réflexions internes. Les équations du laser aléatoire deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t}(z, t) = & \sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(z, t)] (L_{Ac}^+ + L_{Ac}^-)(z, t) - \frac{N_1(z, t)}{\tau_e} + \int_{-1}^{+1} \left\{ \sigma_{\text{abs}} [N_t - N_1(z, t)] \right. \\ & \left. \times L_{Ad}(z, \mu, t) - \sigma_{\text{em}} N_1(z, t) L_E(z, \mu, t) \right\} d\mu, \end{aligned} \quad (\text{V.51})$$

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z}\right) L_{Ac}^{\pm}(z, t) = -[\sigma_{\text{abs}}(N_t - N_1(z, t)) + \mu_s] L_{Ac}^{\pm}(z, t) \quad (\text{V.52})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L_{Ad}(z, \mu, t) = & -[\sigma_{\text{abs}}(N_t - N_1(z, t)) + \mu_s] L_{Ad}(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \\ & \times L_{Ad}(z, \mu', t) d\mu' + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, 1) L_{Ac}^{+}(z, t) + \frac{\mu_s}{2} p(\mu, -1) L_{Ac}^{-}(z, t), \end{aligned} \quad (\text{V.53})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L_E(z, \mu, t) = & [\sigma_{\text{em}} N_1(z, t) - \mu_e] L_E(z, \mu, t) \\ & + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L_E(z, \mu', t) d\mu' + \frac{N_1(z, t)}{2\tau_e}. \end{aligned} \quad (\text{V.54})$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, elles s'écrivent :

$$\begin{cases} L_{Ad,E}(0, \mu > 0, t) & = R_{21}(|\mu|) L_{Ad,E}(0, \mu < 0, t), \\ L_{Ad,E}(L, \mu < 0, t) & = R_{23}(|\mu|) L_{Ad,E}(L, \mu > 0, t), \end{cases} \quad (\text{V.55})$$

$$\begin{cases} L_{Ac}^{+}(0, t) & = R_{21}(\mu = 1) L_{Ac}^{-}(0, t) + T_{12}(\mu = 1) L_{A,\text{inc}}^{+}(t) & \text{faisceau pompe du milieu } \mathbf{1}, \\ L_{Ac}^{-}(L, t) & = R_{23}(\mu = 1) L_{Ac}^{+}(L, t) + T_{32}(\mu = 1) L_{A,\text{inc}}^{-}(t) & \text{faisceau pompe du milieu } \mathbf{3}, \end{cases} \quad (\text{V.56})$$

où les facteurs T_{ij} et R_{ij} sont les coefficients de FRESNEL respectivement de transmission et de réflexion en énergie (voir Chap. I).

Pour ce qui est de l'application des différences finies, par rapport au cas de l'approximation à quatre flux, il est nécessaire de discrétiser en plus la variable angulaire μ . Pour cela, on utilise une quadrature de GAUSS en prenant soin de vérifier les lois de DESCARTES aux interfaces (voir Ann. C). En ce qui concerne le reste de la méthode numérique, la méthode est inchangée par rapport au cas précédent. Les flux de sortie du rayonnement émis sont donnés par :

$$\phi_{E,\text{sort}}^{+}(t) = \int_0^1 T_{23}^d(|\mu|) L_E^{+}(L, t, \mu) \mu d\mu \text{ en } \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (\text{V.57})$$

$$\phi_{E,\text{sort}}^{-}(t) = \int_{-1}^0 T_{21}^d(|\mu|) L_E^{-}(0, t, \mu) \mu d\mu \text{ en } \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{V.58})$$

avec $T_{ij}^d(|\mu|)$ coefficient de transmission du milieu i vers le milieu j pour la luminance (i.e. prise en compte de la réfraction) (voir Chap. I).

V.4.3 Résultats numériques

Pour pouvoir valider l'étude modale du seuil laser, il est nécessaire de pouvoir calculer l'albédo effectif a' relié à l'intensité de pompe. Nous procédons comme-suit :

1. Le code de calcul en approximation monochromatique résoud le problème couplé en entier numériquement pour différents niveaux de pompe. La courbe donnant l'intensité d'émission en fonction de l'intensité de pompe nous permet aisément de déduire la position du seuil (position de la cassure dans la pente).

2. Une fois l'intensité de seuil déterminée, le calcul de l'albédo effectif correspondant se fait par la formule suivante, issue des équations V.37 et V.38 :

$$a' = \frac{\mu_s}{\mu'_a + \mu_s} = \frac{\mu_s}{\mu_a - \sigma_{\text{em}} \langle N_1(z) \rangle + \mu_s} = \frac{1}{1/a - l_s \sigma_{\text{em}} \langle N_1(z) \rangle} \quad (\text{V.59})$$

Pour calculer la moyenne spatiale ($\langle \dots \rangle$) de la densité de population des molécules excitées pour le niveau de pompe correspondant au seuil laser, on retient l'instant t où elle est maximale.

3. Finalement l'albédo effectif trouvé est comparé
- dans le cas de la diffusion isotrope à celui de la formule analytique V.48.
 - dans le cas de la diffusion anisotrope à celui déterminé par le calcul numérique des modes propres effectué par le méthode des ordonnées discrètes.

Valeurs numériques

Le tableau V.3 résume les propriétés du milieu utilisées dans le cadre du calcul présenté ci-après.

Valeurs numériques	
$L_{A,\text{inc}}^+ \in [0.00 \times 10^{30}, 4.00 \times 10^{31}] \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$	$L_{A,\text{inc}}^- \in [0.00 \times 10^{30}, 4.00 \times 10^{31}] \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$
$T_{1/2} = 14 \text{ ns}$	$\tau_e = 3.2 \times 10^{-6} \text{ s}$
$\sigma_{\text{abs}} = 3.00 \times 10^{-24} \text{ m}^2$	$\sigma_{\text{em}} = 3.00 \times 10^{-23} \text{ m}^2$
$\lambda_A = c/\nu_A = 532 \text{ nm}$	$N_t = 1.6 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
$a = 1$	$g = 0.8$ fonction de phase d'HENYHEY-GREENSTEIN
$n_1 = n_3 = 1.00$	$n_2 = 1.33$
$l_s = 1/\mu_s = 100 \mu\text{m}$	$L \in [0.7, 2.5] \text{ mm}$
$t_- = -15 \text{ ns}$	$t_+ = 25 \text{ ns}$
$\Delta z \in [1.4, 5] \times 10^{-5} \text{ m}$	$\Delta t = 4 \times 10^{-15} \text{ s}$

Tab. V.3 – Valeurs numériques retenues pour modéliser un laser aléatoire formé d'une poudre de Ti:saphire.

Pour la quadrature de GAUSS, le nombre de discrétisations angulaires est de l'ordre de quelques dizaines seulement. Nous choisissons un profil gaussien pour la puissance de pompe (injectée de manière identique deux côtés du milieu) sous la forme :

$$L_{A,\text{inc}}^\pm(t) = L_{A,\text{inc}}^\pm \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right) \text{ avec } T = \frac{T_{1/2}}{2\sqrt{\ln 2}} \quad (T_{1/2} \text{ étant la largeur à mi-hauteur}) \quad (\text{V.60})$$

Détermination de l'intensité de pompe de seuil laser

La figure V.10 représente le résultat de la simulation numérique en utilisant la méthode dite de l'approximation monochromatique. Y est tracée l'intensité d'émission en fonction

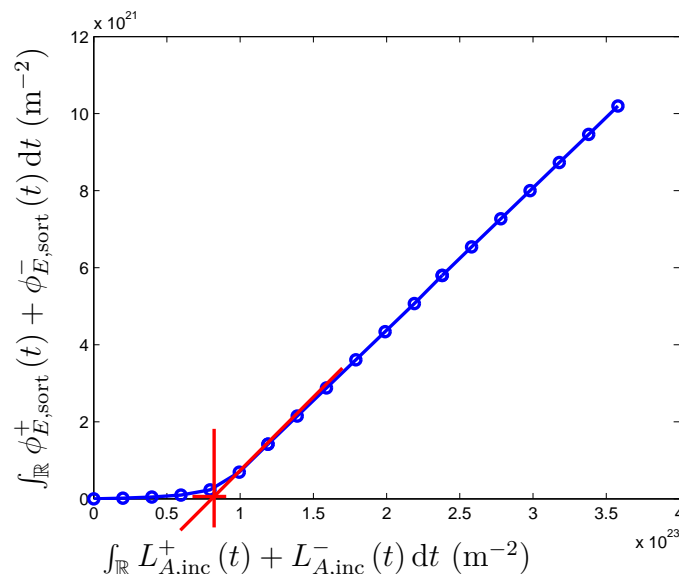


Fig. V.10 – Tracé de l'intensité d'émission sortant du milieu en fonction de l'intensité de pompe pour une largeur de milieu diffusant de $L = 1$ mm. L'intégration temporelle du flux se fait sur la fenêtre $t \in [t_-, t_+]$. Les paramètres sont définis dans le tableau V.1. Le pompage optique s'effectue de manière identique des deux côtés du milieu. Le seuil laser correspondant à la cassure dans le tracé de la courbe est visualisé à l'aide de la croix rouge.

de l'intensité de pompe pour une largeur de milieu $L = 1$ mm. Les variations de l'intensité de pompe nous permettent facilement de détecter la position du seuil laser. Elle est donnée par la cassure dans le tracé de la courbe.

Détermination de l'albédo effectif de seuil par calcul numérique complet

Pour le seuil détecté sur la figure V.10, nous recherchons l'albédo effectif correspondant. La figure V.11 décrit les variations de la densité de population du niveau excité. Nous utilisons la densité maximum pour le calcul de l'albédo effectif de seuil. C'est pourquoi, on peut considérer que dans un laps de temps suffisamment long, la densité de population reste constante en première approximation (dérivée temporelle nulle). De plus, le tracé de cette quantité en fonction de la profondeur dans le milieu donne un résultat quasi uniforme grâce en particulier à la présence des réflexions internes comme le montre la figure V.12. Nous obtenons alors : $a' = 1.027$. On voit nettement qu'avec une intensité de pompe physiquement réalisable, on obtient des albédos effectifs proches de 1.

Détermination de l'albédo effectif de seuil par approche modale

Pour effectuer la comparaison avec l'approche modale, il reste à calculer numériquement l'albédo effectif à partir de la méthode des ordonnées discrètes. Cette méthode nous permet de déterminer tout d'abord la longueur d'extrapolation z_0 (voir Chap. III). Pour un albédo proche de 1, elle vaut $z_0 = 0.773$ mm. En utilisant ensuite cette valeur et par dichotomie, on recherche la valeur de l'albédo effectif qui donne $s_0 [k = \pi / (L + 2z_0)] = 0$. On trouve

$a'_{\text{seuil,ETR}} = 1.028$ ce qui est en parfait accord avec la valeur trouvée lors de la résolution du

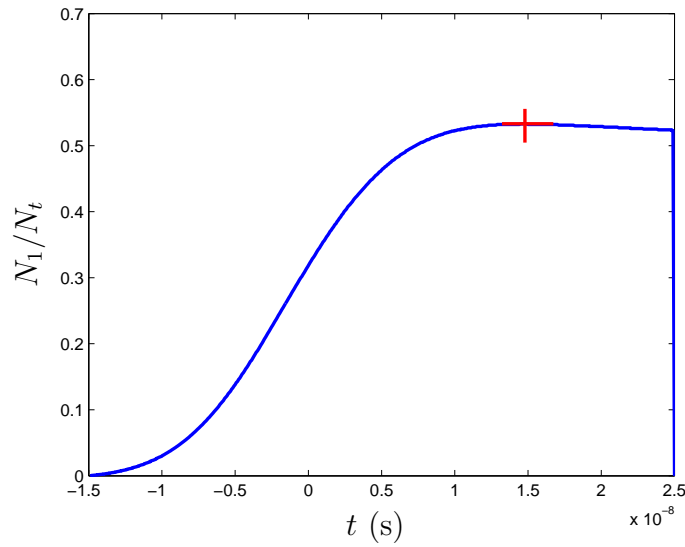


Fig. V.11 – Densité de population N_1 du niveau excité en fonction du temps moyennée spatialement pour le niveau de pompe correspondant au seuil laser détecté sur la figure V.10. Le point retenu pour le calcul de l'albédo effectif est représenté par une croix rouge. Nous sommes proche du seuil mais légèrement en-deçà ce qui explique l'absence d'oscillations.

problème couplé.

Comparaison des albédos effectifs pour différentes largeurs de milieu

La figure V.13 représente des résultats plus complets en faisant varier la largeur du milieu. On voit nettement que pour des largeurs trop faibles, il sera impossible d'atteindre un seuil laser. Mentionnons néanmoins que dans la pratique, il est quasi impossible d'atteindre des albédos effectifs au-delà de 1.05. On note de plus que l'approche modale en approximation de la diffusion dévie fortement de celle en ETR. Si cela ne se voit que relativement faiblement sur l'albédo effectif, en revanche, une fois converti en intensité de pompe, on obtient des écarts relatifs beaucoup plus importants. Par exemple, pour $L = 0.7 \times 10^{-3}$ m, l'approche modale en diffusion donne un albédo effectif de seuil $a'_{\text{seuil,diff}} = 1.033$ correspondant à une intensité de pompe de $1.0 \times 10^{-24} \text{ m}^{-2}$ calculée numériquement avec le problème couplé. L'approche modale ETR donne quant à elle un albédo effectif de seuil $a'_{\text{seuil,ETR}} = 1.037$ soit en intensité de pompe $1.5 \times 10^{-24} \text{ m}^{-2}$. L'écart relatif sur l'intensité de pompe est alors de 50 % entre l'étude modale en ETR et celle en approximation de la diffusion. Cette dernière approche souvent utilisée ne rend pas du tout compte du niveau de seuil correctement dans les cas de faibles épaisseurs optiques.

Distribution angulaire de la luminance d'émission

Afin de valider totalement la méthode modale, on peut au final s'intéresser à la répartition angulaire de la luminance d'émission. Ainsi, nous pouvons comparer le mode $G_{ks}(\mu)$ pour $[k, s] = [\pi/(L + 2z_0), 0]$ (c'est à dire au seuil laser) avec la répartition angulaire de la luminance d'émission spontanée calculée au temps du maximum de la densité de population

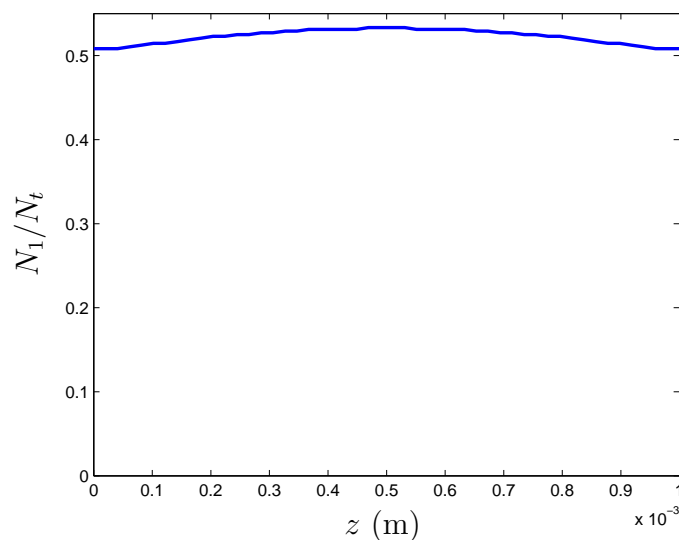


Fig. V.12 – Densité de population N_1 du niveau excité en fonction de la profondeur dans le milieu pour le niveau de pompe correspondant au seuil laser détecté sur la figure V.10 et à l'instant considéré sur la figure V.11.

(c'est à dire au seuil laser également) et au milieu de la couche diffusante.

En reprenant les mêmes paramètres que précédemment, nous obtenons les résultats des figures V.15 et V.16.

Dans le cas où les réflexions internes sont absentes (i.e. $n_2 = 1$), la dépendance directionnelle de l'émission est bien décrite par l'étude modale en comparaison à l'étude numérique complète. On remarque en particulier que plus le milieu devient fin et plus la distribution devient anisotrope. En effet, dans ce cas, l'approximation de la diffusion n'est plus valable ce qui se traduit par une anisotropie de la luminance (voir Chap. III).

En revanche, si des réflexions internes sont présentes, le seuil laser est très bien décrit mais pas la structure angulaire du mode. En effet, la difficulté principale réside dans le fait qu'il faut prendre en compte correctement la présence des réflexions internes. Cela se fait à partir de la longueur d'extrapolation z_0 dans cette étude ce qui n'est adapté *a priori* que pour le régime diffusif. La résolution de ce problème passera inévitablement par l'étude des vrais modes d'une couche (et non pas des modes d'un milieu infini comme étudiés ici) ce qui permettra de prendre en compte proprement la structure finie du milieu et de s'affranchir de la longueur d'extrapolation z_0 (KIM et SCHOTLAND 2006).

Dans le cas de larges milieux, le gain n'est pas uniforme, en particulier s'il n'y a pas de réflexions internes et si le pompage optique ne s'effectue que d'un seul côté. La zone où le gain est suffisamment important pour engendrer un effet laser et appelé « volume de gain » (SOEST 2001; CAO 2003). Le fait de faire intervenir les vrais modes d'une couche permettrait également de prendre en compte l'existence de ce volume.

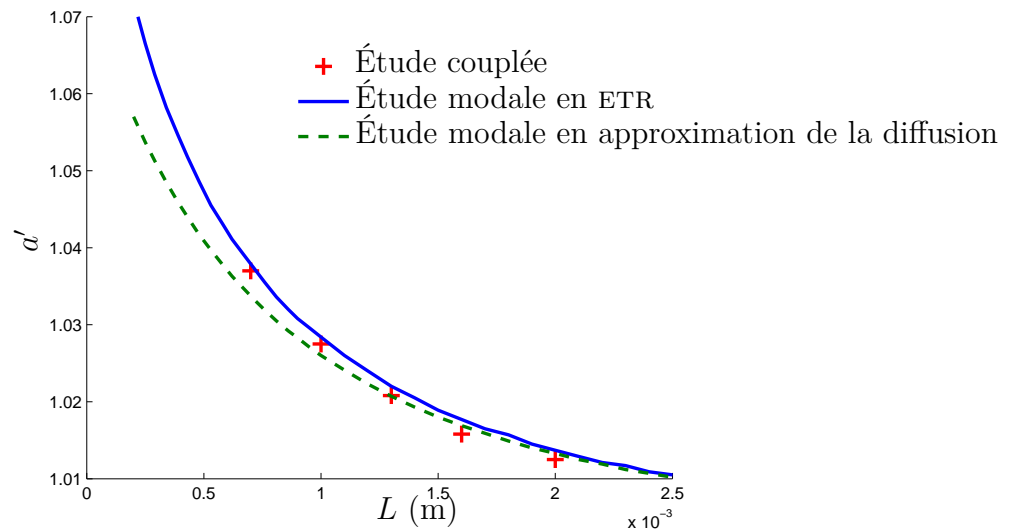


Fig. V.13 – Tracé des albédos effectifs de seuil pour différentes largeurs L de milieu. L'étude modale est ainsi validée même en présence de réflexions internes (i.e. $n_2 = 1.33$) et pour des coefficients d'anisotropie élevés (i.e. $g = 0.8$). On note une déviation avec la méthode modale établie en approximation de la diffusion pour des largeurs de milieu suffisamment faibles.

V.4.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons montré la possibilité de définir un seuil laser en régime de rétroaction incohérente à partir d'une étude modale de l'ETR en présence de gain. Des comparaisons avec la résolution numérique du problème couplé complet ont démontré la validité de cette approche. Il a également été prouvé que pour certains systèmes, l'approximation de la diffusion n'est plus valide et procure des résultats éloignés de la réalité physique.

V.4.5 Remarque : étude modale stationnaire en diffusion isotrope

Le but de l'étude en régime stationnaire est de montrer que l'on peut retrouver la formulation de la longueur critique (équation V.43 donnée précédemment par une étude modale en régime instationnaire) à l'aide d'un critère simple stipulant qu'au delà du seuil, il n'est pas possible d'obtenir une solution stationnaire physiquement acceptable. En régime indépendant du temps, l'équation V.39 devient :

$$\mu \frac{\partial L}{\partial z}(z, \mu) = -\mu'_e L(z, \mu) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu') d\mu'. \quad (\text{V.61})$$

La décomposition modale de la luminance en régime stationnaire se limite au terme spatial (CASE et ZWEIFEL 1967) (voir Ann. E) :

$$L(z, \mu) = G_k(\mu) \exp[ikz]. \quad (\text{V.62})$$

La structure du mode s'écrit alors :

$$G_k(\mu) = \text{VP} \left[\frac{\mu_s/2}{ik\mu + \mu'_e} \right] + \delta(ik\mu + \mu'_e) \lambda(k). \quad (\text{V.63})$$

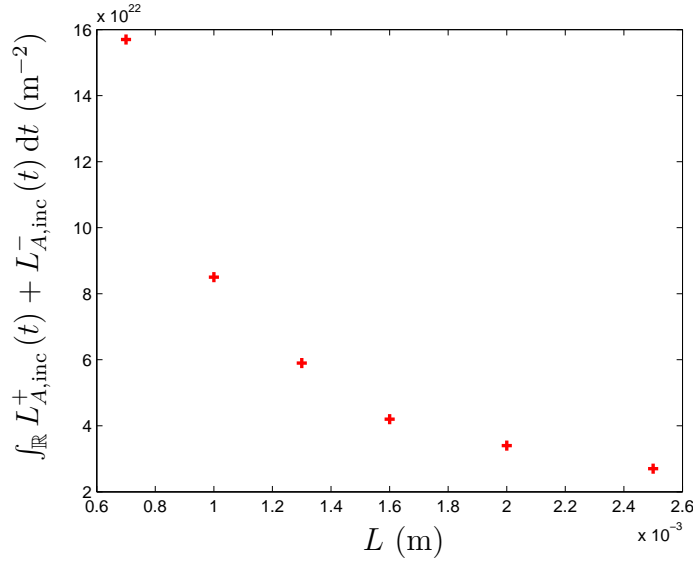


Fig. V.14 – Dans le but de donner une vision plus physique du seuil, nous avons tracé l'intensité de seuil en fonction de la largeur du milieu. Les points correspondent à ceux de la figure V.13.

Tout comme dans le cas instationnaire, deux cas se présentent alors :

- si $ik \notin]-1/\mu'_e, 1/\mu'_e[$, alors $k \in i\mathbb{R}$. Cela donne un mode réel pour la luminance, elle est donc parfaitement définie et on ne pourra pas visualiser de seuil dans ce cas.
- si $ik \in]-1/\mu'_e, 1/\mu'_e[$, $ik\mu + \mu'_e \neq 0$. L'équation V.63 devient alors :

$$G_k(\mu) = \frac{\mu_s/2}{ik\mu + \mu'_e}. \quad (\text{V.64})$$

Après intégration sur la variable angulaire μ , on montre qu'il y a deux solutions notées $\pm k_0$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{si } a' > 1 & \Rightarrow k_0 \in \mathbb{R}, \\ \text{si } a' < 1 & \Rightarrow k_0 \in i\mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{V.65})$$

Comme nous venons de le mentionner, dans le cas amplificateur, la luminance présente des oscillations. Par intégration sur les directions μ , la densité d'énergie présente les mêmes oscillations de période $\lambda = 2\pi/|k_0|$. En effet, d'après l'équation V.64, les intégrations des vecteurs propres G_{k_0} et G_{-k_0} sur les directions μ sont identiques, cela fait apparaître un terme en $\sin(|k_0|z)$. Physiquement, la densité d'énergie ne peut devenir négative. Il est donc nécessaire de se limiter à une arche de sinussoïde positive. Ainsi, la largeur critique est donnée par :

$$l_{cr} = \frac{\pi}{|k_0|} \quad (\text{V.66})$$

Nous savons désormais que pour $a' > 1$, nous pouvons retenir $k_0 \in \mathbb{R}^+$. Ainsi, la relation de dispersion donnée par l'intégration sur μ de l'équation V.64 devient :

$$1 = \frac{\mu_s}{k_0} \arctan(\mu'_e k_0) \quad (\text{V.67})$$

Soit finalement pour la largeur critique :

$$\boxed{\frac{\pi}{\mu'_e l_{cr}} = \tan\left(\frac{\pi}{\mu_s l_{cr}}\right)} \quad (\text{V.68})$$

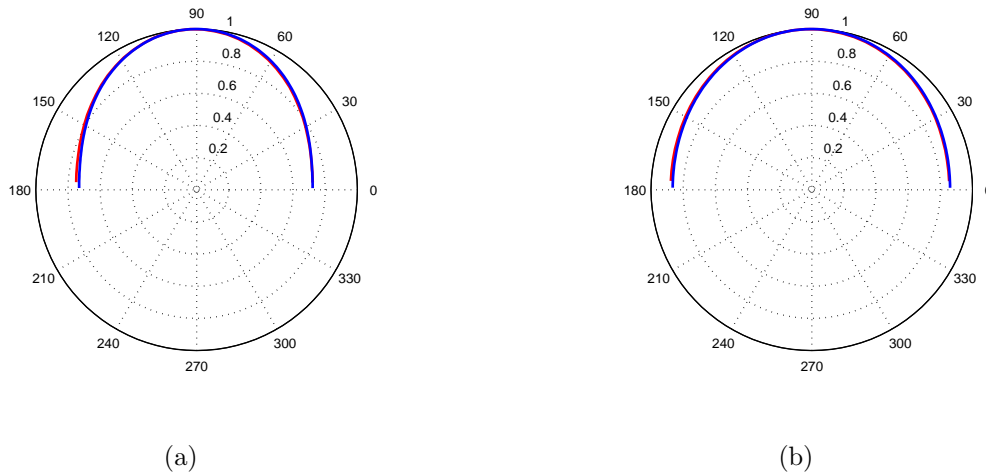


Fig. V.15 – Tracé des modes normalisés de seuil laser pour le calcul complet (courbe rouge) et pour le calcul modal (courbe bleue) dans le cas $n_2 = 1$ et $L = 1.6 \times 10^{-3} \text{ m}$ (a) et $L = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m}$ (b). On remarque un très bon accord entre les deux calculs. De plus, plus le milieu devient fin et plus la distribution est anisotrope. L'approximation de la diffusion n'est en effet plus valable dans ce cas. Notons toutefois que la position du seuil est mal décrite dans cette situation car l'absence de réflexions internes ne permet pas l'établissement d'une densité de population uniforme dans le milieu.

Ce résultat est identique à celui trouvé lors du calcul en régime instationnaire (équation V.43).

Définition du coefficient de diffusion stationnaire en milieu amplificateur

Le valeur propre discrète k_0 est la plus petite en module de tout le spectre et c'est la seule qui soit discrète. Toutes les autres appartiennent à un continuum.

Dans le cas absorbant ($a' < 1$), elle est imaginaire pure et correspond donc au mode qui s'atténue le moins vite spatialement (donné par $\exp[ikz]$). C'est donc cette valeur qu'il faut utiliser pour calculer correctement le coefficient de diffusion en régime stationnaire (voir Chap. III) donné par $\mathcal{D}_s = -c\mu'_a/k_0^2$.

Dans le cas amplificateur, ($a' > 1$), elle est réelle et correspond à un mode oscillant mais c'est également cette valeur propre qu'il faut retenir pour le coefficient de diffusion. En effet, les valeurs propres du continuum étant imaginaires pures ($k \in i\mathbb{R}$), les modes associés s'atténuent, ce qui n'est pas le cas du mode k_0 . En milieu amplificateur, le coefficient de diffusion est bien défini, réel positif, puisqu'il s'écrit $\mathcal{D}_s = -c\mu'_a/k_0^2$.

En conclusion, que ce soit en milieu absorbant ou amplificateur, l'approximation de la diffusion existe. Il faut toutefois noter que dans ce dernier cas, la taille du système ne devra pas dépasser la largeur critique pour qu'une solution stationnaire existe mais être toutefois suffisamment grande pour espérer atteindre le régime diffusif.

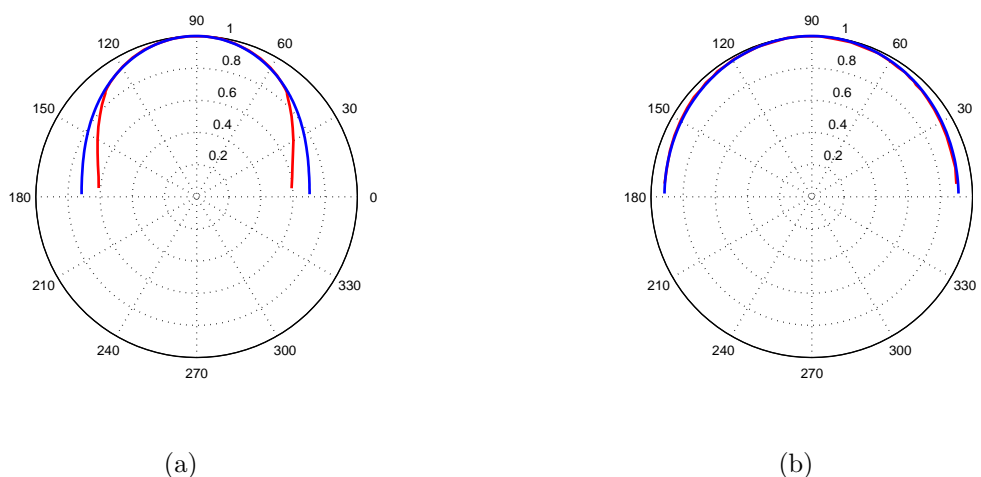


Fig. V.16 – Tracé des modes normalisés de seuil laser pour le calcul complet (courbe rouge) et pour le calcul modal (courbe bleue) dans le cas $n_2 = 1.33$ et $L = 0.7 \times 10^{-3}$ m (a) et $L = 2.5 \times 10^{-3}$ m (b). On remarque un bon accord entre les deux calculs uniquement pour le cas diffusif et les grands angles dans le cas non diffusif. Effectivement, ici il est très difficile d’être quantitatif à cause des réflexions internes. La prise en compte de la longueur z_0 améliore considérablement les résultats pour la recherche de la position du seuil mais ne permet pas de décrire proprement les modes en dehors du régime diffusif pour lequel z_0 est adaptée. Il faudrait pour cela considérer les modes exacts d’une couche au lieu des modes du milieu infini dans lequel on retient artificiellement un mode particulier ($k = \pi / (L + 2z_0)$).

V.5 Conclusion

Dans ce travail sur les lasers aléatoires en régime de rétroaction incohérente, nous avons développé un modèle basé sur le couplage entre l’équation de relaxation et l’ETR. Ce modèle, plus fin que l’approximation de la diffusion, a permis dans un premier temps de montrer la cohérence entre les diverses définitions du seuil laser rencontrées dans la littérature. En particulier, il est important de noter qu’un seuil laser existe dans un régime qui n’est pas celui de la localisation d’ANDERSON.

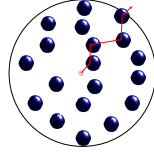
Nous avons ensuite cherché à établir un lien entre l’étude des modes de l’ETR en présence de gain et le seuil laser. Cette étude s’est concrétisée par une comparaison satisfaisante entre le seuil laser déduit de l’approche modale et celui calculé numériquement par résolution complète des équations du laser aléatoire. En guise de perspectives, cette approche devrait être améliorée en prenant en compte la structure complète des vrais modes d’une couche diffusante, ce qui permettra de décrire plus précisément la distribution angulaire de l’intensité d’émission et le rôle du volume de gain.

Chapitre VI

Émission dipolaire au sein d'un agrégat de diffuseurs à résonance

Table des matières

VI.1	Modélisation	115
VI.1.1	Système physique étudié	115
VI.1.2	Modélisation de la molécule fluorescente	115
	Une molécule fluorescente est équivalente à un dipôle électrique classique	115
	Détermination du taux d'émission fluorescente	116
	Puissance rayonnée et puissance absorbée	118
VI.1.3	Modélisation des diffuseurs dipolaires à résonance	119
	Cas de particules	119
	Cas d'atomes à deux niveaux	119
VI.1.4	Modélisation du système complet	120
VI.2	Méthode des dipôles couplés et distribution du taux d'émission . . .	120
VI.2.1	Calcul numérique du taux d'émission	120
VI.2.2	Résultats en régime de diffusion multiple	121
	Paramètres numériques	121
	Distribution du taux d'émission	122
VI.3	Recherche de la longueur de diffusion : vers un milieu effectif équivalent	123
VI.3.1	Équation du champ moyen	125
VI.3.2	Expression de la permittivité effective	127
	Sans diffusion récurrente	127
	Avec diffusion récurrente entre paires de particules	127
VI.3.3	Fonction de GREEN du milieu effectif et taux d'émission . .	132
VI.4	Résultats	133
VI.5	Conclusion	134



Dans ce chapitre, nous allons évoquer quantitativement la modification du taux de fluorescence d'une molécule (PURCELL 1946) placée dans un milieu complexe composé de diffuseurs. Les diffuseurs seront représentés par des dipôles électriques (cas par exemple de particules dont le paramètre de taille $X \ll 1$ (voir Chap. I) ou d'atomes). Une étude a déjà été réalisée dans le régime de diffusion simple en champ proche pour lequel des calculs numériques peuvent facilement être menés dans le cas d'agrégats (*cluster* en anglais) de particules diélectriques (FROUFE-PÉREZ et CARMINATI 2007). Pour décrire les grandeurs moyennes, il est en particulier possible de remplacer les diffuseurs par un milieu effectif homogène de constante diélectrique ϵ_{eff} .

L'objectif de ce travail est d'effectuer une étude similaire dans le cas du régime de diffusion multiple. Ce régime peut être atteint de deux manières différentes. On peut par exemple augmenter la taille du milieu complexe ce qui nécessite l'augmentation du nombre de diffuseurs. Comme nous le verrons dans la suite, la méthode numérique utilisée ne permet pas l'utilisation d'un grand nombre de diffuseurs. Il est donc nécessaire de se tourner vers une autre solution. La deuxième méthode consiste à augmenter la polarisabilité des diffuseurs tout en restant dans des limites physiques acceptables. On considère donc des diffuseurs à résonance. Que ce soit dans le cas de particules diélectriques ou d'atomes, nous verrons que la polarisabilité à résonance est donnée par $\alpha(\omega) = 6i\pi/k_0^3$ où $k_0 = \omega/c$.

L'étude en régime de diffusion multiple va porter sur la compréhension de la statistique du taux d'émission de la source fluorescente (moyenne et fluctuations). En particulier nous allons tenter de mettre au point un modèle nous permettant de trouver l'expression de la longueur de diffusion corrigée. Pour aboutir à ce résultat, une méthode consiste à définir un milieu effectif homogène équivalent d'indice n_{eff} dont la partie imaginaire nous renseignera sur la longueur de diffusion l_s . Des théories existent déjà comme la formule de Maxwell-GARNETT (MALLET *et al.* 2005; GUÉRIN *et al.* 2006). Nous verrons comment l'améliorer au cas du système étudié.

Dans un premier temps nous allons présenter en détail le système étudié et sa modélisation. Ensuite, nous évoquerons la méthode numérique utilisée pour obtenir la statistique du taux d'émission. Nous présenterons alors diverses théories permettant d'obtenir un milieu effectif homogène équivalent. Pour les valider, nous comparerons les taux d'émission effectif au taux d'émission moyen du problème complet. Enfin, nous déduirons des modèles l'expression de la longueur de diffusion.

VI.1 Modélisation

VI.1.1 Système physique étudié

Nous choisissons d'étudier un système physique composé d'un agrégat sphérique de rayon R contenant N diffuseurs. Ces diffuseurs peuvent être soit des particules diélectriques, soit des atomes. Ils sont séparés d'une distance d'au moins d_{\min} . Au centre de l'agrégat est présente une molécule fluorescente unique constituant la source de lumière du système. Cette molécule est entourée par un volume d'exclusion sphérique de rayon d_{\min} . L'ensemble du système est représenté sur la figure VI.1.

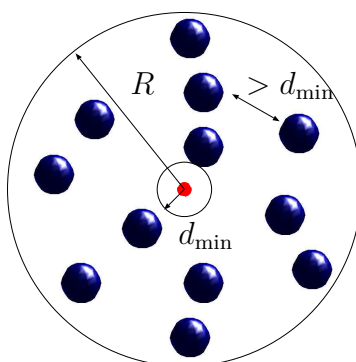
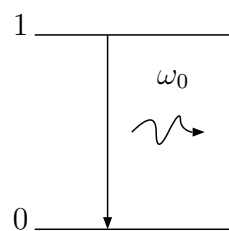


Fig. VI.1 – Le système étudié se compose d'un agrégat de N diffuseurs contenant une molécule fluorescente en son centre.

VI.1.2 Modélisation de la molécule fluorescente

Une molécule fluorescente est équivalente à un dipôle électrique classique

Nous allons chercher à calculer la statistique du taux de fluorescente noté Γ de la molécule placée au centre de l'agrégat de diffuseurs. En effet, il est connu depuis les années 1970 que le taux d'émission dépend fortement de l'environnement de la molécule (DREXHAGE 1970; DREXHAGE 1974; CHANCE *et al.* 1974b; CHANCE *et al.* 1974a; CHANCE *et al.* 1975a; CHANCE *et al.* 1975b; RAHMANI 1998). Pour cela, nous nous concentrons sur le taux normalisé, c'est à dire la grandeur Γ/Γ_0 où Γ_0 est le taux de fluorescente de la molécule unique placée dans le vide. Un calcul quantique basé sur l'utilisation de la règle d'or de FERMI permet d'obtenir l'expression du rapport Γ/Γ_0 (COHEN-TANNOUJJI *et al.* 1987; NOVOTNY et HECHT 2006). Cependant, il est connu que cela revient à calculer le rapport Γ/Γ_0 dans le cas d'un dipôle classique (CHANCE *et al.* 1974b; CHANCE *et al.* 1974a; CHANCE *et al.* 1975a; CHANCE *et al.* 1975b), formalisme que nous allons adopter dans ce passage.



En optique, une molécule fluorescente à deux niveaux peut donc être simplement représentée par un moment dipolaire classique de transition. Dans le problème étudié ici, on considère que la molécule est représentée par un moment dipolaire \mathbf{p}_0 placé en \mathbf{r}_0 . La figure ci-contre représente une transition de l'état excité à l'état fondamental à la fréquence de résonance ω_0 .

Détermination du taux d'émission fluorescente

Le taux d'émission fluorescente Γ correspond à l'inverse de la durée de vie d'émission d'une molécule fluorescente. Soit $N_1(0)$ la population du niveau excité de la molécule à l'instant $t = 0$. La population N_1 à l'instant t est donnée par :

$$N_1(t) = N_1(0) \exp[-\Gamma t]. \quad (\text{VI.1})$$

Un calcul classique consiste simplement à appliquer le principe fondamental de la dynamique à un électron de la molécule (THOMAS 2004) :

$$m \frac{\partial^2 \mathbf{r}(t)}{\partial t^2} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}(t) - e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{VI.2})$$

Le terme $-m\omega_0^2 \mathbf{r}(t)$ correspond à une force de rappel de l'électron dans l'atome, ω_0 étant alors la pulsation de la transition électronique. L'électron est aussi soumis à une onde monochromatique définie sous forme complexe par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\omega t]. \quad (\text{VI.3})$$

Ce champ correspond à celui rayonné par le dipôle et réfléchi sur lui-même par l'environnement. On pose alors :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \exp[-i\omega t] \quad (\text{VI.4})$$

et on suppose qu'on néglige la variation en \mathbf{r} dans le champ :

$$-m\omega^2 \mathbf{r}_0 = -m\omega_0^2 \mathbf{r}_0 - e\mathbf{E}(\mathbf{r}_0, \omega). \quad (\text{VI.5})$$

Par définition du moment dipolaire $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$, on a :

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, \omega). \quad (\text{VI.6})$$

Or, le champ électrique créé par le dipôle en tout point de l'espace est donné par la fonction de GREEN par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}_0. \quad (\text{VI.7})$$

Ainsi, l'équation VI.6 devient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \mathbf{p}_0 = \frac{\mu_0 \omega^2 e^2}{m} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}_0. \quad (\text{VI.8})$$

Décomposons ω sous la forme :

$$\omega = \omega' + i\omega''. \quad (\text{VI.9})$$

L'équation VI.8 s'écrit :

$$(\omega_0^2 - \omega'^2 - 2i\omega'\omega'') \mathbf{p}_0 = \frac{\mu_0 \omega^2 e^2}{m} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}_0. \quad (\text{VI.10})$$

Le taux d'émission fluorescente est à rapprocher du terme décroissant dans l'expression du dipôle, en faisant apparaître un facteur deux pour prendre en compte le fait qu'on s'intéresse à la décroissance du champ :

$$\omega'' = -\frac{\Gamma}{2}. \quad (\text{VI.11})$$

On choisit ensuite de faire deux hypothèses : la première consiste à retenir $\omega' = \omega_0$. Cela signifie qu'on néglige le décalage en fréquence (ou décalage de niveau). Ensuite, on retient $\omega = \omega_0$ dans le tenseur de GREEN, c'est l'hypothèse perturbative. En prenant la partie imaginaire de l'équation VI.10, nous aboutissons à :

$$\omega_0 \Gamma \mathbf{p}_0 = \frac{\mu_0 \omega_0^2 e^2}{m} \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) \right] \mathbf{p}_0. \quad (\text{VI.12})$$

Si on choisit $\mathbf{p}_0 \parallel \mathbf{u}$, le produit scalaire par \mathbf{u} de l'équation précédente devient :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 \omega_0 e^2}{m} \mathbf{u} \cdot \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) \right] \mathbf{u}. \quad (\text{VI.13})$$

Le tenseur de GREEN correspond ici à celui calculé pour un environnement donné autour de la molécule. Ainsi le taux d'émission est fortement lié à l'environnement. Cet effet est bien connu des radios-amateurs. La puissance émise par une antenne est largement modifiée par la présence dans son environnement direct d'objets métalliques plus ou moins volumineux.

Dans le vide, la fonction de GREEN est solution de l'équation de propagation dont la densité de courants sources est $\mathbf{j} = -i\omega_0 \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega_0) - \frac{\omega_0^2}{c^2} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega_0) &= \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega_0) &= \frac{e^{ik_0 R}}{4\pi R} \text{VP} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \frac{1}{k_0^2} \nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}} \right] - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{3k_0^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

avec $k_0 = \omega_0/c$, $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$ et VP opérateur valeur principale (voir Ann. B). Dans le cas où le volume d'exclusion est sphérique, la partie imaginaire de $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0$ est donnée par :

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0} \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega_0) \right] = \frac{k_0 \overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{6\pi} \Rightarrow \Gamma_0 = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 m c^3}. \quad (\text{VI.15})$$

Ainsi, si on décompose la fonction de GREEN totale sous la forme :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) + \overleftrightarrow{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0), \quad (\text{VI.16})$$

nous obtenons :

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = 1 + \frac{6\pi}{k_0} \mathbf{u} \cdot \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) \right] \mathbf{u} \quad (\text{VI.17})$$

expression du taux d'émission normalisé identique à celle trouvée dans le cadre de la théorie des perturbations quantiques (NOVOTNY et HECHT 2006). Dans toute la suite, nous appellerons Γ la grandeur vérifiant l'équation VI.17. Ainsi, Γ ne sera le taux d'émission que dans

le cas de l'hypothèse de couplage faible (correspondant à l'hypothèse perturbative faite sur le tenseur de GREEN : la durée de vie des modes du système est petite devant $1/\Gamma$, ou, ce qui est équivalent, la largeur en fréquence des résonances du système est grande devant Γ). À noter que Γ est proportionnel à la densité d'états locale (NOVOTNY et HECHT 2006). Des études ont également montré que les fluctuations de Γ sont proportionnelles à la corrélation d'intensité c_0 traduisant la structure locale de l'environnement de la source (SHAPIRO 1999; TIGGELEN et SKIPETROV 2006).

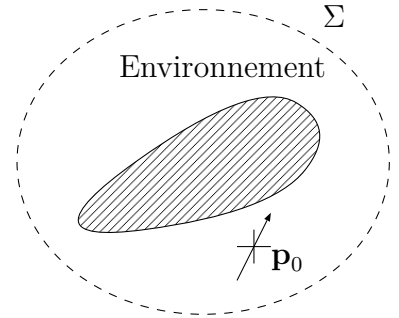
Puissance rayonnée et puissance absorbée

Le bilan d'énergie s'écrit de la façon suivante : la puissance émise par le dipôle P_e se décompose en la somme d'une contribution absorbée par l'environnement P_a et d'une contribution émise en champ lointain (traversant Σ et qui donne lieu donc à la création d'un vrai photon) P_r . On a donc l'égalité :

$$\begin{aligned} P_e &= P_a + P_r \\ -\frac{1}{2} \int_V \mathcal{R} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*] d^3\mathbf{r} &= P_a + P_r \\ -\frac{1}{2} \int_V \mathcal{R} [\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}] d^3\mathbf{r} &= P_a + P_r. \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

Comme $\mathbf{j} = -i\omega_0 \mathbf{p}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathcal{R} [i\omega_0 \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_0, \omega_0)] &= P_a + P_r \\ -\frac{1}{2} \mathcal{R} [i\mu_0 \omega_0^3 \mathbf{p}_0 \cdot \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0) \mathbf{p}_0] &= P_a + P_r \\ \frac{\mu_0 \omega_0^3 p_0^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathcal{I} [\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega_0)] \mathbf{u} &= P_a + P_r \\ \frac{m\omega_0^2 p_0^2}{2e^2} \Gamma &= P_a + P_r. \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$



Dans le cas du vide, nous avons :

$$\frac{m\omega_0^2 p_0^2}{2e^2} \Gamma_0 = P_0 \quad (\text{VI.20})$$

où P_0 est la puissance rayonnée dans le vide. Finalement, le rapport des deux donne :

$$\boxed{\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{P_a}{P_0} + \frac{P_r}{P_0} \Rightarrow \frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\Gamma_{NR}}{\Gamma_0} + \frac{\Gamma_R}{\Gamma_0}} \quad (\text{VI.21})$$

Comme le montre l'équation précédente, on décompose souvent le taux d'émission en une partie non-radiative (absorbée par l'environnement) et une partie radiative (rayonnée en champ lointain et donnant donc lieu à la création d'un photon réel).

VI.1.3 Modélisation des diffuseurs dipolaires à résonance

Dans le but de considérer le régime de diffusion multiple sans pour autant augmenter de manière inconsidérée le nombre de diffuseurs, nous allons considérer des diffuseurs dipolaires à résonance. Pour cela, nous pouvons choisir des particules diélectriques ou des atomes pour lesquels nous allons déterminer la polarisabilité. La polarisabilité relie le moment dipolaire \mathbf{p} au champ incident \mathbf{E}_{inc} sur le diffuseur de la manière suivante :

$$\mathbf{p} = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{inc}}. \quad (\text{VI.22})$$

Elle exprime donc quantitativement la manière dont l'onde incidente polarise l'atome, ce moment dipolaire générant ensuite une onde diffusée de champ \mathbf{E}_{sca} .

Cas de particules

Une particule diélectrique sphérique peut être considérée comme un dipôle électrique lorsque son rayon a est petit devant la longueur d'onde λ (paramètre de taille $X \ll 1$, diffusion RAYLEIGH). Ainsi, la polarisabilité d'une nanoparticule de permittivité relative ϵ est donnée par (YAGHJIAN 1980; DRAINE 1988; BLADEL 1991; JACKSON 2001; THOMAS 2004) :

$$\alpha_p(\omega) = \frac{\alpha_0(\omega)}{1 - ik_0^3 / (6\pi) \alpha_0(\omega)} \quad \text{avec} \quad \alpha_0(\omega) = 4\pi a^3 \frac{\epsilon(\omega) - 1}{\epsilon(\omega) + 2}. \quad (\text{VI.23})$$

L'expression de $\alpha_0(\omega)$ constitue la relation de CLAUSIUS-MOSSOTTI, c'est la polarisabilité statique d'une nanoparticule. En régime dynamique, il faut la corriger pour tenir compte de la réaction de rayonnement et vérifier le théorème optique (conservation de l'énergie), d'où l'expression de α_p .

À la pulsation de résonance, nous avons $\epsilon(\omega) = -2$. Dans ce cas, la polarisabilité particulière se réduit à :

$$\boxed{\alpha_p(\omega) = \frac{6i\pi}{k_0^3}}. \quad (\text{VI.24})$$

Cas d'atomes à deux niveaux

L'expression de la polarisabilité d'un atome à deux niveaux est décrite en détail dans l'annexe M. Le résultat est le suivant :

$$\alpha_a(\omega) = -\frac{3\pi c^3 \Gamma_a}{\omega^3} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma_a/2} \quad (\text{VI.25})$$

où Γ_a est le taux d'émission fluorescente de l'atome considéré comme un paramètre fixe ici et ω_0 la pulsation de résonance.

À la pulsation de résonance, nous avons $\omega = \omega_0$. Dans ce cas, la polarisabilité atomique se réduit à :

$$\boxed{\alpha_a(\omega) = \frac{6i\pi}{k_0^3}}. \quad (\text{VI.26})$$

Remarquons que d'après le théorème optique (voir Sec. M.3 de l'Ann. M), il s'agit de la polarisabilité maximale en module que nous pouvons considérer. Elle est identique à celle obtenue à résonance pour des particules.

VI.1.4 Modélisation du système complet

Finalement on considère un milieu diffusant composé d'une molécule fluorescente représentée par un moment dipolaire source \mathbf{p}_0 placé en \mathbf{r}_0 (taux d'émission Γ). Cette molécule est plongée dans un agrégat de N diffuseurs disposés aléatoirement dans un volume sphérique assimilé à du vide de rayon R et de centre \mathbf{r}_0 . Ces diffuseurs sont représentés par des moments dipolaires \mathbf{p}_i placés en \mathbf{r}_i avec $1 \leq i \leq N$ (polarisabilité résonante $\alpha(\omega) = 6i\pi/k_0^3$). La distance minimale entre les dipôles est donnée par d_{\min} . Le système est représenté sur la figure VI.2.

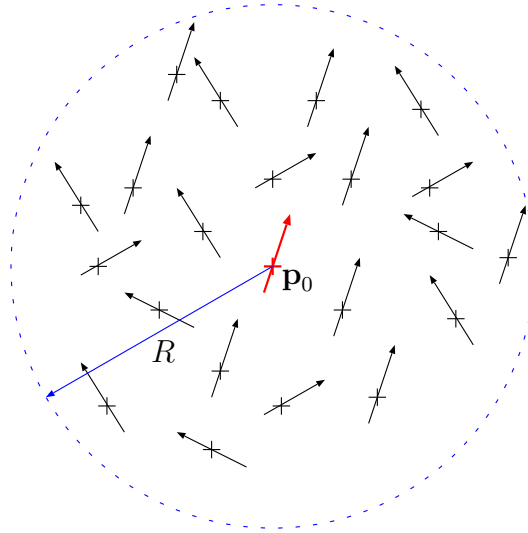


Fig. VI.2 – Représentation de la molécule fluorescence par le dipôle classique \mathbf{p}_0 plongée dans un agrégat de diffuseurs assimilés à des dipôles classiques \mathbf{p}_i .

La première étape consiste maintenant à rechercher numériquement l'expression du taux d'émission normalisé Γ/Γ_0 pour différentes configurations du système (différentes positions des diffuseurs) et ainsi en déduire sa statistique en régime de diffusion multiple.

VI.2 Méthode des dipôles couplés et distribution du taux d'émission

VI.2.1 Calcul numérique du taux d'émission

Pour calculer numériquement le taux d'émission normalisé Γ/Γ_0 , nous devons obtenir l'expression de la partie imaginaire du tenseur de GREEN du système complet au point \mathbf{r}_0 , position de la source fluorescente. Pour cela, il suffit de calculer le champ total à ce même point pour les trois directions possible du dipôle source \mathbf{p}_0 . La recherche de l'expression du

champ passe par la méthode des dipôles couplés déjà utilisée pour des problèmes similaires dans les cristaux (RAHMANI *et al.* 2002) ou les milieux diffusants (LAGENDIJK *et al.* 1997). Elle consiste à écrire l'expression du champ en tout point de l'espace en fonction de tous les dipôles :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \sum_{i=0}^N \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \omega) \mathbf{p}_i = \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}_0 \\ + \mu_0 \omega^2 \sum_{i=1}^N \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \omega) \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, \omega). \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

Ainsi, il est possible d'écrire cette équation pour toutes les positions \mathbf{r}_i des dipôles. En posant $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, \omega)$, on obtient un système de N équations à N inconnues \mathbf{E}_i :

$$\mathbf{E}_j = \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \omega) \mathbf{p}_0 + \alpha(\omega) k_0^2 \sum_{i=0}^N \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \omega) \mathbf{E}_i. \quad (\text{VI.28})$$

Notons que le champ rayonné directement du dipôle sur lui-même diverge (à cause de la singularité de la partie réelle du tenseur de GREEN $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega)$). On calcule ici numériquement uniquement le champ diffusé (ou réfléchi par l'environnement) qui est bien défini et qui suffit pour calculer le rapport Γ/Γ_0 (tenseur de GREEN $\overleftrightarrow{\mathbf{S}}$ dans l'équation VI.17).

Le système VI.28 appelé système de FOLDY-LAX (LAX 1952) peut être résolu par inversion d'une matrice de taille $3N \times 3N$ (N inconnues de trois composantes chacune). La connaissance des champs \mathbf{E}_i nous permet alors de calculer ensuite le champ en tout point en utilisant l'équation VI.27 et en particulier au point \mathbf{r}_0 . Ce champ résultant à la position de la molécule fluorescente correspond à la partie diffusée du rayonnement. La fonction de GREEN du système $\overleftrightarrow{\mathbf{S}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega)$ est alors calculée à partir du champ résultant en faisant un calcul pour les trois orientations possibles de \mathbf{p}_0 . Il est alors possible de calculer le taux d'émission normalisé modifié par l'environnement de la molécule Γ/Γ_0 en appliquant l'équation VI.17.

En faisant varier ensuite les configurations du milieu (les positions des diffuseurs étant définies à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires), on peut calculer la statistique de Γ normalisé, en particulier sa moyenne $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0$ et sa variance $\text{Var} \Gamma / \Gamma_0^2$ (fluctuations).

VI.2.2 Résultats en régime de diffusion multiple

Paramètres numériques

Pour un premier calcul numérique, on souhaite obtenir l'expression de la moyenne et des fluctuations du taux d'émission en fonction de $x = 1/|\rho\alpha|$ où ρ est la densité de diffuseurs dans le milieu. D'après la méthode numérique employée présentée ci-dessus, le temps de calcul augmente fortement avec le nombre de diffuseurs N (du fait de l'augmentation de la dimension de la matrice à inverser). Cela explique pourquoi nous n'allons considérer que des diffuseurs à résonance pour obtenir le régime de diffusion multiple sans avoir recours à un nombre inconsidéré de diffuseurs. Nous choisissons également de fixer ce nombre pour tous les calculs. En fixant le nombre de configurations calculées, on fixe ainsi également le temps de calcul total.

Ainsi, pour une série de configurations, nous fixons le vecteur d'onde $k_0 = \omega/c = 3.33 \mu\text{m}^{-1}$ (correspondant à une longueur d'onde $\lambda = 1.88 \mu\text{m}$), la densité de diffuseurs par $x = 1/|\rho\alpha| = k_0^3/(6\pi\rho)$ et le nombre de diffuseurs N . Le rayon du milieu complexe est alors donné par :

$$R = \frac{1}{k_0} \left(\frac{9xN}{2} \right)^{1/3}. \quad (\text{VI.29})$$

On peut ainsi en déduire l'épaisseur optique :

$$R^* = R/l_s = \left(\frac{9N}{2x^2} \right)^{1/3}. \quad (\text{VI.30})$$

La distance moyenne entre les diffuseurs est quant à elle donnée par :

$$d = \frac{(6\pi x)^{1/3}}{k_0} > d_{\min}. \quad (\text{VI.31})$$

Cette distance devra être supérieure à la distance minimum entre les diffuseurs d_{\min} . Si on appelle n la fraction volumique de diffuseurs (de volume virtuel $4/3\pi (d_{\min}/2)^3$), pour être dans un régime où les corrélations sur les positions des diffuseurs sont négligeables, nous devons retenir $n < S = 0.02$ (on considère que pour des fractions volumiques inférieures à 2%, le milieu est suffisamment dilué). On a alors la relation :

$$d_{\min} \leq \frac{(36Sx)^{1/3}}{k_0}. \quad (\text{VI.32})$$

On retient deux jeux de valeurs numériques, l'un pour $N = 100$ permettant d'obtenir des résultats rapidement sur des systèmes de faible épaisseur optique, et l'autre pour $N = 800$ pour prendre en compte des systèmes plus fortement diffusants :

- dans le cas $N = 100$, le rayon du milieu est donné $R = 2.299x^{1/3}$ (en micromètres) et l'épaisseur optique par $R^* = 7.66x^{-2/3}$. Pour chaque x , le calcul de la distribution de Γ normalisé porte sur 100000 configurations.
- dans le cas $N = 800$, le rayon du milieu est donné $R = 4.598x^{1/3}$ (en micromètres) et l'épaisseur optique par $R^* = 15.33x^{-2/3}$. Pour chaque x , le calcul de la distribution de Γ normalisé porte sur 5000 configurations.

Dans tous les cas, on choisit $d_{\min} = 0.12 \mu\text{m}$. On vérifie alors que pour $x \in [0.1, 10]$, nous sommes bien en présence de diffusion multiple et que les corrélations de position entre diffuseurs sont négligeables.

Distribution du taux d'émission

La figure VI.3 donne un exemple de résultats obtenu sur la distribution du taux d'émission normalisé.

La figure VI.4 donne la moyenne et la variance du taux d'émission normalisé en fonction de la densité de diffuseurs. On rappelle que $x = 1/|\rho\alpha|$.

Il s'agit maintenant d'essayer de trouver une expression de la longueur de diffusion dans un tel système en présence de diffusion multiple. C'est ce qui est réalisé dans la section suivante.

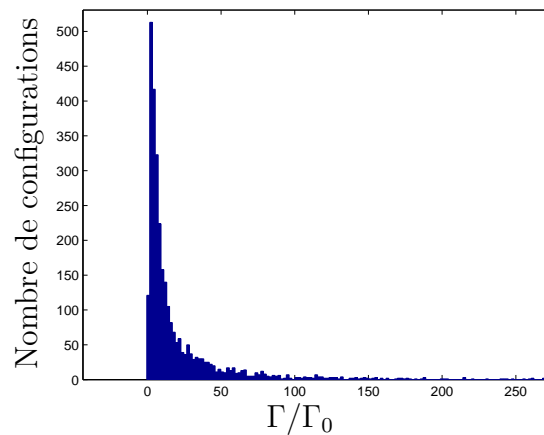


Fig. VI.3 – Exemple de distribution du taux d'émission normalisé pour $N = 800$ diffuseurs et $x = 0.1$. La moyenne est donnée par $\langle \Gamma \rangle / \Gamma_0 = 23.56$ et la variance par $\text{Var} \Gamma / \Gamma_0^2 = [\langle \Gamma^2 \rangle - \langle \Gamma \rangle^2] / \Gamma_0^2 = 2.65 \times 10^3$ ce qui traduit un étalement important de la statistique, beaucoup plus qu'en diffusion simple (FROUFE-PÉREZ et CARMINATI 2007). On rappelle que $x = 1/|\rho\alpha|$.

VI.3 Recherche de la longueur de diffusion : vers un milieu effectif équivalent

On souhaite étudier les variations du taux d'émission normalisé en fonction du produit $k_0 l_s$ ce qui suppose de pouvoir caractériser proprement la longueur de diffusion l_s . *A priori*, étant donné qu'on est dans un régime de forte diffusion, nous sommes en dehors du cas de la diffusion indépendante pour lequel la longueur de diffusion vaut $l_s = 1/(\rho\sigma_{\text{sca}})$. Nous allons donc nous appuyer sur les théories de milieu effectif pour lesquelles l_s est parfaitement défini à partir de la partie imaginaire de l'indice effectif.

Le calcul de la longueur de diffusion réelle du système peut simplement passer par l'utilisation d'un milieu effectif homogène équivalent de constante diélectrique ϵ_{eff} . Soit une onde plane incidente sur un tel milieu. Le champ à l'intérieur du milieu sera donné par :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i\mathbf{k}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] \quad (\text{VI.33})$$

avec $\mathbf{k}_{\text{eff}} = n_{\text{eff}} \mathbf{k}_0$ et $n_{\text{eff}} = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}$. Si on note n_{eff}'' la partie imaginaire de l'indice, et si on considère une onde se propageant selon l'axe des z , on obtient :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [in_{\text{eff}}' k_0 z - i\omega t] \exp [-n_{\text{eff}}'' k_0 z]. \quad (\text{VI.34})$$

La décroissance de l'intensité selon la direction z sera alors donnée par la partie imaginaire de l'indice effectif mais également par la longueur de diffusion puisque les diffuseurs sont non absorbants :

$$I = I_0 \exp [-2n_{\text{eff}}'' k_0 z] = I_0 \exp \left[-\frac{z}{l_s} \right]. \quad (\text{VI.35})$$

On obtient ainsi l'expression de la longueur de diffusion en fonction de la partie imaginaire de l'indice effectif :

$$l_s = \frac{1}{2n_{\text{eff}}'' k_0}. \quad (\text{VI.36})$$

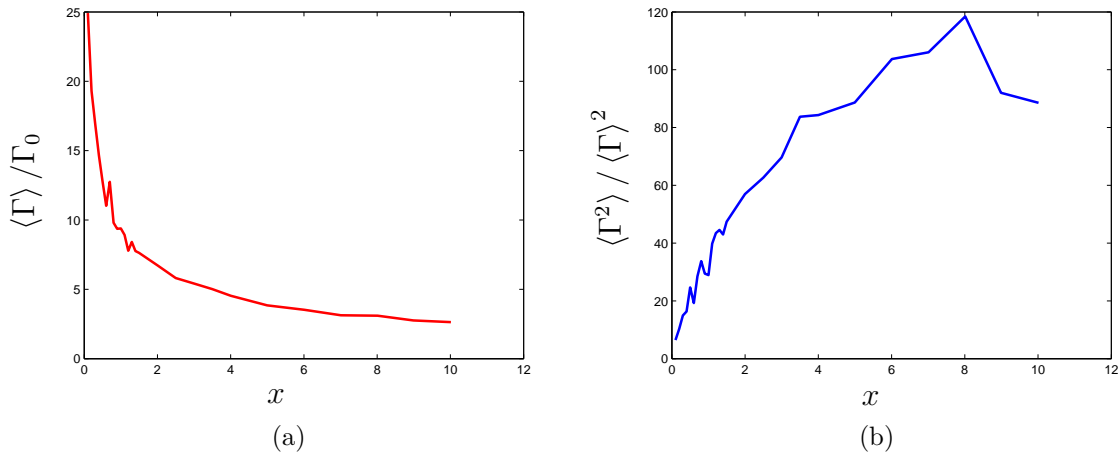


Fig. VI.4 – Moyenne et variance du taux d'émission normalisé dans le cas $N = 800$ diffuseurs. On rappelle que $x = 1/|\rho\alpha|$.

Il existe diverses théories permettant d'obtenir une expression de la permittivité diélectrique effective ϵ_{eff} du milieu équivalent. On a par exemple :

- $\epsilon_{\text{eff}} = 1 + \rho\alpha$, expression valable dans un milieu très dilué (FROUFE-PÉREZ et CARMINATI 2007) avec prise en compte de la diffusion multiple. Dans ce cas, la longueur de diffusion vaut simplement $l_s = 1/(\rho\sigma_{\text{sca}})$, expression obtenue sous l'hypothèse de diffusion indépendante.
- $\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = (3 + 2\rho\alpha) / (3 - \rho\alpha)$, formule dite de Maxwell-GARNETT prenant en compte la diffusion multiple ainsi que les corrélations de positions entre diffuseurs mais négligeant la diffusion récurrente (c'est à dire les chemins de diffusion passant au moins deux fois par un même diffuseur) (MALLET *et al.* 2005; GUÉRIN *et al.* 2006).

Sans entrer pour l'instant dans le détail du calcul du taux d'émission effectif Γ_{eff} de la molécule placée dans un milieu homogène équivalent, on présente sur la figure VI.5 la comparaison du taux d'émission moyen $\langle \Gamma \rangle$ avec le taux d'émission effectif calculé en utilisant la formule de Maxwell-GARNETT.

Pour les grandes densités de diffuseurs ρ , on constate un net désaccord entre les deux courbes ce qui prouve qu'au-delà d'une certaine compacité du milieu diffusant, l'expression de Maxwell-GARNETT n'est plus satisfaisante. On se propose donc d'établir une nouvelle formulation de la constante diélectrique effective en prenant en compte en particulier la première correction de diffusion dépendante et ce toujours en diffusion multiple. Elle consistera à négliger les corrélations de positions mais à prendre en compte la diffusion récurrente entre deux diffuseurs.

Dans le but de donner une expression de la permittivité diélectrique effective ϵ_{eff} du milieu homogène équivalent, nous recherchons dans un premier temps une équation exacte pour le champ moyenné, comparable à l'équation de DYSON (voir Ann. A). La deuxième phase consistera à simplifier cette équation en faisant des hypothèses sur les corrélations de positions des particules et sur la présence de diffusion récurrente. Enfin, nous rechercherons l'expression du tenseur de GREEN du milieu effectif afin d'en déduire l'expression du taux d'émission fluorescente effectif. Toute cette démarche est adaptée des travaux de Bart van TIGGELEN (TIGGELEN *et al.* 1990) et de Jean DALIBARD (MORICE *et al.* 1995).

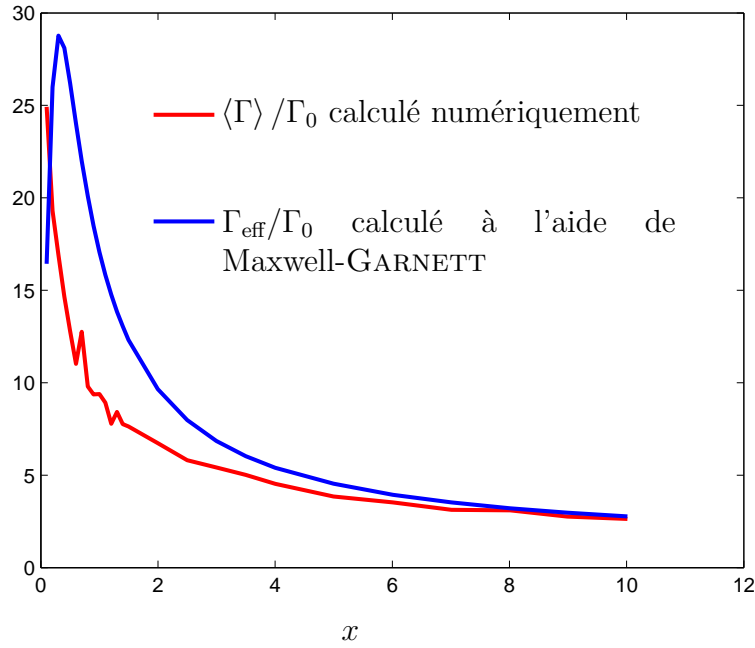


Fig. VI.5 – Comparaison des valeurs de $\langle \Gamma \rangle$ avec Γ_{eff} calculé en utilisant la formule de Maxwell-GARNETT dans le cas $N = 800$ diffuseurs. On rappelle que $x = 1/|\rho\alpha|$.

VI.3.1 Équation du champ moyen

Le moment dipolaire \mathbf{p}_i est donné par le champ total :

$$\mathbf{p}_i = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, \omega) = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i, \omega) + \sum_{j \neq i} \alpha(\omega) \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \omega) \mathbf{p}_j. \quad (\text{VI.37})$$

Le terme \mathbf{E}_0 correspond au champ incident créé par la molécule fluorescente, le terme de droite correspond au champ créé par les autres dipôles. Sur le même principe, nous pouvons également écrire l'expression du champ en tout point de la cavité :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) + \sum_i \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \omega) \mathbf{p}_i. \quad (\text{VI.38})$$

Afin de simplifier les notations, on choisit d'omettre l'argument ω dans l'expression du tenseur de GREEN et du champ dans la suite. La densité de polarisation est donnée par :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (\text{VI.39})$$

En réécrivant l'équation VI.38 sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mu_0 \omega^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) d^3 \mathbf{r}', \quad (\text{VI.40})$$

on peut injecter l'expression de la densité de polarisation pour obtenir :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mu_0 \omega^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{P}(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (\text{VI.41})$$

Finalement, en moyennant, on aboutit à :

$$\boxed{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mu_0 \omega^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle d^3 \mathbf{r}'}, \quad (\text{VI.42})$$

équation équivalente à l'équation de DYSON. On peut également réaliser le même travail sur l'équation VI.37 en l'écrivant sous la forme :

$$\mathbf{p}_i = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i) + \alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}') \sum_{j \neq i} \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}'. \quad (\text{VI.43})$$

En multipliant cette expression par $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, puis en sommant sur i et enfin en prenant la moyenne, on obtient :

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle = \alpha \epsilon_0 \left\langle \sum_i \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left\langle \sum_i \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \mathbf{p}_j \right\rangle d^3 \mathbf{r}'. \quad (\text{VI.44})$$

On introduit maintenant les grandeurs suivantes :

$$\rho(\mathbf{r}) = \left\langle \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle \quad \text{densité moyenne de diffuseurs et} \quad (\text{VI.45})$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left\langle \sum_i \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \right\rangle \quad \text{fonction de corrélation de paire.} \quad (\text{VI.46})$$

On suppose que la densité moyenne de diffuseurs est uniforme dans le milieu $\rho(\mathbf{r}) = \rho$. On pose de plus habituellement que

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \rho^2 [1 + g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (\text{VI.47})$$

avec $g(\mathbf{R} = \mathbf{0}) = -1$. Dire qu'on néglige les corrélations entre particules revient à dire que $g(\mathbf{R} \neq \mathbf{0}) = 0$. On définit enfin :

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle = \frac{\rho}{f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \left\langle \sum_i \sum_{j \neq i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j) \right\rangle \quad (\text{VI.48})$$

qui s'interprète comme la densité de polarisation au point \mathbf{r}' sachant qu'il y a un dipôle au point \mathbf{r} . Finalement, l'équation VI.44 devient :

$$\boxed{\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle = \alpha \epsilon_0 \left\langle \sum_i \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle + \alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [1 + g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle d^3 \mathbf{r}'}. \quad (\text{VI.49})$$

Il est maintenant possible d'éliminer le champ incident \mathbf{E}_0 entre les équations VI.42 et VI.49 ce qui donne :

$$\boxed{\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle - \rho \alpha \epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \rho \alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \{ [1 + g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle \} d^3 \mathbf{r}'}. \quad (\text{VI.50})$$

Cette équation exacte constitue le pilier du calcul de la permittivité effective du milieu homogène équivalent. Toute la difficulté du problème réside maintenant dans la recherche de l'expression de $\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle$.

VI.3.2 Expression de la permittivité effective

Sans diffusion récurrente

Dans le cas où il n'y a pas de diffusion récurrente, on pose simplement :

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle \quad (\text{VI.51})$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas d'interactions multiples entre les diffuseurs. Par contre, la diffusion multiple est bien prise en compte ainsi que les corrélations de positions. L'équation VI.50 devient :

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle - \rho\alpha\epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = \rho\alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{VI.52})$$

En remarquant que $\langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle = \epsilon_0 [\epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k}) - 1] \langle \mathbf{E}(\mathbf{k}) \rangle$ et en prenant la transformée de FOURIER de l'équation VI.52, on a :

$$\epsilon_{\text{eff}} \overleftrightarrow{\mathbf{I}}(\mathbf{k}) = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \rho\alpha \left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \rho\alpha k_0^2 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) g(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] d^3\mathbf{R} \right]^{-1}. \quad (\text{VI.53})$$

On rappelle que le tenseur de GREEN est singulier en $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Nous avons :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) = \text{VP} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{3k_0^2} \delta(\mathbf{R}) \quad (\text{VI.54})$$

dans le cas où l'opérateur valeur principale (VP) est défini à partir d'un volume d'exclusion sphérique. Cette décomposition reportée dans l'équation précédente donne :

$$\boxed{\epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\mathbf{I}} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \rho\alpha \left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\rho\alpha}{3} \overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \rho\alpha k_0^2 \int \text{VP} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) g(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] d^3\mathbf{R} \right]^{-1}}. \quad (\text{VI.55})$$

Remarque : Dans le cas où il n'y a pas de corrélations ($g(\mathbf{R} \neq \mathbf{0}) = 0$), on obtient

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = \frac{3 + 2\rho\alpha(\omega)}{3 - \rho\alpha(\omega)} \quad (\text{VI.56})$$

qui constitue la formule de Maxwell-GARNETT ou de LORENTZ-LORENZ (MALLET *et al.* 2005; GUÉRIN *et al.* 2006).

L'équation VI.55 fournit une correction à la formule de Maxwell-GARNETT en prenant en compte les corrélations dues aux positions des atomes. Cependant, nous nous plaçons dans un régime de faible diffusion pour lequel les interactions multiples entre les atomes sont négligeables. La figure VI.6 décrit la situation étudiée à partir d'une représentation en diagrammes (voir Ann. A pour une présentation des diagrammes).

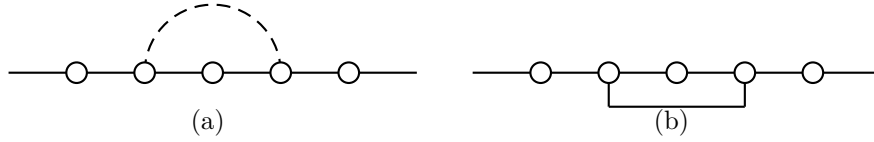


Fig. VI.6 – Représentation diagrammatique de la situation prise en compte par l'équation VI.55. Pour l'instant, seules les corrélations entre atomes sont décrites (sous-figure (a)), les interactions multiples ne le sont pas encore (sous-figure (b)).

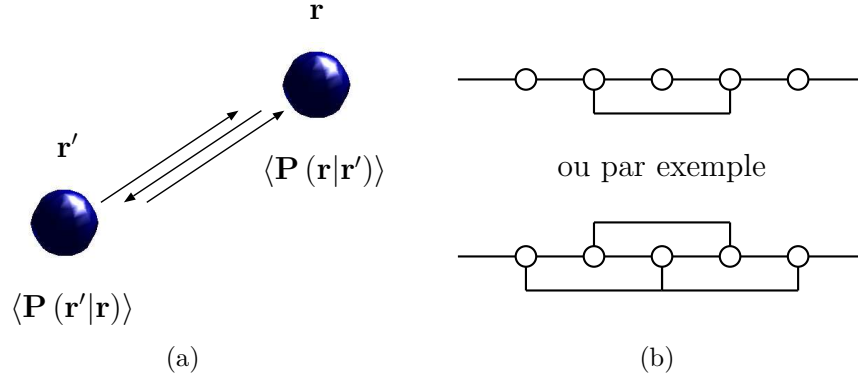


Fig. VI.7 – On prend maintenant en compte les interactions multiples entre paires de particules uniquement telles que représentées schématiquement sur la sous-figure (a) et diagrammatiquement sur la sous-figure (b).

Avec diffusion récurrente entre paires de particules

Dans ce cas, la densité de polarisabilité $\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rangle$ ne dépend que de $\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rangle$ telle que représentée par la figure VI.7. Une étude semblable a déjà été menée par (TIGGELEN *et al.* 1990) en utilisant une approche diagrammatique ou encore par (MORICE *et al.* 1995) dans le cas de gaz de BOSE dilués.

On peut écrire ainsi le système :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle + \alpha \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rangle, \\ \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \rangle = \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle + \alpha \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle. \end{cases} \quad (\text{VI.57})$$

La résolution de ce système donne trivialement :

$$\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}'|\mathbf{r}) \rangle = \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 \right]^{-1} \left[\langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle + \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle \right]. \quad (\text{VI.58})$$

Afin de simplifier l'écriture, nous posons maintenant $\vec{\mathbf{G}}_0 = \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ et $g = g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$. On insère maintenant le résultat de l'équation VI.58 dans l'équation VI.50, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle - \rho \alpha \epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle = & \rho \alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0(1+g) \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2 \right]^{-1} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle d^3 \mathbf{r}' \\ & + \rho \alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0(1+g) \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2 \right]^{-1} \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0 \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle d^3 \mathbf{r}' \\ & - \rho \alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0 \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VI.59})$$

En remarquant que le dernier terme annule un terme dans la série obtenue par le développement de l'opérateur $[\dots]^{-1}$ dans la première intégrale et en notant que $\vec{\mathbf{G}}_0$ commute avec $\vec{\mathbf{I}}$ et donc avec $[\dots]^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle - \rho\alpha\epsilon_0 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle &= \rho\alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0 g(\mathbf{P}(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}' \\ &+ \rho\alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0 (1+g) \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2} \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2} \right]^{-1} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}') \rangle d^3\mathbf{r}' \\ &+ \rho\alpha k_0^2 \int \vec{\mathbf{G}}_0 (1+g) \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0 \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2} \right]^{-1} \langle \mathbf{P}(\mathbf{r}) \rangle d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

On réécrit maintenant l'équation dans l'espace de FOURIER en introduisant la permittivité diélectrique effective qui vérifie $\langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle = \epsilon_0 [\epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k}) - 1] \langle \mathbf{E}(\mathbf{k}) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle - \rho\alpha \frac{\langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle}{\epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k}) - 1} &= \rho\alpha k_0^2 \left[\int \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) g(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] d^3\mathbf{R} \right] \langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle \\ &+ \rho\alpha^3 k_0^6 \left[\int \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 3}(\mathbf{R}) \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2}(\mathbf{R}) \right]^{-1} (1+g(\mathbf{R})) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] d^3\mathbf{R} \right] \langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle \\ &+ \rho\alpha^2 k_0^4 \left[\int \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2}(\mathbf{R}) \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2}(\mathbf{R}) \right]^{-1} (1+g(\mathbf{R})) d^3\mathbf{R} \right] \langle \mathbf{P}(\mathbf{k}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{VI.61})$$

Tout comme dans le cas précédent, nous pouvons décomposer le tenseur de GREEN en faisant apparaître la singularité en $\mathbf{R} = 0$. Cette décomposition ne contribue en réalité que dans le cas de la première intégrale. En effet, les intégrands des autres sont nuls en $\mathbf{R} = 0$ car nous avons $g(\mathbf{R} = 0) = -1$ (fonction de corrélation de paire nulle). Finalement, on aboutit à l'expression de la permittivité diélectrique relative effective :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k}) \vec{\mathbf{I}} &= \vec{\mathbf{I}} + \rho\alpha \left[\vec{\mathbf{I}} + \vec{\mathbf{H}} \right]^{-1} \quad \text{avec } \vec{\mathbf{H}} \text{ donné par} \\ \vec{\mathbf{H}} &= -\frac{\rho\alpha}{3} \vec{\mathbf{I}} - \rho\alpha k_0^2 \int \text{VP} \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) g(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] d^3\mathbf{R} \\ &\quad - \rho\alpha^2 k_0^4 \int \left[\vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2}(\mathbf{R}) + \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 3}(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] \right] \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^{\leftrightarrow 2}(\mathbf{R}) \right]^{-1} (1+g(\mathbf{R})) d^3\mathbf{R} \end{aligned}$$

(VI.62)

L'équation VI.62 prend en compte les interactions multiples entre paires de diffuseurs (diffusion récurrente) d'ordre infini et également les corrélations de positions entre particules.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas de la résonance et on considère que le milieu est suffisamment dilué pour négliger les effets de corrélations de positions. Dans un premier temps, nous évaluons l'expression VI.62 dans ces conditions puis nous déterminons le taux d'émission fluorescente effectif correspondant.

Le but de ce paragraphe est de calculer l'intégrale intervenant dans l'expression de la permittivité effective (équation VI.62) dans le cas où la polarisabilité est calculée à résonance (équation VI.25) et en négligeant les corrélations de positions. On rappelle que l'expression

du tenseur de GREEN dans le vide est donnée par (voir Ann. B) :

$$\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) = \frac{e^{ik_0R}}{4\pi R} \left[\vec{\mathbf{P}} + \frac{1 - ik_0R}{(k_0R)^2} \left(2\vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{P}} \right) \right] \quad (\text{VI.63})$$

où $k_0 = \omega/c$ est le vecteur d'onde dans le vide, $\vec{\mathbf{U}} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, l'opérateur projection selon la direction $\mathbf{u} = \mathbf{R}/R$ et $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{I}} - \vec{\mathbf{U}}$, l'opérateur de projection transverse. En posant :

$$\begin{cases} \beta(R) &= \frac{e^{ik_0R}}{4\pi k_0 R} \left[1 - \frac{1}{ik_0R} - \frac{1}{(k_0R)^2} \right], \\ \gamma(R) &= 2 \frac{e^{ik_0R}}{4\pi k_0 R} \left[\frac{1}{ik_0R} + \frac{1}{(k_0R)^2} \right], \end{cases} \quad (\text{VI.64})$$

on obtient :

$$\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{R}) = k_0 \left[\beta(R) \vec{\mathbf{P}} + \gamma(R) \vec{\mathbf{U}} \right]. \quad (\text{VI.65})$$

On souhaite alors calculer l'intégrale :

$$I = \int \left[\vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) + \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0^3(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}] \right] \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) \right]^{-1} d^3\mathbf{R}. \quad (\text{VI.66})$$

Remarquons tout d'abord que la permittivité $\epsilon_{\text{eff}}(\mathbf{k})$ est non-locale. On s'attend à une non-localité sur une échelle de l'ordre de la distance entre diffuseurs. Nous allons la négliger dans une première approche pour nous placer en $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$, vecteur d'onde du champ incident. Il s'agit donc de calculer :

$$I = \int \left[\vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) + \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0^3(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}] \right] \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) \right]^{-1} d^3\mathbf{R}. \quad (\text{VI.67})$$

L'opérateur $[\dots]^{-1}$ peut se développer en série sous la forme :

$$\left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) \right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) \right]^n. \quad (\text{VI.68})$$

Ainsi, l'intégrand se met sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left[\vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) + \alpha k_0^2 \vec{\mathbf{G}}_0^3(\mathbf{R}) \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}] \right] \left[\vec{\mathbf{I}} - \alpha^2 k_0^4 \vec{\mathbf{G}}_0^2(\mathbf{R}) \right]^{-1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n \vec{\mathbf{G}}_0^n(\mathbf{R}) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n k_0^n \left[\beta(R) \vec{\mathbf{P}} + \gamma(R) \vec{\mathbf{U}} \right]^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n k_0^n \left[\beta^n(R) \vec{\mathbf{P}} + \gamma^n(R) \vec{\mathbf{U}} \right] \\ &= \frac{k_0^2 \beta^2(R) + \alpha k_0^5 \beta^3(R) \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}]}{1 - \alpha^2 k_0^6 \beta^2(R)} \vec{\mathbf{P}} + \frac{k_0^2 \gamma^2(R) + \alpha k_0^5 \gamma^3(R) \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}]}{1 - \alpha^2 k_0^6 \gamma^2(R)} \vec{\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.69})$$

On écrit $d^3\mathbf{R} = R^2 dR d\Omega$ et on remarque que

$$\int_{4\pi} \vec{\mathbf{I}} d\Omega = 4\pi \vec{\mathbf{I}} \quad ; \quad \int_{4\pi} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} d\Omega = \frac{4\pi}{3} \vec{\mathbf{I}} \quad ; \quad \int_{4\pi} \vec{\mathbf{I}} \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}] d\Omega = 4\pi j_0(k_0 R) \vec{\mathbf{I}} \quad ;$$

$$\int_{4\pi} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \exp[-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R}] d\Omega = 4\pi \frac{j_1(k_0 R)}{k_0 R} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \left[4\pi j_0(k_0 R) - 12\pi \frac{j_1(k_0 R)}{k_0 R} \right] \frac{\mathbf{k}_0 \otimes \mathbf{k}_0}{k_0^2}. \quad (\text{VI.70})$$

Les fonctions j_n sont les fonctions de BESSEL sphériques d'ordre n . On peut alors se restreindre à une intégrale sur le module de \mathbf{R} . De plus, la source fluorescente émet de manière isotrope dans toutes les directions (il y a symétrie centrale par rapport à la position de la molécule fluorescente dans le cas du système homogène effectif). On doit donc moyenner sur les directions de \mathbf{k}_0 . Finalement, on obtient :

$$I = \frac{4\pi}{3} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \left[\int_0^\infty \left\{ 2 \frac{k_0^2 \beta^2(R) + \alpha k_0^5 \beta^3(R) j_0(k_0 R)}{1 - \alpha^2 k_0^6 \beta^2(R)} + \frac{k_0^2 \gamma^2(R) + \alpha k_0^5 \gamma^3(R) j_0(k_0 R)}{1 - \alpha^2 k_0^6 \gamma^2(R)} \right\} R^2 dR \right]. \quad (\text{VI.71})$$

À résonance, $\alpha(\omega) = 6i\pi/k_0^3$. On peut donc effectuer le changement de variables $k_0 R = x$ dans l'intégrale pour finalement obtenir l'expression simplifiée de la permittivité effective :

$$\epsilon_{\text{eff}} = 1 + \frac{\rho\alpha}{1 - \frac{\rho\alpha}{3} + \frac{48\pi^3\rho}{k_0^3} \int_0^\infty \left[2 \frac{\beta^2(x) + 6i\pi\beta^3(x) j_0(x)}{1 + 36\pi^2\beta^2(x)} + \frac{\gamma^2(x) + 6i\pi\gamma^3(x) j_0(x)}{1 + 36\pi^2\gamma^2(x)} \right] x^2 dx} \quad (\text{VI.72})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \beta(x) &= \frac{e^{ix}}{4\pi x} \left[1 - \frac{1}{ix} - \frac{1}{x^2} \right], \\ \gamma(x) &= 2 \frac{e^{ix}}{4\pi x} \left[\frac{1}{ix} + \frac{1}{x^2} \right]. \end{cases} \quad (\text{VI.73})$$

L'intégrale intervenant dans cette équation ne dépend d'aucun paramètre et peut donc *a priori* être évaluée. Néanmoins, l'intégrand pris pour $x \rightarrow \infty$ est équivalent à $\exp[2ix]/(8\pi^2)$. L'intégrale telle que posée ne converge donc pas. Cependant, on peut considérer physiquement que deux diffuseurs très éloignés n'interagiront pas entre-eux du fait de l'écrantage par les autres diffuseurs. Pour prendre en compte cela, nous faisons intervenir une partie imaginaire fictive dans l'expression du vecteur d'onde :

$$k_0 = k'_0 + ik''_0. \quad (\text{VI.74})$$

La grandeur k''_0 n'est qu'un artifice de calcul pour rendre l'intégrale convergente. Une fois le calcul de cette dernière effectuée, nous retiendrons $k''_0 \rightarrow 0$ dans l'expression finale. Ainsi, nous allons calculer :

$$\int_0^\infty \left[2 \frac{\beta^2(x) + 6i\pi\beta^3(x) j_0(x)}{1 + 36\pi^2\beta^2(x)} + \frac{\gamma^2(x) + 6i\pi\gamma^3(x) j_0(x)}{1 + 36\pi^2\gamma^2(x)} \right] x^2 dx \quad (\text{VI.75})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \beta(x) &= \frac{e^{ix-\eta x}}{4\pi x} \left[1 - \frac{1}{ix} - \frac{1}{x^2} \right], \\ \gamma(x) &= 2 \frac{e^{ix-\eta x}}{4\pi x} \left[\frac{1}{ix} + \frac{1}{x^2} \right]. \end{cases} \quad (\text{VI.76})$$

Pour η suffisamment petit, nous pouvons retenir M suffisamment grand tel que :

$$\int_0^\infty dx = \underbrace{\int_0^M dx}_{\eta=0, \text{calcul numérique}} + \underbrace{\int_M^\infty dx}_{\text{équivalent de l'intégrand pour } x \rightarrow \infty, \text{calcul analytique puis } \eta \rightarrow 0}. \quad (\text{VI.77})$$

On obtient ainsi la valeur : $\boxed{3.93 \times 10^{-3} + 7.32 \times 10^{-3}i}$.

VI.3.3 Fonction de Green du milieu effectif et taux d'émission

En définissant le permittivité effective dans l'équation VI.72, nous venons de remplacer l'agrégat d'atomes dilués à résonance par un milieu homogène effectif tel que représenté sur la figure VI.8.

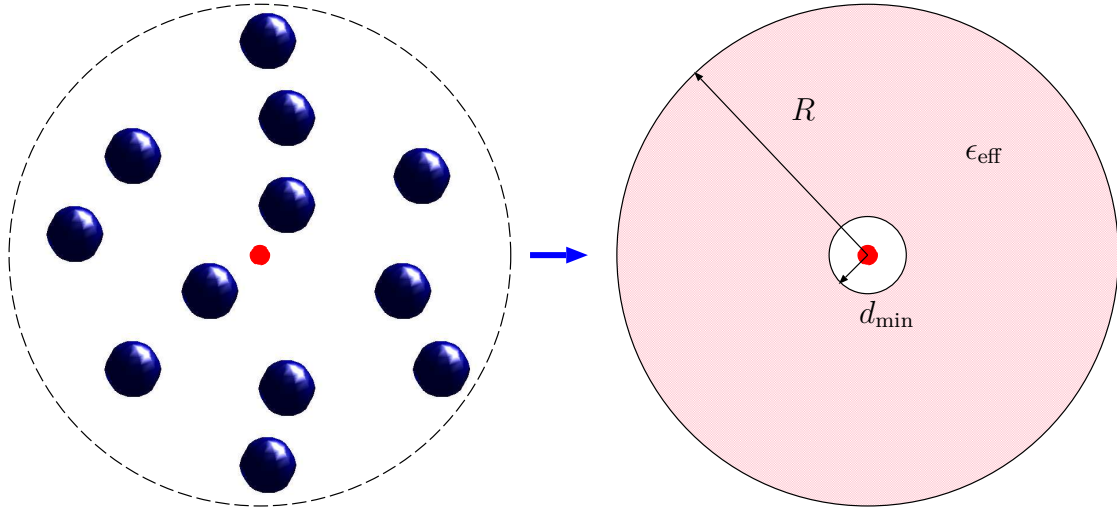


Fig. VI.8 – Passage de l'agrégat d'atomes au milieu homogène effectif de permittivité ϵ_{eff} coincé entre deux sphères de rayon d_{min} et R .

Il s'agit maintenant de déterminer la fonction de GREEN d'un tel système pour ensuite en déduire le taux d'émission fluorescente effectif. Le résultat complet est relaté dans (DUNG *et al.* 2000). Le tenseur de GREEN au point \mathbf{r}_0 (position de la molécule fluorescente) est donné par :

$$\vec{\mathbf{G}}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) = \frac{ik_0}{6\pi} C_N^{(33)}(\omega) \vec{\mathbf{I}}, \quad (\text{VI.78})$$

avec

$$\begin{cases} A_N^{(13)}(\omega) = \frac{T_{F1}^N T_{F2}^N T_{P1}^N}{T_{P1}^N + T_{F1}^N R_{P1}^N R_{F2}^N}, \\ C_N^{(33)}(\omega) = \frac{A_N^{(13)}}{T_{P2}^{(N)}} \left[\frac{R_{P2}^{(N)}}{T_{F1}^N} + \frac{R_{P1}^N}{T_{P1}^N} \right], \end{cases} \quad (\text{VI.79})$$

où les fonctions R et T sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{Pf}^N = \frac{k_{f+1}H_{(f+1)f}H'_{ff} - k_fH_{ff}H'_{(f+1)f}}{k_{f+1}J'_{ff}H_{(f+1)f} - k_fJ_{ff}H'_{(f+1)f}}, \\ R_{Ff}^N = \frac{k_{f+1}J_{(f+1)f}J'_{ff} - k_fJ_{ff}J'_{(f+1)f}}{k_{f+1}H'_{ff}J_{(f+1)f} - k_fH_{ff}J'_{(f+1)f}}, \\ T_{Pf}^N = \frac{k_{f+1} \left[J'_{(f+1)f}H_{(f+1)f} - J_{(f+1)f}H'_{(f+1)f} \right]}{k_{f+1}J'_{ff}H_{(f+1)f} - k_fJ_{ff}H'_{(f+1)f}}, \\ T_{Ff}^N = \frac{k_{f+1} \left[H'_{(f+1)f}J_{(f+1)f} - H_{(f+1)f}J'_{(f+1)f} \right]}{k_{f+1}H'_{ff}J_{(f+1)f} - k_fH_{ff}J'_{(f+1)f}}, \end{array} \right. \quad (\text{VI.80})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{il} = j_1(k_i R_l), \\ H_{il} = h_1^{(1)}(k_i R_l), \\ J'_{il} = \frac{1}{\rho} \frac{d\{\rho j_1(\rho)\}}{d\rho} \Big|_{\rho=k_i R_l}, \\ H'_{il} = \frac{1}{\rho} \frac{d\{\rho h_1^{(1)}(\rho)\}}{d\rho} \Big|_{\rho=k_i R_l}. \end{array} \right. \quad (\text{VI.81})$$

Les fonctions j_n et $h_n^{(1)}$ sont respectivement les fonctions de BESSEL et de HANKEL sphériques d'ordre n . k_i représente le module du vecteur d'onde dans le milieu i ($k_2 = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}k_0$) et R_i représente le rayon intérieur du milieu i . Le milieu 3 correspond au volume d'exclusion autour de la molécule fluorescente ($r < R_2 = d_{\text{min}}$), le milieu 2 est le milieu homogène effectif ($R_2 < r < R_1 = R$) et le milieu 1 est le vide extérieur. La partie imaginaire du tenseur de GREEN donne enfin le taux d'émission fluorescente effectif :

$$\frac{\Gamma_{\text{eff}}}{\Gamma_0} = \frac{6\pi}{k_0} \mathbf{u} \cdot \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0, \omega) \right] \mathbf{u}, \quad (\text{VI.82})$$

indépendant de la direction \mathbf{u} puisque $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{eff}}$ est porté par le tenseur identité.

VI.4 Résultats

Nous allons maintenant comparer le taux d'émission effectif Γ_{eff} calculé à l'aide de la formule de Maxwell-GARNETT et de la théorie prenant en compte la diffusion récurrente entre paires de particules avec le taux moyen $\langle \Gamma \rangle$. L'ensemble de ces résultats est représenté sur la figure VI.9.

On constate que la théorie prenant en compte la première correction de diffusion dépendante (prise en compte de la diffusion récurrente entre paires de diffuseurs) procure des résultats en accord avec le calcul numérique complet sur une plus grande amplitude de densité ρ , surtout dans le cas de grands systèmes (i.e. $N = 800$). Cependant, cette théorie ne rend

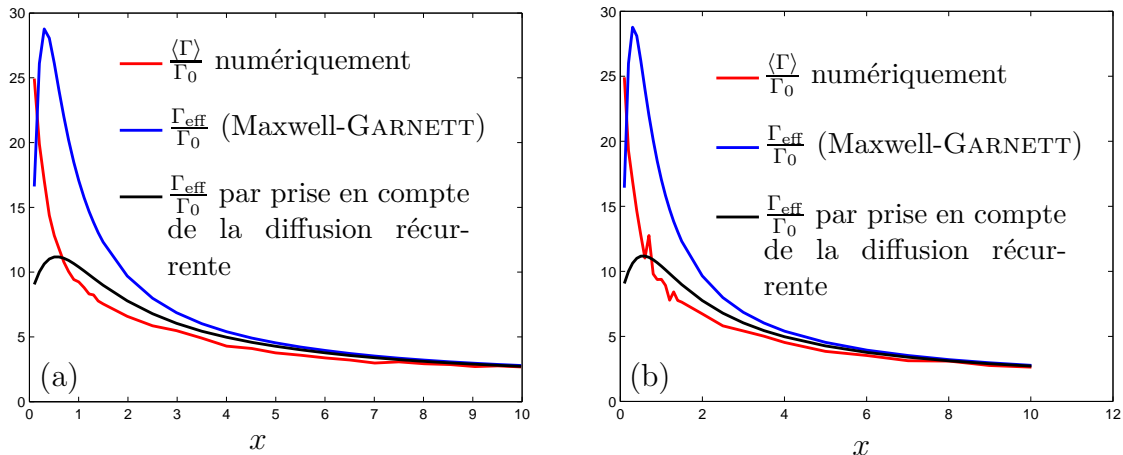


Fig. VI.9 – Comparaison des valeurs de $\langle \Gamma \rangle$ avec Γ_{eff} calculé en utilisant la formule de Maxwell-GARNETT et la théorie prenant en compte la première correction de diffusion dépendante dans le cas $N = 100$ diffuseurs (a) et $N = 800$ diffuseurs (b). On rappelle que x représente le rapport $1/|\rho\alpha|$.

pas compte totalement de l'évolution du taux d'émission moyen, en particulier sur de petits systèmes (i.e. $N = 100$) où des effets de taille finie pourraient intervenir. Dans les régimes où la densité de diffuseurs est élevée (i.e. $x \rightarrow 0$), d'autres effets sont peut-être à considérer comme la diffusion récurrente faisant intervenir plus de deux particules.

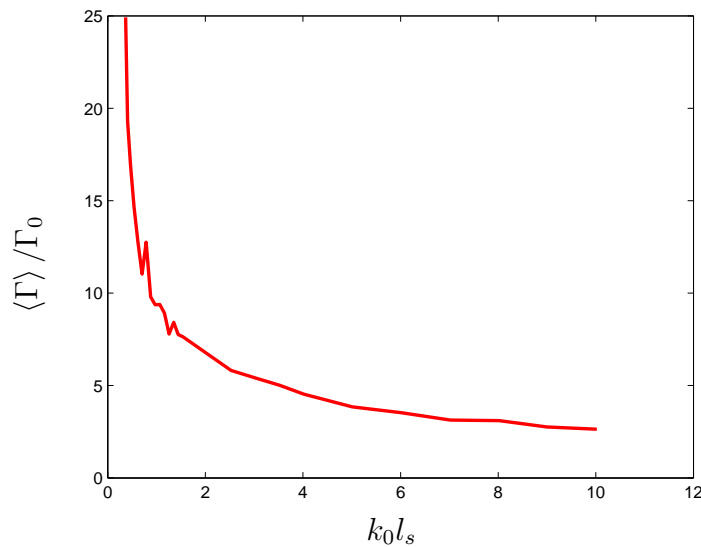


Fig. VI.10 – Tracé du taux d'émission moyen en fonction du produit $k_0 l_s$ dans le cas $N = 800$ diffuseurs.

La figure VI.10 représente l'évolution de la moyenne du taux d'émission normalisé en fonction du produit $k_0 l_s$. La longueur de diffusion est calculée ici à partir de l'approche de Maxwell-GARNETT corrigée par la prise en compte des interactions multiples entre paires de diffuseurs. C'est un premier résultat obtenu pour une étude préliminaire qui ouvre cependant des perspectives intéressantes : étude de la fluorescence comme marqueur du régime de diffusion, de l'environnement local (corrélations de positions, en cours d'étude), de la

corrélation c_0 . Sur ce dernier point, il a été récemment montré que la densité d'états locale (proportionnelle à la partie imaginaire de la fonction de GREEN) est reliée à la corrélation c_0 (TIGGELEN et SKIPETROV 2006).

VI.5 Conclusion

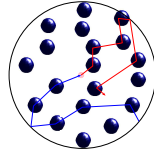
Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la modification du taux de fluorescence d'une molécule unique placée dans un agrégat de diffuseurs représentés par des particules diélectriques ou des atomes à résonance. Nous avons développé un modèle basé sur un milieu effectif homogène et équivalent afin de calculer la longueur de diffusion exacte du système dans le régime de diffusion multiple. Ce modèle prenant en compte la première correction de diffusion dépendante rend compte en partie de l'évolution du taux d'émission. Les résultats préliminaires obtenus doivent faire l'objet de travaux plus poussés pour considérer des effets négligés dans la modélisation mais jouant un rôle majeur comme par exemple les effets de taille finie ou de diffusion récurrente entre des particules plus nombreuses.

Chapitre VII

Émission et retournement temporel d'ondes électromagnétiques en présence de diffusion en champ proche

Table des matières

VII.1	Calcul du champ dans le problème direct	140
VII.2	Calcul du champ retourné temporellement	143
VII.2.1	Expression du champ retourné temporellement sur la paroi de la cavité	143
VII.2.2	Expression du champ total retourné temporellement	144
VII.3	Conclusion	146



Le retournement temporel des ondes acoustiques est devenu un domaine très actif, avec des applications allant de la détection d'objets à l'imagerie médicale en passant par les télécommunications (FINK 1997; FINK *et al.* 2000). Habituellement, le retournement temporel est réalisé en utilisant des impulsions acoustiques émises dans une cavité entourée d'une barrette de transducteurs à large bande spectrale appelé miroir à retournement temporel ou MRT (*Time-Reversal Mirror* ou TRM en anglais). Le principe d'une expérience classique de retournement temporel est représenté sur la figure VII.1. Le retournement temporel des ondes est possible car l'équation d'onde fait apparaître un terme temporel sous la forme d'une dérivée partielle d'ordre 2. Le fait de passer de t en $-t$ ne change donc pas l'équation.

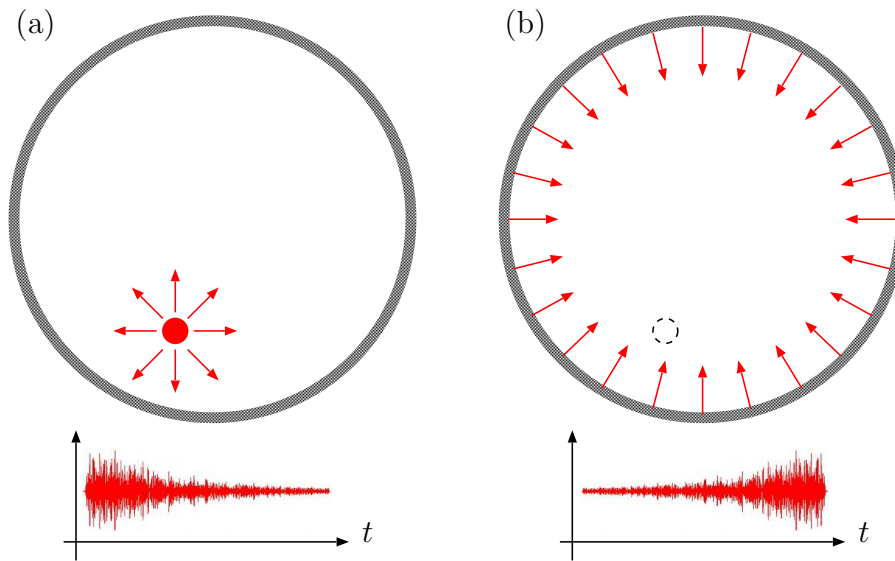


Fig. VII.1 – Représentation d'une expérience typique de retournement temporel. La figure (a) représente la situation directe où l'impulsion émise par la source ponctuelle est enregistrée sur la barrette de transducteurs (cercle épais). Le signal temporel reçu est tracé en rouge. La figure (b) représente la situation retournée temporellement où les transducteurs ré-émettent l'onde retournée temporellement. En l'absence de source, l'onde focalise vers la position de la source avec un spot de taille limitée par la diffraction. Pour chaque situation, un exemple de signal enregistré et réémis est représenté. Il s'agit d'un cas où la cavité contient un milieu diffusant, cas choisi car plus représentatif.

Récemment, le retournement des ondes électromagnétiques a été démontré dans le domaine des micro-ondes en utilisant un MRT fait d'une simple antenne placée dans une cavité fermée et réfléchissante (LEROSEY *et al.* 2004). Le MRT est placé en champ lointain par rapport à la source et l'onde retournée temporellement focalise en direction de la position

de la source, la source étant passive, voire absente. Dans un milieu homogène, la tâche focale est dans ce cas limitée par la diffraction à une taille de l'ordre de $\lambda/2$, λ étant la longueur d'onde centrale du faisceau (DRAEGER et FINK 1997). Le retournement temporel au-delà de la limite de diffraction a été démontré pour la première fois en acoustique, en utilisant un puits acoustique (i.e. une source active retournée temporellement) placée au point focal (ROSNY et FINK 2002) (voir Fig. VII.2).

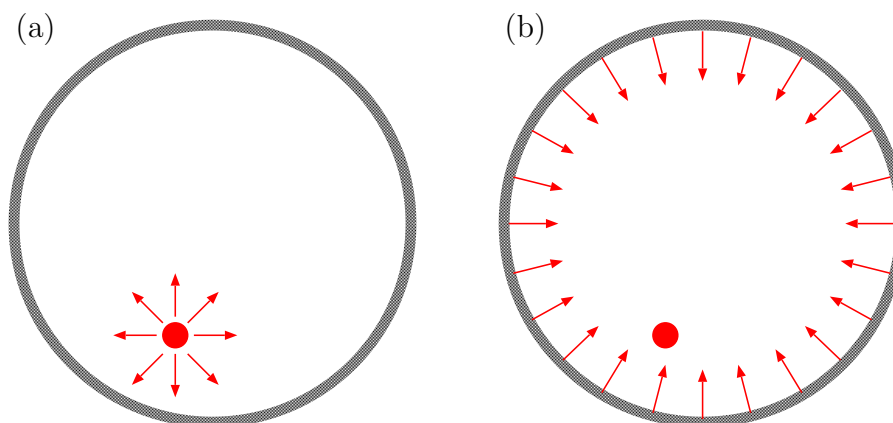


Fig. VII.2 – Représentation d'une expérience de RT avec un puits acoustique. La figure (a) représente la situation directe où l'impulsion émise par la source ponctuelle est enregistrée sur la barrette de transducteurs (cercle épais). La figure (b) représente la situation retournée temporellement où les transducteurs réémettent l'onde retournée temporellement. La source est active et retournée temporellement (puits acoustique). L'onde focalise vers la position de la source avec un spot de taille très inférieure à la limite de diffraction, limitée essentiellement par la taille de la source.

Cela permet de retourner aussi bien les conditions aux limites (MRT) que la source (puits acoustique), ce qui assure un retournement temporel de tout le spectre angulaire du champ, ondes évanescentes comprises (CARMINATI *et al.* 2000). Plus récemment, le retournement temporel des micro-ondes au-delà de la limite de diffraction (largeur de la tâche focale inférieure à $\lambda/30$) a été démontré en utilisant un MRT fait d'un réseau d'antennes avec présence de diffuseurs aléatoirement distribués dans le champ proche du point focal, le tout placé dans une cavité réfléchissante (LEROSEY *et al.* 2007). Dans ce cas, la source qui crée le champ dans la situation directe (i.e. pendant la procédure d'enregistrement) est entourée d'une distribution désordonnée de diffuseurs (fils métalliques) placés dans son champ proche. Dans l'expérience de retournement temporel, la source reste passive, et peut même parfois être enlevée. Les composantes évanescentes de hautes fréquences spatiales du champ sont générées par la diffusion des ondes propagatives par la structure désordonnée (voir Fig. VII.3). La réciprocité assure que le processus de diffusion retourné dans le temps crée un point focal non limité par la diffraction et centré sur la position de la source (CARMINATI *et al.* 2000).

Retourner le champ en utilisant un MRT sans renverser la source (i.e. sans créer un puits local) ne correspond pas à un retournement temporel complet du champ. Une expression générale du champ retourné dans ce cas a été obtenue en utilisant une théorie de la diffraction en domaine temporel pour les ondes acoustiques scalaires (CASSEREAU et FINK 1992). Ce résultat peut être résumé ainsi : la fonction de GREEN du champ retourné temporellement à une fréquence ω donnée est proportionnelle à $\mathcal{I}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega)]$ où G est la fonction

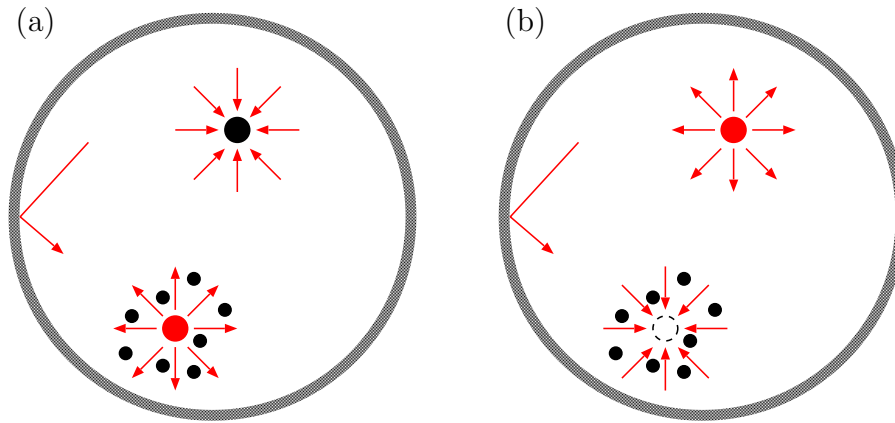
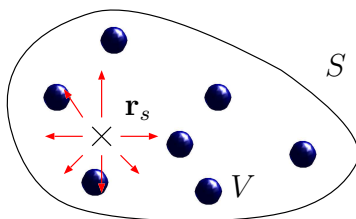


Fig. VII.3 – Représentation d'une expérience de RT en électromagnétisme avec diffuseurs en champ proche. La figure (a) représente la situation directe où l'impulsion émise par la source ponctuelle est enregistrée sur une antenne réceptrice. La cavité est réfléchissante. La figure (b) représente la situation retournée temporellement où l'antenne réémet l'onde retournée temporellement. La source est passive mais revêtue de diffuseurs en champ proche pour transformer les ondes évanescentes en ondes propagatives et inversement dans la situation retournée temporellement. L'onde focalise vers la position de la source avec un spot de taille très inférieure à la limite de diffraction.

de GREEN retardée (ou sortante) du milieu et \mathbf{r}_s la position de la source dans la situation directe. Dans le domaine temporel, ce résultat signifie que la fonction de GREEN retournée temporellement est la différence entre les fonctions de GREEN avancée et retardée. De plus, dans un milieu homogène, $\mathcal{I}[G] \propto \sin[k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|] / [k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|]$, où $k = 2\pi/\lambda$, ce qui conduit à un spot de taille limitée par la diffraction $\lambda/2$.

Nous montrons dans ce chapitre que ce résultat peut être étendu au cas d'ondes électromagnétiques dans un milieu hétérogène, éventuellement anisotrope, en utilisant des concepts de la théorie vectorielle de la diffusion dans le domaine fréquentiel. Notre travail fournit une théorie pour l'expérience décrite dans la référence (LEROSEY *et al.* 2007) et une base pour l'extension du concept de cavité à retournement temporel dans le domaine optique (CARMINATI *et al.* 2007).

VII.1 Calcul du champ dans le problème direct



On considère une cavité fermée de volume V et de surface S constituant le MRT dans laquelle on place une source ponctuelle (dipôle électrique $\mathbf{p}(t)$) à la position \mathbf{r}_s . Le milieu contenu dans la cavité est linéaire, non magnétique, présente des hétérogénéités et est anisotrope. Il est ainsi décrit par une permittivité relative tensorielle $\vec{\epsilon}(\mathbf{r})$. La figure ci-contre résume la situation étudiée. Le MRT idéal vérifie les trois hypothèses suivantes :

1. Pendant la phase d'enregistrement (problème direct), le MRT est passif et enregistre le champ sur la surface S . On considère qu'il est situé en champ lointain de la source et des hétérogénéités du milieu.

2. Dans la situation retournée dans le temps, le MRT génère sur la surface S un champ entrant qui est la réplique retournée temporellement du champ enregistré dans la situation directe.
3. La source est absente dans la situation retournée.

Notons que la condition 2 énonce qu'on n'impose que le champ entrant sur la surface S . Il existe aussi un champ sortant dans la situation retournée comme nous le verrons dans la suite. Les hypothèses du modèle sont choisies afin de constituer une représentation du cas traité expérimentalement (LEROSEY *et al.* 2007).

Nous allons maintenant rechercher l'expression de la fonction de GREEN du problème retourné temporellement. Le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ peut se décomposer par transformée de FOURIER fréquentielle de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{VII.1})$$

Dans la suite, nous utiliserons la représentation fréquentielle commode pour deux raisons :

- Dans les régimes de hautes fréquences (infrarouge et optique), la dispersion temporelle des matériaux ne peut pas être négligée et est plus facile à prendre en compte dans le domaine fréquentiel.
- De plus, la réalisation pratique d'une cavité à retournement temporel dans le domaine du visible ou proche infrarouge sera basée sur l'utilisation de miroirs à conjugaison de phase à largeur de bande limitée (NIETO-VESPERINAS 1991) et de champs quasi-monochromatiques pour lesquels l'approche fréquentielle est naturelle.

L'équation de propagation du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ dans la cavité s'écrit alors :

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) = -\mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \mathbf{p} \quad (\text{VII.2})$$

où \times désigne le produit vectoriel, μ_0 la perméabilité du vide et où ω et c_0 sont respectivement la pulsation et la célérité de l'onde dans le vide. Le terme de droite représente la source ponctuelle placée en \mathbf{r}_s qui est un dipôle électrique de moment dipolaire \mathbf{p} . De la même manière, le tenseur de GREEN $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ du problème vérifie :

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}', \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \quad (\text{VII.3})$$

où $\overleftrightarrow{\mathbf{I}}$ est le tenseur unité. Pour définir entièrement le tenseur de GREEN, on ne conserve que la solution vérifiant la condition d'onde sortante (condition de SOMMERFELD¹) (NIETO-VESPERINAS 1991). L'équation vérifiée par $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{C}$ où \mathbf{C} est un vecteur quelconque (assimilable par exemple à un moment dipolaire source) est donnée par :

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\epsilon}(\mathbf{r}', \omega) \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{C}. \quad (\text{VII.5})$$

¹La forme vectorielle de la condition d'onde sortante de SOMMERFELD s'écrit :

$$\lim_{r' \rightarrow \infty} \left[\nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) - ik \mathbf{u} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \right] = 0, \quad (\text{VII.4})$$

où $k = \omega/c$, $r' = \|\mathbf{r}'\|$ et $\mathbf{u} = \mathbf{r}'/r'$. Cette condition nous assure que $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}$ varie comme $\exp(ikr')/r'$ en champ lointain (onde sortante ou retardée).

Nous souhaitons exprimer le champ en tout point de la cavité en fonction de sa valeur sur la surface de la cavité. Pour cela, nous utilisons la deuxième identité de GREEN dans sa version vectorielle (MORSE et FESHBACH 1953) :

$$\int_V [\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}] d^3\mathbf{r} = \int_S [\mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}, \quad (\text{VII.6})$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux fonctions vectorielles de \mathbf{r} , deux fois dérivables et régulières et où \mathbf{n} est la normale sortante sur la surface S . Dans notre cas, nous l'appliquons avec $\mathbf{A} = \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ et $\mathbf{B} = \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} - \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \right] d^3\mathbf{r}' \\ &= \int_S \left[\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VII.7})$$

Pour faire apparaître le terme présent dans l'intégrale volumique, multiplions (VII.2) à gauche par $\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C}$. Multiplions également (VII.5) à gauche par $\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} - & \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= -\mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p} \\ + & \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \vec{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \\ &= -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} - \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \\ &= \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[\vec{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \vec{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \\ &+ \mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p} - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (\text{VII.8})$$

Si le milieu est supposé réciproque, nous avons $\vec{\boldsymbol{\epsilon}} = {}^t \vec{\boldsymbol{\epsilon}}$ où t désigne l'opérateur transposé (LANDAU *et al.* 1984; CARMINATI *et al.* 1998). Le premier terme du membre de droite est donc nul², ce qui donne en injectant (VII.8) dans (VII.7) :

$$\begin{aligned} & \int_V \mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p} - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C} d^3\mathbf{r}' \\ &= \int_S \left[\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{n} d^2\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

²Pour tout tenseur $\vec{\mathbf{D}}$ et vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} , nous avons :

$$\mathbf{U} \cdot \vec{\mathbf{D}} \mathbf{V} = {}^t(\mathbf{U} \cdot \vec{\mathbf{D}} \mathbf{V}) = {}^t({}^t \mathbf{U} \vec{\mathbf{D}} \mathbf{V}) = {}^t(\vec{\mathbf{D}} \mathbf{V}) \mathbf{U} = {}^t \mathbf{V} \vec{\mathbf{D}} \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot {}^t \vec{\mathbf{D}} \mathbf{U}. \quad (\text{VII.9})$$

Dans le cas d'un milieu réciproque, la fonction de GREEN vérifie le théorème de réciprocité $\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = \overset{t}{\vec{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ (LANDAU *et al.* 1984; CARMINATI *et al.* 1998). L'intégrale volumique se simplifie alors aisément grâce aux distributions de DIRAC pour aboutir à :

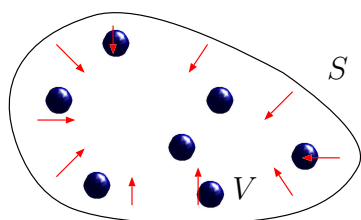
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} &= \mu_0 \omega^2 \overset{t}{\vec{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p} \\ &- \int_S \left[\overset{t}{\vec{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overset{t}{\vec{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{n} d^2 \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (\text{VII.11})$$

qui constitue l'expression de la composante selon \mathbf{C} du champ en tout point de la cavité pour le problème direct en fonction du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ et du champ magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r}', \omega) = (i\omega\mu_0)^{-1} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega)$ sur la surface de la cavité. C'est un résultat classique de la théorie de la diffraction (NIETO-VESPERINAS 1991). Le vecteur \mathbf{C} étant choisi arbitrairement, on peut retenir $\mathbf{C} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{C} = \mathbf{e}_y$ ou $\mathbf{C} = \mathbf{e}_z$ pour obtenir les trois composantes de \mathbf{E} .

Il est possible de simplifier l'équation VII.11 en précisant le comportement du champ et de la fonction de GREEN sur la surface S . Dans la situation directe, d'après l'hypothèse 1 sur le MRT, le champ direct est une onde sortante sur la surface S . De plus la fonction de GREEN est sortante également. Les deux quantités présentent donc des variations en $\exp[ikr']/r'$ en champ lointain et l'intégrand de l'équation VII.11 s'annule sur la surface S . On trouve ainsi que le champ de la situation directe est simplement donné par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \overset{t}{\vec{\mathbf{G}}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{p}. \quad (\text{VII.12})$$

VII.2 Calcul du champ retourné temporellement



MRT vérifie alors les conditions 2 et 3.

L'expression (VII.11) nous donne une formulation du champ électrique en tout point de la cavité en fonction des champs électriques et magnétiques sur la paroi. L'idée consiste donc à transposer cette équation au cas du champ retourné temporellement. Appelons \mathbf{E}_{RT} le champ retourné temporellement. La figure ci-contre résume la situation étudiée. Le

VII.2.1 Expression du champ retourné temporellement sur la paroi de la cavité

Dans le cas retourné temporellement, on suppose donc qu'un MRT idéal crée $\mathbf{E}(\mathbf{r}, -t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, -t)$ (ou $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, -t)$) sur la paroi de la cavité, en l'absence de la source du problème direct. Comme nous allons le voir, en régime fréquentiel cela revient à imposer $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)$ et $\mathbf{H}^*(\mathbf{r}, \omega)$ sur la paroi. En effet, la transformée de FOURIER temporelle du champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{VII.13})$$

La transformée de FOURIER inverse s'énonce alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp[i\omega t] dt. \quad (\text{VII.14})$$

Le champ étant réel, le conjugué s'obtient simplement par :

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp[-i\omega t] dt. \quad (\text{VII.15})$$

Ainsi, en comparant VII.14 et VII.15, nous obtenons la relation $\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega)}$.

Or, le champ \mathbf{E}_{RT} correspond au champ \mathbf{E} retourné temporellement. Sa transformée de FOURIER s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp[i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} = \int \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, -\omega) \exp[i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Ainsi, en comparant (VII.13) et (VII.16), on remarque que le champ retourné temporellement sur la paroi en régime fréquentiel est donné par le complexe conjugué du champ reçu sur la paroi :

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)}. \quad (\text{VII.17})$$

VII.2.2 Expression du champ total retourné temporellement

En suivant la même procédure que dans la situation directe, nous pouvons adapter l'expression (VII.11) au cas de la situation de retournement temporel. Pour cela, nous supprimons le terme source en $-\mu_0\omega^2\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s)\mathbf{p}$ dans l'équation d'HELMHOLTZ et nous remplaçons le champ \mathbf{E} par celui retourné temporellement \mathbf{E}_{RT} :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} \\ = - \int_S \left[\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{nd}^2\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

Le membre de gauche donne le champ retourné temporellement en un point à l'intérieur de la cavité. Finalement, en imposant que le champ sur la surface S soit le complexe conjugué du champ de la situation directe, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} \\ = - \int_S \left[\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{nd}^2\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{VII.19})$$

Notons que dans cette expression, \mathbf{E}^* vérifie la condition d'onde entrante sur la surface S alors que la fonction de GREEN vérifie toujours la condition d'onde sortante. De ce fait, l'intégrale n'est pas nulle (et est la seule contribution non-nulle).

Pour simplifier l'intégrale surfacique, nous allons une nouvelle fois faire appel à la seconde identité de GREEN. Pour cela, on fait la même démarche que dans la première partie mais en prenant le conjugué de (VII.2) et en multipliant (VII.5) par \mathbf{E}^* et non \mathbf{E} . On obtient :

$$\begin{aligned}
- & \quad \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}^*(\mathbf{r}', \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \\
& \quad = -\mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p}^* \\
+ & \quad \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \\
& \quad = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \quad \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} - \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \\
& \quad = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left[\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}^*(\mathbf{r}', \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) - \overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \\
& \quad + \mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p}^* - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C}. \quad (\text{VII.20})
\end{aligned}$$

On remarque donc que pour que le premier terme du membre de droite s'annule, il faut que le milieu soit réciproque (i.e. $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} = {}^t\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}$) et qu'il n'y ait pas d'absorption (i.e. $\overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{\epsilon}}^*$). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
& \int_V \mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p}^* - \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{C} d^3\mathbf{r}' \\
& = \int_S \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{nd}^2\mathbf{r}' \\
& \quad \quad \quad (\text{VII.21})
\end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à :

$$\begin{aligned}
& \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p}^* - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} \\
& = \int_S \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega) \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \right] \cdot \mathbf{nd}^2\mathbf{r}'. \\
& \quad \quad \quad (\text{VII.22})
\end{aligned}$$

On en déduit à partir de (VII.19) et de (VII.22) :

$$\mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{C} - \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}, \omega) \mathbf{C} \cdot \mathbf{p}^*. \quad (\text{VII.23})$$

En utilisant une nouvelle fois le théorème de réciprocity (i.e. $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega)$), et en remarquant que l'équation (VII.23) est valable pour tout \mathbf{C} , on obtient :

$$\mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) - \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{p}^*. \quad (\text{VII.24})$$

De plus, on a l'égalité $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{G}}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{p}^*$. Donc finalement :

$$\boxed{\mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega) = -2i\mu_0 \omega^2 \mathcal{I} \left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \right] \mathbf{p}^*}. \quad (\text{VII.25})$$

Dans cette situation où le retournement temporel s'effectue sans source, le champ $\mathbf{E}_{\text{RT}}(\mathbf{r}, \omega)$ dans le domaine fréquentiel est une onde stationnaire présentant un déphasage uniforme de $-\pi/2$ par rapport à la source. Notons que ce n'est pas rigoureusement le champ retourné temporellement (c'est à dire en présence d'une source retournée temporellement) qui, d'après le point précédent, serait $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)$.

Le résultat VII.25 peut être résumé ainsi : la fonction de GREEN du champ électrique retourné dans le temps produit par un MRT satisfaisant aux trois conditions énoncées précédemment dans un milieu réciproque et non-absorbant est donnée par la partie imaginaire de la fonction de GREEN sortante pour le même milieu. Ce résultat fournit une extension aux champs électromagnétiques vectoriels du théorème initialement connu en acoustique (ROSNY et FINK 2002; CASSEREAU et FINK 1992).

VII.3 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré que la fonction de GREEN du champ électrique du problème retourné temporellement avec source passive s'exprime facilement en fonction de la fonction de GREEN retardé du système. Il a été montré expérimentalement que la combinaison du retournement temporel d'ondes électromagnétiques et de la diffusion en champ proche est un moyen efficace de générer une focalisation sub-longueur d'onde (LEROSEY *et al.* 2007). Il est important de noter que l'équation VII.25 prend en compte la présence de la diffusion en champ proche aussi bien dans la situation directe que dans la situation retournée. Comme cela est bien connu en optique de champ proche, c'est une condition nécessaire pour obtenir des variations sub-longueur d'onde du champ (GREFFET et CARMINATI 1997). Le résultat de ce travail fournit une méthode pour mettre au point des structures diffusantes fournissant un confinement sub-longueur d'onde du champ retourné temporellement.

Remarquons enfin que le champ retourné temporellement à la position de la source

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_s, \omega) = -2i\mu_0\omega^2\mathcal{I} \left[\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s, \omega) \right] \mathbf{p}^* \quad (\text{VII.26})$$

est proportionnel à la densité d'états locale (JOULAIN *et al.* 2003) ce qui constitue un lien entre la retournement temporel et une quantité fondamentale caractérisant la réponse électromagnétique d'un environnement à l'échelle locale (voir Chap. VI).

Conclusion

Dans cette thèse de doctorat, nous avons évoqué différents aspects de la propagation et de l'émission du rayonnement en milieu diffusant. Nous avons en particulier utilisé plusieurs théories comme l'Équation de Transfert Radiatif (ETR), l'approximation de la diffusion ou la méthode des dipôles couplés afin de décrire la propagation d'ondes en milieu complexe. Ce travail fut divisé en deux parties : dans la première, nous avons montré que l'ETR constitue un très bon outil pour obtenir des informations sur les propriétés des ondes en milieu aléatoire comme la cohérence spatiale ou les fluctuations temporelles d'intensité. Dans une seconde partie, nous nous sommes attardés sur le phénomène d'émission en étudiant l'évolution de la fluorescence d'une molécule en fonction de son environnement (milieu hétérogène) ou la propagation du rayonnement émis dans un milieu à gain (laser aléatoire).

La première partie a été l'occasion de montrer à quel point l'ETR est un modèle fort bien adapté à l'étude de la propagation du rayonnement en milieu complexe. En effet, le flux radiatif local et directionnel qu'est la luminance est décrit par cette équation de transport. Il peut également être relié à la fonction de corrélation spatiale du champ par l'intermédiaire d'une transformée de FOURIER. Ainsi, à partir de la résolution de l'ETR en géométrie plane, nous avons été en mesure de déduire la longueur de cohérence spatiale du champ en fonction de la profondeur de pénétration du faisceau incident dans le milieu diffusant. Cela nous a permis de mettre en évidence une signature des différents régimes de transport des photons (régime de diffusion simple, de diffusion multiple, diffusif). Un modèle semi-analytique en diffusion simple nous a également aidé à comprendre les variations de la longueur de cohérence en entrée de milieu pour la luminance diffuse, variations dues en réalité à un simple effet de filtre géométrique.

Ensuite, nous avons établi de manière rigoureuse l'approximation de la diffusion à partir de l'ETR en utilisant une décomposition modale de cette dernière. Le principe repose sur la conservation du seul mode qui survit le plus profondément dans le milieu et le plus longtemps. Une telle démonstration nous a amené à considérer un coefficient de diffusion différent en régime stationnaire et instationnaire. En particulier, l'expression obtenue pour ce coefficient en régime stationnaire dépend fortement de l'absorption alors qu'il en est totalement indépendant en régime instationnaire et vaut $cl_{tr}/3$. Cette étude met fin à la controverse qui était née sur le sujet. Ensuite, la résolution numérique de l'ETR par la méthode des ordonnées discrètes nous a permis d'avoir accès numériquement à la décomposition modale de la luminance et d'en déduire la valeur de la longueur d'extrapolation z_0 à utiliser pour rendre compte correctement des conditions aux limites aux interfaces lors de la résolution de l'équation de la diffusion. Le problème est alors mathématiquement bien posé.

Dans un troisième temps, nous nous sommes intéressés aux fluctuations temporelles d'inten-

sité diffusée par un système dynamique. Une fois encore, l'utilisation de l'ETR nous a permis d'améliorer la théorie dite de la spectroscopie par ondes diffuses (DWS) en établissant un modèle valide en diffusion multiple (régime non diffusif). Ce modèle amélioré engendre des déviations sur le tracé de la fonction de corrélation temporelle du champ en transmission dans le cas de milieux pour lesquels l'approximation de la diffusion n'est pas valable. Une étude en réflexion a mis en évidence le rôle majeur de l'anisotropie de la diffusion par les particules sur la pente de la fonction de corrélation temporelle, rôle non pris en compte par la théorie habituelle de la DWS. En particulier, une comparaison entre notre modèle et une étude expérimentale menée dans l'équipe de Frank SCHEFFOLD a été concluante à ce niveau.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes tout d'abord focalisés sur les milieux diffusants et amplificateurs appelés lasers aléatoires. Après avoir établi un modèle fondé sur le couplage entre l'équation de relaxation pour les populations des niveaux d'énergie des émetteurs et l'ETR, nous avons effectué une étude numérique des définitions du seuil laser en régime de rétroaction incohérente. Nous avons ensuite quantifié ce seuil à partir d'une décomposition modale de l'ETR. Le seuil laser est défini lorsqu'un niveau de gain suffisamment important engendre une augmentation temporelle exponentielle de l'intensité émise. Afin de valider le modèle modal, des comparaisons avec la résolution numérique du couplage des équations et l'approximation de la diffusion a été envisagée. Ce modèle modal est satisfaisant pour décrire le niveau de pompe nécessaire pour que le système émette au-dessus du seuil mais pas pour décrire correctement la distribution angulaire de l'intensité émise. Pour cela, la prise en compte des vrais modes d'une couche diffusante est nécessaire et fera l'objet d'un travail ultérieur.

Ensuite, nous avons étudié la modification du taux de fluorescence d'une source composée d'une molécule unique, par son environnement composé de particules diffusantes. Nous avons en particulier étudié la statistique du taux d'émission en présence de diffusion multiple forte (particules à résonance). Dans le but de décrire la moyenne du taux et de déterminer la longueur de diffusion, nous avons établi un modèle de milieu homogène effectif prenant en compte les corrélations et interactions multiples entre particules. Nous avons montré que des différences notables existent entre les résultats donnés par la formule de Maxwell-GARNETT, notre modèle amélioré et la résolution numérique complète du problème.

Enfin, nous avons généralisé la formulation du champ retourné temporellement connue en acoustique au cas des ondes électromagnétiques. Cette approche est valable en présence de diffusion en champ proche. Cette formulation donnée par la partie imaginaire de la fonction de GREEN du problème direct est valable dans le cas d'ondes polarisées dans un milieu complexe réciproque et éventuellement anisotrope dans lequel il n'y a pas d'absorption.

Annexes

Annexe A

Démonstration de l'Équation de Transfert Radiatif à partir des équations de MAXWELL

L'ETR fut introduite de manière phénoménologique dans les années 1890-1905 (KHOVLSON 1890; SCHUSTER 1905) puis reprise par les astrophysiciens au milieu du siècle dernier (CHANDRASEKHAR 1950) (voir Chap. I). Aujourd'hui, moyennant certaines approximations, nous savons démontrer l'ETR. Cette annexe a pour objectif de présenter une démonstration possible à partir des équations de MAXWELL dans la matière. Cela justifie pleinement le choix de l'ETR pour l'étude de certaines propriétés de la propagation du rayonnement en milieu diffusant (telle que l'étude de la cohérence spatiale, voir Chap. II). Le lecteur pourra se reporter à d'autres ouvrages pour des compléments d'informations (RYTOV *et al.* 1989; APRESYAN et KRAVTSOV 1996).

La démonstration de l'ETR passe tout d'abord par la recherche d'une équation pour le champ moyen $\langle \mathbf{E} \rangle$ (ou champ cohérent) dénommée équation de DYSON. Ensuite, nous recherchons une équation pour la fonction de corrélation du champ $\langle \mathbf{E}\mathbf{E}^* \rangle$ appelée équation de BETHE-SALPETER. Une série d'approximations nous permettra enfin d'aboutir à l'ETR.

A.1 Équation de Dyson

Cette section est inspirée du chapitre II de la thèse de Stéphane DURANT (DURANT 2003). Nous allons rechercher une équation pour le champ moyen $\langle \mathbf{E} \rangle$ appelée équation de DYSON à partir des équations de MAXWELL.

A.1.1 Théorie statistique de la propagation d'ondes en milieu aléatoire

Intensités cohérente (moyenne) et incohérente (fluctuante)

Considérons un milieu quelconque dans un premier temps, figé. Ce milieu est alors décrit par un indice de réfraction n dépendant de la position $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Dans un tel milieu, la propagation d'une onde sera déterministe. Dans notre cas, le milieu étudié est un milieu

diffusant, il est constitué d'un milieu hôte absorbant ou pas dans lequel baignent des particules diffusantes très nombreuses. Nous sommes alors confrontés à un milieu possédant un grand nombre de degrés de liberté. On s'intéresse alors aux propriétés statistiques des grandeurs mesurables (champ, intensité, ...) en raisonnant sur un ensemble de N réalisations. On suppose que notre milieu quelconque est statistiquement homogène et isotrope. Nous pouvons alors écrire :

$$n(\mathbf{r}) = \langle n \rangle + \delta n(\mathbf{r}). \quad (\text{A.1})$$

Ainsi, le champ électrique possède également un caractère aléatoire et se décompose de la même façon :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E} \rangle(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.2})$$

Nous introduisons également le tenseur de corrélation spatiale du champ électrique par¹ :

$$\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{E}^*(\mathbf{r}') \rangle. \quad (\text{A.3})$$

L'intensité moyenne est alors donnée par la trace du tenseur $\overleftrightarrow{\Gamma}$ pour $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \text{Tr} \left[\overleftrightarrow{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right] = \sum_i \langle |E_i(\mathbf{r})|^2 \rangle. \quad (\text{A.4})$$

Finalement, on peut développer l'intensité moyenne en fonction du champ moyen et des fluctuations du champ en injectant l'équation A.2 dans l'équation A.4² :

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \sum_i \langle |\langle E_i \rangle(\mathbf{r}) + \delta E_i(\mathbf{r})|^2 \rangle = \sum_i \left[\underbrace{|\langle E_i \rangle(\mathbf{r})|^2}_{I_{\text{coh}}} + \underbrace{|\delta E_i(\mathbf{r})|^2}_{I_{\text{incoh}}} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Les quantités I_{coh} et I_{incoh} définies sont respectivement appelées intensités cohérente et incohérente. Cette décomposition en deux termes interviendra fréquemment dans la suite de l'annexe. On comprendra plus loin la signification donnée à ces termes.

Densité de probabilité et développement en essaim

Dans un milieu diffusant, les variables aléatoires sont les positions des diffuseurs \mathbf{r}_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$ quand les diffuseurs sont identiques de forme définie. Ainsi on définit la densité de probabilité $P_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ que les diffuseurs $1, \dots, n$ soient en $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$, normalisée comme suit :

$$\int_{V^n} P_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) d^3\mathbf{r}_1 \dots d^3\mathbf{r}_n = 1. \quad (\text{A.7})$$

Si on considère que les positions des diffuseurs sont décorréllées, on peut approximer la densité de probabilité par :

$$P_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \prod_{i=1}^n P_1(\mathbf{r}_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{V} = \frac{1}{V^n}. \quad (\text{A.8})$$

¹ \otimes désigne le produit tensoriel

²On a en effet :

$$\langle |\langle E \rangle + \delta E|^2 \rangle = \langle |\langle E \rangle|^2 + \langle E \rangle \delta E^* + \langle E \rangle^* \delta E + |\delta E|^2 \rangle = |\langle E \rangle|^2 + \langle |\delta E|^2 \rangle. \quad (\text{A.5})$$

Cependant, on ne peut pas faire cette hypothèse dans le cas où la densité des diffuseurs est importante. Dans ce cas, on développe P_n en essaim (FRISH 1967). Ainsi, les P_n peuvent être décomposés de la manière suivante :

$$P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = P_1(\mathbf{r}_i) P_1(\mathbf{r}_j) [1 + g_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)] \quad (\text{A.9})$$

$$P_3(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) = P_1(\mathbf{r}_i) P_1(\mathbf{r}_j) P_1(\mathbf{r}_k) [1 + g_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + g_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) + g_2(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) + g_3(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k)]. \quad (\text{A.10})$$

Ces relations définissent les fonctions g_n qui sont nulles quand les diffuseurs sont décorrélés. Ces formulations font apparaître les probabilités factorisées P_1 . La corrélation des positions des diffuseurs vient simplement du fait que les particules ne peuvent pas s'interpénétrer. Si on s'intéresse plus précisément à la fonction g_2 ne dépendant que de la distance entre les deux particules r , on a :

$$g_2(r) = -1 \quad \text{si} \quad r < 2a \quad (\text{A.11})$$

où a est le rayon des particules supposées sphériques ici. Cette fonction peut être calculée simplement par simulation statistique de type MONTE CARLO (CALVO-PEREZ 1999) ou en utilisant des modèles analytiques approchés comme celui de PERCUS et YEVICK (PERCUS et YEVICK 1958; WERTHEIM 1963; TSANG *et al.* 1985). La figure A.1 donne un exemple de calcul de cette fonction.

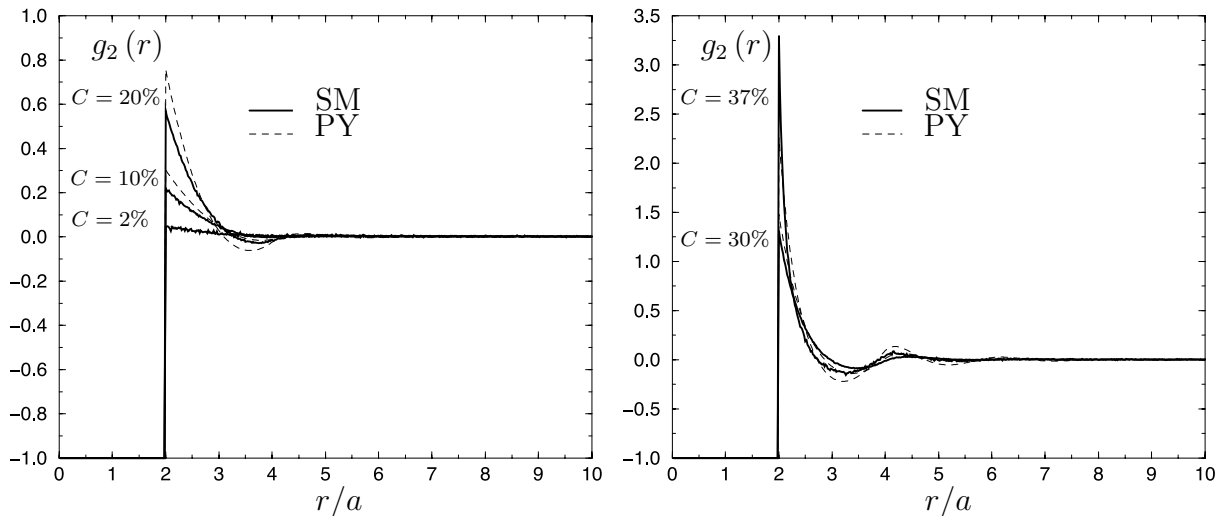


Fig. A.1 – Fonction de corrélation pour des sphères dures disposées aléatoirement dans l'espace en fonction de la distance intercentre r et de la concentration volumique C . PY est le résultat obtenu par le modèle de PERCUS et YEVICK tandis que SM désigne le résultat de la simulation numérique.

A.1.2 Équation intégrale pour le champ électrique

Dans cette partie, on considère un milieu non magnétique (perméabilité relative $\mu = 1$) dont la permittivité relative ϵ dépend de la variable spatiale \mathbf{r} et est quelconque. Ainsi, nous ne limitons pas pour l'instant l'étude au cas d'un milieu diffusant (c'est-à-dire formé d'un milieu hôte et de particules distinctes).

Les sources de diffusion

Partons des équations de MAXWELL dans la matière pour en déduire l'équation de propagation du champ électrique³ :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}(\mathbf{r}, t). \quad (\text{A.13})$$

Dans un premier temps, le champ électrique \mathbf{E} est supposé quelconque tout comme les autres grandeurs électromagnétiques (\mathbf{j}_{ext} , \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H}). Nous allons travailler sur les transformées de FOURIER, i.e. :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.14})$$

Les équations précédentes s'écrivent alors :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.16})$$

On rappelle que les quantités excitation électrique $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$ et champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ ainsi que les quantités excitation magnétique $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$ et champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$ sont reliées pour les relations constitutives suivantes pour un milieu diélectrique non magnétique :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.18})$$

En appliquant l'opérateur $\nabla \times$ à l'équation A.15 et en utilisant les équations A.16, A.17 et A.18, on aboutit à l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{A.19})$$

où c_0 est la célérité de la lumière dans le vide. On considère maintenant la notion d'hétérogénéité par rapport à un milieu de référence de permittivité $\epsilon_{\text{ref}}(\omega)$. Alors l'équation A.19 peut s'écrire :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_{\text{ref}}(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon_{\text{ref}}(\omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.20})$$

Maintenant, nous définissons le champ de référence $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega)$ tel que satisfaisant l'équation de propagation pour un milieu homogène de permittivité relative $\epsilon_{\text{ref}}(\omega)$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_{\text{ref}}(\omega) \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.21})$$

³ × désigne le produit vectoriel

On appelle alors champ diffusé la quantité $\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega)$. En effet, ce sont bien les hétérogénéités qui sont à l'origine de la diffusion (dans le sens *scattering* en anglais). Ainsi, le champ diffusé satisfait à l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_{\text{ref}}(\omega) \mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon_{\text{ref}}(\omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.22})$$

On remarque très clairement que le terme de droite est un terme source pour le champ diffusé. Les fluctuations spatiales de la permittivité sont des sources pour le champ diffusé.

Construction d'une équation intégrale

Il nous faut ici introduire le tenseur de GREEN $\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ qui correspond à la solution du problème de l'équation A.19 dans le cas d'une source de courant ponctuelle placée en \mathbf{r}' . Il s'agit donc de la réponse impulsionnelle du système linéaire. Ainsi, $\vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ est solution de⁴ :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\mathbf{r}) \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \vec{\mathbf{I}} \quad (\text{A.23})$$

où $\vec{\mathbf{I}}$ est le tenseur identité. La fonction de GREEN dépend ici de deux variables spatiales car il n'y a pas invariance par translation du système (seulement invariance par translation sur un ensemble de réalisations du milieu diffusant). Par contre, la fonction de GREEN ne dépend que d'une variable temporelle car le système est figé, il y a donc bien invariance par translation dans le temps (hypothèse de stationarité). Alors, le champ solution de l'équation A.19 s'exprime simplement par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \int \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{A.24})$$

Il est clair que le calcul de $\vec{\mathbf{G}}$ nécessite la connaissance des positions des hétérogénéités dans le milieu et est par conséquent très complexe à mener. Utilisons plutôt le tenseur de GREEN pour le milieu homogène de référence :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_{\text{ref}}(\omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \vec{\mathbf{I}}. \quad (\text{A.25})$$

Le tenseur de GREEN pour un milieu homogène est parfaitement connu. L'invariance par translation et l'isotropie du milieu de référence implique qu'il ne dépende que de la différence $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|$. Ainsi, il est donné par (voir Ann. B) :

$$\vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \left[\vec{\mathbf{I}} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}}}{k_{\text{ref}}^2(\omega)} \right] \frac{\exp(i k_{\text{ref}}(\omega) \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}; \quad k_{\text{ref}}(\omega) = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_{\text{ref}}(\omega)}. \quad (\text{A.26})$$

Son expression dans l'espace de FOURIER nous sera utile dans la suite, elle est donnée par :

$$\vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{k}, \omega) = \int \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\vec{\mathbf{I}}}{k^2 \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega) \vec{\mathbf{I}}}$$

⁴Le produit vectoriel \times entre un tenseur et un vecteur est bien défini.

(A.27)

où $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} / k^2$ est l'opérateur de projection « transverse ». Ainsi, les équations intégrales pour le champ de référence et le champ diffusé peuvent maintenant s'écrire :

$$\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) [\epsilon(\mathbf{r}, \omega') - \epsilon_{\text{ref}}(\omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) [\epsilon(\mathbf{r}', \omega) - \epsilon_{\text{ref}}(\omega)] \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{A.30})$$

Notation opérateur

On introduit ici trois opérateurs \mathcal{V} , \mathcal{G}_{ref} et \mathcal{G} définis par :

$$\mathcal{V} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mapsto \frac{\omega^2}{c_0^2} [\epsilon(\mathbf{r}, \omega) - \epsilon_{\text{ref}}] \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = V(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{A.31})$$

$$\mathcal{G}_{\text{ref}} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mapsto \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}' \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{G} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \mapsto \int \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}'. \quad (\text{A.33})$$

Ainsi, l'équation A.30 s'écrit⁵ :

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E}}. \quad (\text{A.34})$$

Cette équation est dite fermée et est du type LIPMANN-SCHWINGER. C'est le point de départ de la théorie de la diffusion multiple pour un système quelconque. Une astuce simple permet d'éliminer le champ électrique total du membre de droite en réinjectant à l'infini son expression⁶ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E} \quad (\text{A.35})$$

$$= \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E} \quad (\text{A.36})$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i \mathbf{E}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.37})$$

Les notations I_{coh} et I_{incoh} introduites au début de cette annexe prennent tout leur sens ici. En effet, on a décomposé le champ en un terme correspondant à la propagation dans le milieu de référence (terme cohérent) et en un autre correspondant à la diffusion par les hétérogénéités (terme incohérent). On a par ailleurs, une relation identique sur les opérateurs de GREEN⁷ :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G} = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i \mathcal{G}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.38})$$

⁵La composition de deux opérateurs \mathcal{X} et \mathcal{Y} est simplement notée $\mathcal{X}\mathcal{Y}$.

⁶On ne cherchera pas ici à démontrer la convergence de la série introduite.

⁷Il suffit d'appliquer cette équation au vecteur \mathbf{j}_{ext} pour retrouver l'équation portant sur les champs.

L'équation de la diffusion multiple A.34 est difficile à résoudre numériquement car il faut discrétiser l'intégrale et mettre le système sous la forme d'une équation matricielle linéaire. Pour cette raison, si le champ total diffère peu du champ de référence, on utilise l'approximation de BORN qui consiste à ne conserver que la première correction par rapport au champ de référence :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathbf{E}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.39})$$

Cas d'un milieu aléatoire

Le milieu est considéré comme aléatoire quand la permittivité diélectrique est une variable fluctuante de l'espace. Dans l'équation de la diffusion multiple, les opérateurs à variables aléatoires sont l'opérateur de GREEN du problème complet \mathcal{G} et l'opérateur \mathcal{V} . Ainsi, la valeur moyenne de l'équation A.38 est donnée par :

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{V} \mathcal{G} \rangle. \quad (\text{A.40})$$

A.1.3 Milieu effectif pour le champ moyen

Une équation fermée pour le champ moyen : l'équation de Dyson

Ne perdons pas de vue que nous nous intéressons au champ moyen. Or, l'équation A.40 n'est pas une équation fermée pour $\langle \mathcal{G} \rangle$. On va donc montrer par la méthode dite de régularisation qu'il existe un opérateur \mathcal{M} tel que (DYSON 1949a; DYSON 1949b) :

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{M} \langle \mathcal{G} \rangle. \quad (\text{A.41})$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V} \mathcal{G} \rangle &= \langle [(\mathcal{V}) + \delta \mathcal{V}] [\langle \mathcal{G} \rangle + \delta \mathcal{G}] \rangle \\ &= \langle \mathcal{V} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle + \langle \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

On injecte alors l'expression de l'équation A.42 dans l'équation A.38 :

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} [\langle \mathcal{V} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle + \langle \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G} \rangle]. \quad (\text{A.43})$$

En soustrayant l'équation A.43 de l'équation A.40, on obtient une expression pour les fluctuations de l'opérateur de GREEN total :

$$\delta \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} [\mathcal{V} \mathcal{G} - \langle \mathcal{V} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle - \langle \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G} \rangle]. \quad (\text{A.44})$$

Développons alors l'expression de $\mathcal{V} \mathcal{G}$:

$$\mathcal{V} \mathcal{G} = \langle \mathcal{V} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle + \delta \mathcal{V} \langle \mathcal{G} \rangle + \langle \mathcal{V} \rangle \delta \mathcal{G} + \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G}. \quad (\text{A.45})$$

Ainsi, l'équation A.44 devient :

$$\delta \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} [\delta \mathcal{V} \langle \mathcal{G} \rangle + \langle \mathcal{V} \rangle \delta \mathcal{G} + \mathcal{F} \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G}] \quad \text{avec} \quad \mathcal{F} : f \mapsto f - \langle f \rangle. \quad (\text{A.46})$$

Si nous appelons \mathcal{I} l'opérateur identité, nous obtenons alors :

$$[\mathcal{I} - \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{V} \rangle] \delta \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} [\delta \mathcal{V} \langle \mathcal{G} \rangle + \mathcal{F} \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G}]. \quad (\text{A.47})$$

Soit encore⁸ :

$$\delta \mathcal{G} = [\mathcal{I} - \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{V} \rangle]^{-1} \mathcal{G}_{\text{ref}} [\delta \mathcal{V} \langle \mathcal{G} \rangle + \mathcal{F} \delta \mathcal{V} \delta \mathcal{G}]. \quad (\text{A.48})$$

On en déduit ainsi l'expression de $\delta \mathcal{G}$:

$$\delta \mathcal{G} = \underbrace{\left\{ \mathcal{I} - [\mathcal{I} - \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{V} \rangle]^{-1} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{F} \delta \mathcal{V} \right\}^{-1}}_{\mathcal{S}} [\mathcal{I} - \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{V} \rangle]^{-1} \mathcal{G}_{\text{ref}} \delta \mathcal{V} \langle \mathcal{G} \rangle. \quad (\text{A.49})$$

À l'ordre 1, l'opérateur \mathcal{S} est simplement donné par $\mathcal{S} = \mathcal{G}_{\text{ref}} \delta \mathcal{V}$. On a alors $\delta \mathcal{G} = \mathcal{S} \langle \mathcal{G} \rangle$. Si on insert cette expression dans l'équation A.43, on obtient :

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \underbrace{[\langle \mathcal{V} \rangle + \langle \delta \mathcal{V} \mathcal{S} \rangle]}_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{G} \rangle \quad (\text{A.50})$$

où \mathcal{M} est appelé « opérateur de masse ». Finalement, l'équation de DYSON est donnée par :

$$\boxed{\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{M} \langle \mathcal{G} \rangle}. \quad (\text{A.51})$$

On a bien entendu, la même équation pour le champ $\langle \mathbf{E} \rangle$:

$$\langle \mathbf{E} \rangle = \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{M} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (\text{A.52})$$

Ainsi, le champ moyen obéit à une équation de propagation en milieu homogène. Sa phase est bien définie et non perturbée, il n'y a pas de dépolarisation.

Notion d'indice effectif

Le milieu étant statistiquement homogène, il y a invariance par translation du problème. Par conséquent, tout comme pour $\vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}$, les tenseurs $\vec{\mathbf{G}}$ et $\vec{\mathbf{M}}$ ne dépendent que de la différence $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (et également de la pulsation ω). L'équation A.51 dite de DYSON réécrite explicitement pour le tenseur de GREEN donne alors⁹ :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) &= \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) + \iint \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \omega) \vec{\mathbf{M}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \\ &\quad \times \langle \vec{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$= \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) + \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega) \otimes_{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{M}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \otimes_{\mathbf{r}'} \langle \vec{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{r}', \omega). \quad (\text{A.54})$$

Ainsi, dans l'espace de FOURIER, on a simplement :

$$\langle \vec{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{k}, \omega) + \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{k}, \omega) \vec{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) \langle \vec{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.55})$$

⁸ Par définition, $[\mathcal{I} - \mathcal{X}]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{X}^i$ pour \mathcal{X} opérateur puisque $[\mathcal{I} - \mathcal{X}][\mathcal{I} - \mathcal{X}]^{-1} = [\mathcal{I} - \mathcal{X}] \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{X}^i = \mathcal{I}$.

⁹ \otimes_x désigne le produit de convolution par rapport à la variable x

On met ensuite en facteur le tenseur de GREEN moyen :

$$\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{k}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) \right] \langle \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.56})$$

On injecte ensuite l'expression du tenseur de GREEN de référence de l'équation A.27 :

$$\left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{k^2 \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}}} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) \right] \langle \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{k^2 \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}}}. \quad (\text{A.57})$$

D'où l'expression du tenseur de GREEN moyen :

$$\langle \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \rangle(\mathbf{k}, \omega) = \left[\overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{k^2 \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}}} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega) \right]^{-1} \frac{\overleftrightarrow{\mathbf{I}}}{k^2 \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}}}. \quad (\text{A.58})$$

Il faut que $\langle \overleftrightarrow{\mathbf{G}} \rangle$ soit de la même forme que $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}$. Donc par identification, on doit avoir :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{k}}_{\text{eff}}^2(\omega) = k_{\text{ref}}^2(\omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}} + \overleftrightarrow{\mathbf{M}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (\text{A.59})$$

Comme nous supposons le milieu isotrope, le module du vecteur d'onde du milieu effectif pour une onde plane est donné par :

$$\boxed{k_{\text{eff}}^2(\omega) = k_{\text{ref}}^2(\omega) - M(k, \omega) \quad \text{et} \quad k_{\text{eff}}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon_{\text{eff}}(\omega)}. \quad (\text{A.60})$$

Finalement, l'indice effectif est donné par $n_{\text{eff}}(\omega) = \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}(\omega)}$. Nous remarquons ainsi que cette équation conduit à la définition d'un indice effectif non local.

Exemple

On ne conserve ici que l'ordre 1 pour l'opérateur \mathcal{S} , i.e. $\mathcal{S} = \mathcal{G}_{\text{ref}} \delta \mathcal{V}$. On a donc :

$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{V} \rangle + \langle \delta \mathcal{V} \mathcal{G}_{\text{ref}} \delta \mathcal{V} \rangle. \quad (\text{A.61})$$

Ainsi, l'indice effectif dans le cas non isotrope est donné par :

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\epsilon}_{\text{eff}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \left[\epsilon_{\text{ref}}(\omega) + \frac{c_0^2}{\omega^2} \langle V(\mathbf{r}', \omega) \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \\ &+ \frac{c_0^2}{\omega^2} \left\langle \delta V(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \delta V(\mathbf{r}', \omega) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Lien entre le coefficient d'extinction et l'indice effectif

L'indice effectif décrit la manière dont le champ moyen se propage dans le milieu diffusant. Si le champ moyen est une onde plane monochromatique de pulsation ω qui se propage dans le milieu effectif homogène dans une direction z , on peut l'écrire :

$$\langle \mathbf{E} \rangle(z) = \mathcal{R} \left\{ \langle \mathbf{E}_0 \rangle \exp \left[i \frac{\omega}{c_0} \mathcal{R}(n_{\text{eff}}(\omega)) z \right] \exp \left[-\frac{\omega}{c_0} \mathcal{I}(n_{\text{eff}}(\omega)) z \right] \right\} \quad (\text{A.63})$$

où \mathcal{R} et \mathcal{I} désignent respectivement les opérateurs « partie réelle » et « partie imaginaire » d'un nombre complexe.

La partie réelle de l'indice effectif joue un rôle sur la phase de l'onde tandis que la partie imaginaire décrit l'atténuation à cause de la diffusion et de l'absorption. L'indice effectif dans un milieu diffusant est toujours complexe même si le milieu n'est pas absorbant puisque la diffusion tend à atténuer le champ moyen. L'intensité cohérente associée à cette onde s'atténue en :

$$I_{\text{coh}}(z) = I_0 \exp \left[-2 \frac{\omega}{c_0} \mathcal{I}(n_{\text{eff}}(\omega)) z \right] = I_0 \exp [-\mu_{e\omega} z]. \quad (\text{A.64})$$

On en déduit l'expression du coefficient d'extinction :

$$\boxed{\mu_{e\omega} = 2 \frac{\omega}{c_0} \mathcal{I}(n_{\text{eff}}(\omega))}. \quad (\text{A.65})$$

Ainsi, le coefficient d'extinction est donné par l'opérateur de masse (équations A.60 et A.65).

A.2 Équation de Bethe-Salpeter

Cette section est inspirée du chapitre II de la thèse de Stéphane DURANT (RYTOV *et al.* 1989; APRESYAN et KRAVTSOV 1996; DURANT 2003). Nous allons rechercher une équation pour la corrélation du champ $\langle \mathbf{E}\mathbf{E}^* \rangle$ appelée équation de BETHE-SALPETER. La fonction de corrélation spatiale du champ est une grandeur énergétique ce qui nous permettra dans la suite de définir la luminance et d'établir l'ETR.

Dans toute la suite, nous allons considérer un milieu contenant des objets identiques et aléatoirement disposés dans l'espace. On choisira comme milieu de référence le milieu hôte dans lequel baignent les diffuseurs (FRISH 1968). La figure A.2 représente la configuration choisie.

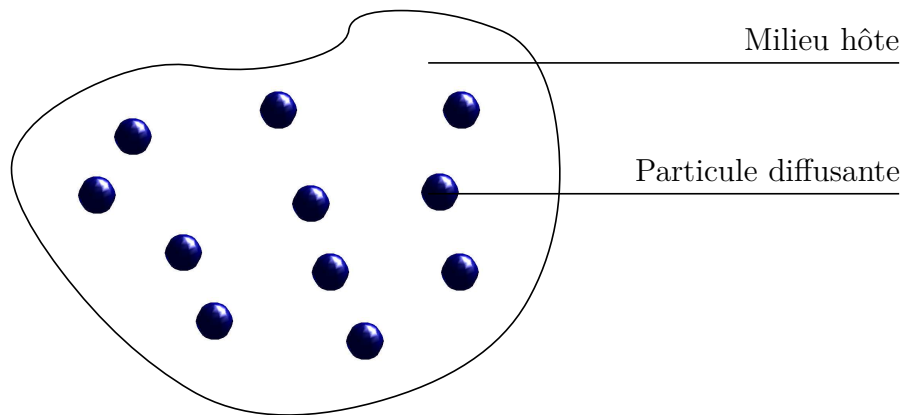


Fig. A.2 – Type de milieu diffusant étudié. Le milieu hôte est maintenant également le milieu de référence.

A.2.1 L'opérateur de diffusion \mathcal{T} : théorie de la diffusion multiple

Repartons de la relation de fermeture sur les opérateurs donnée par l'équation A.38 :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \mathcal{G} = \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i \mathcal{G}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.66})$$

Cette équation peut être écrite de la manière suivante :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \underbrace{\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V} \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i \mathcal{G}_{\text{ref}}}_{\mathcal{T}}. \quad (\text{A.67})$$

L'opérateur de diffusion \mathcal{T} ainsi défini n'est pas qu'une simple variable intermédiaire de calcul. Il a une signification physique précise que nous allons détailler dans la suite.

Cas d'un seul diffuseur

Dans le cas où une seule particule diffusante est présente dans le milieu, l'opérateur \mathcal{V} représente la diffusion par cette particule (hétérogénéité). L'opérateur de diffusion est alors noté :

$$t = \mathcal{T} = \mathcal{V} \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i. \quad (\text{A.68})$$

Chaque terme de la somme d'ordre i s'interprète alors comme i événements de diffusion internes à la particule (voir figure A.3). Nous sommes donc bien en présence de diffusion multiple.

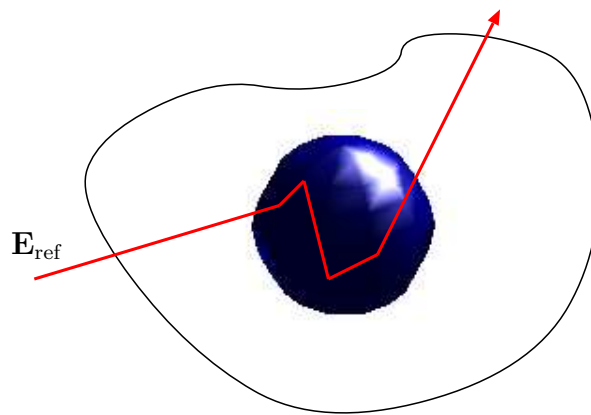


Fig. A.3 – Interprétation physique de l'opérateur diffusion pour une particule. L'exemple ci-dessus correspond au terme $i = 3$ (4 diffusions) dans l'équation A.68.

Nous avons également une équation identique sur les champs, à savoir :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} t \mathbf{E}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.69})$$

C'est ainsi que le tenseur $\overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ appliqué au champ $\mathbf{E}_{\text{ref}}(\mathbf{r}, \omega')$ donne le courant induit en \mathbf{r} . Pour bien comprendre, écrivons le développement des premiers termes de $\overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= V(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + V(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) V(\mathbf{r}', \omega) \\ &+ \int V(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \omega) V(\mathbf{r}_1, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega) V(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}_1 \\ &+ \iint V(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \omega) V(\mathbf{r}_2, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \omega) V(\mathbf{r}_1, \omega) \\ &\times \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega) V(\mathbf{r}', \omega) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Décrivons le dernier terme : il exprime qu'au point \mathbf{r}' se situe une source de rayonnement $V(\mathbf{r}', \omega)$ excitée préalablement par un champ extérieur \mathbf{E}_{ref} . Le tenseur de GREEN $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}', \omega)$ décrit alors la propagation de \mathbf{r}' jusqu'en \mathbf{r}_1 . Ce champ diffusé excite à son tour un autre point source $V(\mathbf{r}_1, \omega)$. Le rayonnement ainsi induit se propage jusqu'au point $V(\mathbf{r}_2, \omega)$ et ainsi de suite.

On remarque de plus immédiatement que si un des deux points $V(\mathbf{r}, \omega)$ ou $V(\mathbf{r}', \omega)$ est en dehors du diffuseur, alors $\overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = 0$. Cela est dû au fait que $V(\mathbf{r}, \omega)$ est nul en dehors du diffuseur. L'opérateur de diffusion contient toutes les diffusions multiples pour les éléments de volume du diffuseur lui-même. Par conséquent, les résonances de la diffusion d'une particule liées à sa forme sont contenues dans t . Il est ainsi possible d'utiliser par exemple la théorie de MIE pour calculer cet opérateur diffusion pour une particule sphérique.

Cas de n diffuseurs

Comme nous l'avons précisé au début de cette annexe, nous considérons ici que tous les diffuseurs sont identiques. Pour une particule placée au point $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, on définit la fonction θ par :

$$\theta(\mathbf{r}) = 1 \quad \text{si } \mathbf{r} \in \text{à la particule}, \quad \theta(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{r} \notin \text{à la particule}. \quad (\text{A.71})$$

Ainsi, pour n particules identiques, V peut être décomposé par :

$$V(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} (\epsilon_p(\omega) - \epsilon_{\text{ref}}(\omega)) \sum_{i=1}^n \theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n V_i(\mathbf{r}, \omega) \quad \mathcal{V} = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \quad (\text{A.72})$$

où ϵ_p est la permittivité relative des particules supposées homogènes. On rappelle que les positions des diffuseurs sont données par $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$. L'opérateur de diffusion \mathcal{T} devient :

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} \sum_{i=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}]^i = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i + \sum_{i,j=1}^n \mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_j + \sum_{i,j,k=1}^n \mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_k + \dots \quad (\text{A.73})$$

Chaque terme de la somme d'ordre i s'interprète alors comme i événements de diffusion (voir figure A.4).

Tout comme nous avons défini aisément l'opérateur de diffusion t pour une seule particule, nous faisons de même ici en définissant l'opérateur de diffusion \mathcal{T}_i pour la particule i :

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{V}_i \sum_{j=0}^{\infty} [\mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_i]^j. \quad (\text{A.74})$$

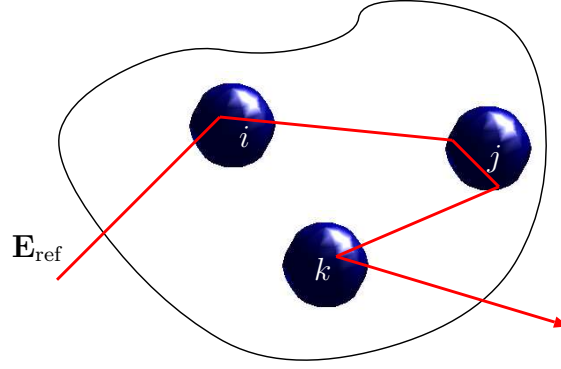


Fig. A.4 – Interprétation physique de l'opérateur diffusion dans le cas de n particules avec les \mathcal{V}_i . L'exemple ci-dessus correspond au terme $\mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_k$ dans l'équation A.73.

Calculons alors le terme ci-dessous en injectant l'expression de l'équation A.74 (FRISH 1967) :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k}}^n \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_k + \dots \\ & = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i + \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_j + \dots = \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i + \sum_{i,j=1}^n \mathcal{V}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{V}_j + \dots \end{aligned}$$

On retrouve alors l'expression de l'équation A.73. Nous avons donc :

$$\boxed{\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k}}^n \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_k + \dots} \quad (\text{A.75})$$

Cette équation constitue déjà une avancée importante : on a ainsi remplacé un processus de diffusion simple par une hétérogénéité \mathcal{V}_i par un processus de diffusion par une particule entière \mathcal{T}_i (c'est-à-dire faisant apparaître les diffusions multiples sur la particule considérée, voir figure A.5).

Du fait de la similitude des particules, nous avons également sous forme tensorielle :

$$\vec{\mathbf{T}}_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, \omega). \quad (\text{A.76})$$

On rappelle d'après l'équation A.67 que $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T} \mathcal{G}_{\text{ref}}$. Il est donc intéressant de calculer la moyenne de l'opérateur de diffusion pour calculer $\langle \mathcal{G} \rangle$ et ainsi déduire la forme de l'opérateur de masse (équation A.51 de DYSON). On a d'après l'équation A.75 :

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mathcal{T}_i \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j \rangle + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k}}^n \langle \mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_k \rangle + \dots \quad (\text{A.77})$$

Occupons-nous de chacun des termes séparément :

- Le premier terme se calcule facilement, on a d'après l'équation A.76 :

$$\left\langle \vec{\mathbf{T}}_i \right\rangle(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, \omega) P_1(\mathbf{r}_i) d^3 \mathbf{r}_i \quad (\text{A.78})$$

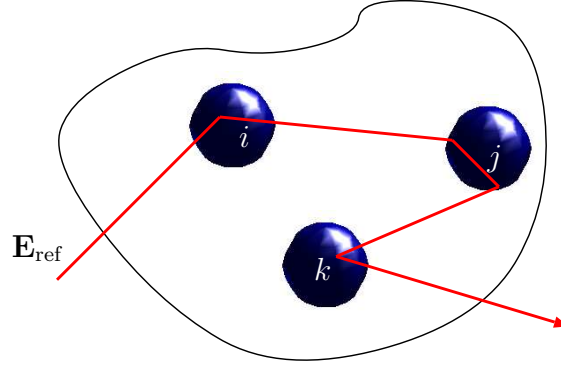


Fig. A.5 – Interprétation physique de l'opérateur diffusion dans le cas de n particules avec les \mathcal{T}_i . L'exemple ci-dessus est inclus dans le terme $\mathcal{T}_i \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_k$ dans l'équation A.75. À noter qu'on ne peut pas avoir le terme $\mathcal{T}_j \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T}_j$ puisque toutes les diffusions sur la particule j sont incluses dans \mathcal{T}_j .

où la densité de probabilité que le diffuseur i se trouve à la position \mathbf{r}_i est donnée par $P_1(\mathbf{r}_i) = 1/V$ avec V volume du milieu diffusant. Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n \langle \vec{\mathbf{T}}_i \rangle (\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{n}{V} \int \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_1, \omega) d^3 \mathbf{r}_1. \quad (\text{A.79})$$

- En ce qui concerne le deuxième terme, on écrit :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \rangle &= \iiint \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i, \omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_j, \omega) \\ &\times P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_i d^3 \mathbf{r}_j. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

La difficulté vient du fait que la densité de probabilité $P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ ne se factorise pas, c'est-à-dire que la recherche de la position de la particule j est soumise à la position choisie pour la particule i . En particulier, les particules ne peuvent pas s'interpénétrer. Ainsi, on pose d'après le développement en essaim présenté au début de cette annexe :

$$P_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{V^2} [1 + \underbrace{g_2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}_{\text{corrélations}}] \quad (\text{A.81})$$

avec $g_2 = 0$ s'il n'y a pas de corrélations. L'équation A.80 peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \rangle &= \iiint \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_4, \omega) \\ &\times \frac{1}{V^2} [1 + g_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3 d^3 \mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \rangle &= \frac{n(n-1)}{V^2} \iiint \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \\ &\times \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_4, \omega) [1 + g_2(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)] d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \mathbf{r}_3 d^3 \mathbf{r}_4. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

- Et pour bien comprendre, faisons de même sur le troisième terme où deux cas de figure sont à prendre en compte :

- 1^{er} cas : trois diffuseurs différents (i.e. $i \neq k$)

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j, j \neq k, i \neq k}}^n \left\langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_k \right\rangle &= \frac{n(n-1)(n-2)}{V^3} \int \dots \int \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5, \omega) \\
&\otimes \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_6, \omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_7, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_7, \omega) \\
&\times [1 + g_2(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) + g_2(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_7) + g_2(\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7) + g_3(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7)] \\
&\times d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_3 d^3\mathbf{r}_4 d^3\mathbf{r}_5 d^3\mathbf{r}_6 d^3\mathbf{r}_7.
\end{aligned} \tag{A.84}$$

- 2^{ème} cas : deux diffuseurs uniquement (i.e. $i = k$)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,i \neq j}^n \left\langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_i \right\rangle &= \frac{n(n-1)}{V^2} \int \dots \int \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_5, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_5, \omega) \\
&\otimes \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_6, \omega) \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, \omega) \vec{\mathbf{t}}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_5, \mathbf{r}' - \mathbf{r}_5, \omega) \\
&\times [1 + g_2(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6)] d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{r}_3 d^3\mathbf{r}_4 d^3\mathbf{r}_5 d^3\mathbf{r}_6.
\end{aligned} \tag{A.85}$$

Cette fois c'est bon, le supplice est terminé!

Si on suppose que nous sommes en présence d'un grand nombre de particules n et si on pose $\rho = n/V$ la densité de particules dans le milieu diffusant, alors on remarque que :

- Le terme de diffusion simple $\sum_{i=1}^n \left\langle \vec{\mathbf{T}}_i \right\rangle$ est en ρ .
- Le terme de diffusion double $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left\langle \vec{\mathbf{T}}_i \vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}} \vec{\mathbf{T}}_j \right\rangle$ est en ρ^2 .
- Etc...

Ainsi, le développement de $\langle T \rangle$ peut être vu comme un développement perturbatif en ρ . Donc plus la densité de particules sera importante et plus il faudra aller loin dans les termes à retenir. On voit ici apparaître la diffusion dépendante (termes en ρ^2 , etc...) qui est fondamentalement liée aux corrélations entre particules. Pour une faible densité, on pourra considérer que les événements de diffusion sont indépendants. La théorie de MIE qui nous renseigne sur la diffusion par une particule sphérique pourra alors être appliquée.




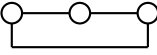
A.2.2 Les diagrammes de Feynman

Les difficultés rencontrées pour écrire la moyenne de l'opérateur de diffusion nous amène à utiliser dans la suite une écriture schématique.

Les diagrammes utilisés sont dus à FEYNMAN. Ils ont été introduits dans le cadre de la théorie quantique des champs et sont maintenant très utilisés en physique théorique. Ils permettent une écriture simplifiée des équations précédentes sans perdre leur sens physique.

Introduction

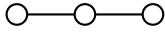
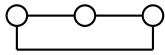
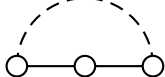
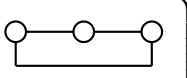
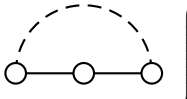
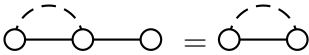


Les différents diagrammes élémentaires dont nous allons avoir besoin dans la suite sont les suivants :

Diagramme	Signification
	Une ligne représente la propagation entre deux diffuseurs dans le milieu de référence. Elle correspond donc au tenseur $\vec{\mathbf{G}}_{\text{ref}}$.
	Un cercle représente le processus de diffusion par une particule entière. Il correspond donc au tenseur $\vec{\mathbf{t}}$.
	Les traits discontinus représentent les corrélations entre particules. Ils correspondent donc aux fonctions g_2 et g_3 .
	Les particules reliées par des traits continus au niveau inférieur sont identiques.

Les facteurs du type $n(n-1)\dots(n-p+1)/V^p$ présents dans l'expression de la moyenne de l'opérateur de diffusion $\langle \mathcal{T} \rangle$ ne seront pas représentés sur les diagrammes.

Vocabulaire

Quelques mots de vocabulaire nous seront utiles dans la suite :

Diagramme	Nom associé
	Diagramme nu
	Diagramme semi-habillé
	Diagramme habillé
 	Diagrammes connexes (non factorisables)
 =  × 	Diagramme factorisable

Écriture de l'opérateur $\langle \mathcal{T} \rangle$

Avec les conventions introduites précédemment, nous sommes en mesure de mettre sous forme diagrammatique le développement laborieux de la moyenne de l'opérateur de diffu-

sion. La traduction donne :

$$\begin{aligned}
 \langle T \rangle = & \text{○} + \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} + \text{○} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} + \text{○} - \text{○} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} - \text{○} \\
 & + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} - \text{○} + \text{○} \overset{\text{---}}{\text{○}} - \text{○} - \text{○} - \text{○} \\
 & + \text{○} - \text{○} - \text{○} - \text{○} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.86}$$

Ainsi, le premier diagramme correspond à la diffusion par une particule, les deux suivants à la diffusion par deux particules une fois la densité de probabilité P_2 éclatée en deux termes $1 + g_2$, les sept suivants à la diffusion par trois particules (les cinq premiers pour des particules toutes différentes –il y a bien cinq termes dans l'éclatement de P_3 – et les deux suivants pour deux particules identiques –il n'y a que deux termes dans l'éclatement de P_2 –) et ainsi de suite.

La figure A.6 présente une interprétation physique pour le dixième diagramme du développement de $\langle T \rangle$.

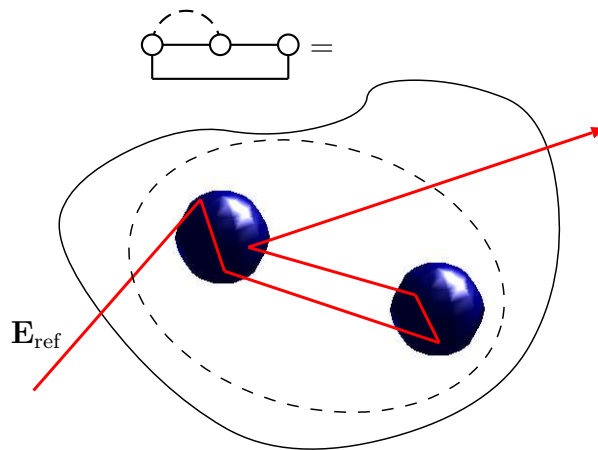

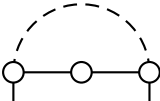
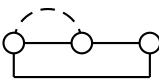
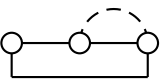


Fig. A.6 – Interprétation physique d'un diagramme. Dans cet exemple, les deux particules sont corrélées. La diffusion se fait d'abord sur la première puis sur la deuxième et retour ensuite sur la première.

Remarque : On peut faire trois remarques importantes sur les diagrammes :

- Dans l'expression de $\langle T \rangle$, on notera que deux diffuseurs successifs sont forcément différents. Donc le schéma  est impossible.
- Il est évident que deux diffuseurs identiques ne sont pas corrélés. Ainsi le schéma  est également impossible.
- Enfin, on a  =  du fait de la similitude du premier et du dernier diffuseur.

Retour sur l'équation de Dyson

Recherchons maintenant l'expression de l'opérateur de masse sous forme de diagrammes. Pour cela, nous rappelons l'équation de DYSON et celle faisant intervenir l'opérateur de diffusion :

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{M} \langle \mathcal{G} \rangle, \quad (\text{A.87})$$

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \langle \mathcal{T} \rangle \mathcal{G}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.88})$$

On itère l'équation A.87 ce qui donne simplement :

$$\boxed{\langle \mathcal{T} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathcal{M} \mathcal{G}_{\text{ref}})^i \mathcal{M}}. \quad (\text{A.89})$$



Dans ces conditions, si on écrit l'opérateur de masse sous la forme :

$$\mathcal{M} = \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \dots \quad (\text{A.90})$$

alors le calcul des premiers termes de la série donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} + \mathcal{M} \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{M} = & \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ & + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} \\ & + \text{○} \text{---} \text{○} \text{---} \text{○} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

On retrouve ainsi l'expression de la moyenne de l'opérateur de diffusion. Ainsi, il est important de remarquer que **l'opérateur de masse est représenté par la somme de tous les diagrammes non factorisables**. Définissons deux diagrammes supplémentaires :

Diagramme	Signification
	Une ligne épaisse représente le tenseur de GREEN moyen $\langle \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}} \rangle$.
	Une disque plein représente l'opérateur de masse \mathcal{M} .

L'équation de DYSON se met finalement sous la forme

$$\boxed{\text{---} = \text{---} + \text{---} \bullet \text{---}}. \quad (\text{A.92})$$

Approximation de Foldy-Twersky

Elle exprime une approximation de l'opérateur de masse comme suit :

$$\bullet \sim \text{○}. \quad (\text{A.93})$$

Approximation de Keller ou de Bourret

Elle exprime une approximation de l'opérateur de masse comme suit :

$$\bullet \sim \circ + \underbrace{\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}}_{\text{1}^{\text{ère}} \text{ correction de diffusion dépendante}} \quad . \quad (\text{A.94})$$

A.2.3 Une équation fermée pour la corrélation du champ : l'équation de Bethe-Salpeter

Pour trouver une équation faisant apparaître une grandeur énergétique, nous repartons de celle vérifiée par l'opérateur de GREEN \mathcal{G} en fonction de l'opérateur de diffusion \mathcal{T} (équation A.67) :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\text{ref}} + \mathcal{G}_{\text{ref}} \mathcal{T} \mathcal{G}_{\text{ref}}. \quad (\text{A.95})$$

L'opérateur de diffusion (dans sa version non moyennée) s'écrit (comme nous ne moyennons pas, les corrélations n'apparaissent pas ici) :

$$\mathcal{T} = \circ + \circ\text{---}\circ + \circ\text{---}\circ\text{---}\circ + \underbrace{\circ\text{---}\circ\text{---}\circ}_{\text{---}} + \circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ + \dots \quad (\text{A.96})$$

Ainsi, le produit $\mathcal{G}\mathcal{G}^*$ s'écrit :

$$\mathcal{G}\mathcal{G}^* = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \dots \quad (\text{A.97})$$

où la première ligne correspond aux termes non étoilés et la deuxième aux termes étoilés¹⁰. Le développement de l'expression précédente se fait simplement en prenant les combinaisons de tous les diagrammes de la première ligne avec ceux de la deuxième ligne. Prenons ensuite la moyenne de l'équation A.97, cela va faire apparaître les corrélations :

$$\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---}\circ\text{---}\circ\text{---} \end{array} + \dots$$

$$+ \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \dots$$


$$+ \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---}\circ\text{---} \\ \text{---}\circ\text{---} \end{array} + \dots \quad (\text{A.98})$$

^{10*} désigne la quantité conjuguée

On définit alors un nouvel opérateur noté \mathcal{K} et appelé « opérateur intensité » comme suit :

$$\mathcal{K} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \end{array} + \dots \quad (\text{A.99})$$

Tout comme l'opérateur de masse, **l'opérateur intensité est représenté par la somme de tous les diagrammes doubles non factorisables**, d'où son deuxième nom de « vertex irréductible ». Définissons un diagramme supplémentaire :

Diagramme	Signification
	Un carré hachuré représente l'opérateur intensité \mathcal{K} .

Calculons alors la quantité suivante où nous remplaçons les différents diagrammes par leurs développements respectifs (le développement de $\langle \mathcal{G} \rangle$ est donné par celui de $\langle \mathcal{T} \rangle$ d'après l'équation A.88, celui de $\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle$ est donné par l'équation A.98) :

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle. \quad (\text{A.100})$$

Une fois les calculs menés, nous retrouvons l'expression de $\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle$. Ainsi, l'équation de BETHE-SALPETER est donnée par :

$$\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle. \quad (\text{A.101})$$

En écriture formelle, elle s'écrit :

$$\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle^* + \langle \mathcal{G} \rangle \langle \mathcal{G} \rangle^* \mathcal{K} \langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle. \quad (\text{A.102})$$

On a de même la même équation pour le champ :

$$\langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \rangle = \langle \mathbf{E} \rangle \otimes \langle \mathbf{E} \rangle^* + \langle \mathcal{G} \rangle \langle \mathcal{G}^* \rangle \mathcal{K} \langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \rangle \quad (\text{A.103})$$

ce qui donne finalement en écriture tensorielle :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \otimes \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle \otimes \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle \\ &+ \iiint \langle \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \rangle \langle \vec{\mathbf{G}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, \omega') \rangle^* \vec{\mathbf{K}}(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega, \omega') \\ &\times \langle \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}_1, \omega) \otimes \mathbf{E}^*(\boldsymbol{\rho}_2, \omega') \rangle d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

L'opérateur intensité décrit d'un point de vue physique la corrélation qui existe aux points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ entre les champs rayonnés par deux sources situées aux points $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2$ à la pulsation ω et ω' respectivement.

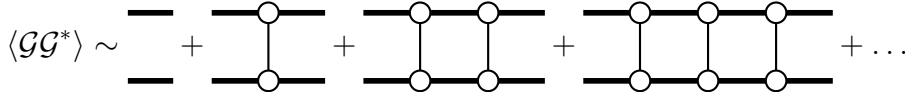
Approximation de l'échelle (*ladder approximation*)

Elle exprime une approximation de l'opérateur intensité comme suit :



$$\text{[Shaded Square]} \sim \text{[Vertical Line with Two Circles]} \quad (\text{A.105})$$

Par itération de l'équation A.101, on en déduit :



$$\langle \mathcal{G}\mathcal{G}^* \rangle \sim \text{[Horizontal Line]} + \text{[Horizontal Line with 2 Vertical Lines]} + \text{[Horizontal Line with 3 Vertical Lines]} + \text{[Horizontal Line with 4 Vertical Lines]} + \dots \quad (\text{A.106})$$

Le nom de cette approximation est ainsi tout trouvé. Elle nous servira à la fin de cette annexe pour déduire une approximation de la fonction de phase.

A.3 Équation de Transfert Radiatif

Cette section est inspirée du rapport de stage post-doctoral de Carsten HENKEL (HENKEL 1997) avec adaptation dans le cas du régime instationnaire. Les équations de DYSON et de BETHE-SALPETER sont des équations exactes. Pour démontrer l'ETR, nous allons avoir besoin de faire certaines approximations. Et tout d'abord, nous ne traiterons pas du cas polarisé. En effet, une version polarisée de l'ETR existe (RYZHIK *et al.* 1996). Ici, la luminance sera une grandeur scalaire. Un formalisme semblable a également été développé par BARABANENKOV et FINKEL'BERG (BARABANENKOV et FINKEL'BERG 1968) et par RYTOV (RYTOV *et al.* 1989).

A.3.1 Bethe-Salpeter dans Wigner

Repardons de l'équation de BETHE-SALPETER telle que décrite par l'équation A.104 mais dans l'approximation scalaire :

$$\begin{aligned} \langle E(\mathbf{r}_1, \omega_1) E^*(\mathbf{r}_2, \omega_2) \rangle &= \langle E(\mathbf{r}_1, \omega_1) \rangle \langle E^*(\mathbf{r}_2, \omega_2) \rangle + \iiint \langle G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \omega_1) \rangle \\ &\times \langle G^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2, \omega_2) \rangle K(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) \langle E(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_1) E^*(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_2) \rangle d^3\mathbf{r}'_1 d^3\mathbf{r}'_2 d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

Le milieu diffusant est supposé statistiquement homogène et isotrope de sorte qu'il y a invariance par translation. La fonction de GREEN moyenne scalaire est alors donnée par :

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \rangle = \langle G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \rangle = \int \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3\mathbf{k}}{k_{\text{ref}}^2(\omega) - k^2 - M(k, \omega)} \frac{d^3\mathbf{k}}{8\pi^3} \quad (\text{A.108})$$

$$K(\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1 + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_2 + \Delta\mathbf{r}, \omega_1, \omega_2) = K(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) \quad (\text{A.109})$$

où l'expression de la fonction de GREEN est donnée par celle de l'équation A.58 et où M et K désignent respectivement l'opérateur de masse et l'opérateur intensité. Cela donne pour la transformée de FOURIER de K :

$$\begin{aligned} K(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega_1, \omega_2) &= \iiint d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2 K(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_1, \omega_2) \\ &\quad \times \exp[-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2 - i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2] \\ &= \exp[i\mathbf{k}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} - i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} + i\mathbf{k}_2 \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r} + i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}] \\ &\quad \times K(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega_1, \omega_2). \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

Cette relation est valable pour tout $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}$. Par conséquent, on peut mettre la transformée de FOURIER sous la forme :

$$K(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega_1, \omega_2) = 8\pi^3 \delta(\mathbf{k}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1 - \mathbf{k}_2 + \boldsymbol{\kappa}_2) \widetilde{K}(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega_1, \omega_2). \quad (\text{A.111})$$

Les signes des vecteurs d'onde ont été choisis tels que la transformée de FOURIER de l'opérateur intensité s'interprète comme la description de la corrélation pour les deux processus de diffusion suivants :

$$\boldsymbol{\kappa}_1 \rightarrow \mathbf{k}_1 \text{ (à la pulsation } \omega_1) \quad \boldsymbol{\kappa}_2 \rightarrow \mathbf{k}_2 \text{ (à la pulsation } \omega_2). \quad (\text{A.112})$$

Il s'agit maintenant d'utiliser la transformée de WIGNER pour donner une autre forme à l'équation de BETHE-SALPETER. Pour cela, on définit les transformées de WIGNER suivantes :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \left\langle E\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (\text{A.113})$$

$$f_j(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int j_{\text{ext}}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) j_{\text{ext}}^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.114})$$

La luminance est une grandeur faisant intervenir quatre paramètres : la position \mathbf{r} et la direction \mathbf{u} d'une part et la pulsation ω et le temps t d'autre part ce qui est dû au fait qu'elle s'interprète comme un flux radiatif local et directionnel à une pulsation fixée et au temps t . Le champ lui est une grandeur à deux variables (la position et le temps). Le problème consiste donc à relier ces deux grandeurs entre-elles ce que permet la transformée de WIGNER (APRESYAN et KRAVTSOV 1996). Dans un premier temps, nous allons montrer que l'équation de BETHE-SALPETER est une équation pour cette grandeur et dans un second temps, nous ferons les approximations nécessaires pour retrouver l'ETR. On précisera alors le lien exact existant entre le champ et la luminance. On rappelle que j_{ext} correspond aux sources extérieures déterministes de courant.

Terme cohérent f_{coh}

Comme défini au début de la première section, le terme cohérent correspond au premier terme du membre de droite de l'équation de BETHE-SALPETER. Il est donné par :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \left\langle E\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \left\langle E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle. \quad (\text{A.115})$$

Prenons la transformée de FOURIER de ce terme :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \left\langle E\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \left\langle E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \times \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.116})$$

On remplace alors les expressions du champ par leurs expressions en fonction de la fonction de GREEN (équation A.24) :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \left(\omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \mu_0^2 \iint d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \iint d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2 \times \left\langle G\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} - \boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \left\langle G^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} - \boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \times j_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) j_{\text{ext}}^*\left(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right). \quad (\text{A.117})$$

Pour alléger l'écriture, on définit la fonction G' comme suit :

$$G'(\mathbf{r}, \omega) = i\omega\mu_0 G(\mathbf{r}, \omega). \quad (\text{A.118})$$

En insérant les transformées de FOURIER des fonctions de GREEN, on obtient :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \iint d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \iint d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2 j_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \times j_{\text{ext}}^*\left(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1}{8\pi^3} dt_1 \langle G'(\mathbf{k}_1, t_1) \rangle \frac{d^3\mathbf{k}_2}{8\pi^3} dt_2 \langle G'^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle \times \exp\left[i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} - \boldsymbol{\rho}_1\right) - i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} - \boldsymbol{\rho}_2\right) + it_1\left(\omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) - it_2\left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)\right]. \quad (\text{A.119})$$

On effectue maintenant les changements de variables suivants (dont le jacobien vaut 1) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}' = (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)/2 \\ \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\rho}/2 \\ \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}/2 \end{cases}, \quad (\text{A.120})$$

$$\begin{cases} t' = (t_1 + t_2)/2 \\ t'' = t_1 - t_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t_1 = t' + t''/2 \\ t_2 = t' - t''/2 \end{cases}, \quad (\text{A.121})$$

ce qui donne :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \iint d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{8\pi^3} dt' dt'' \left\langle G'\left(\mathbf{k}_1, t' + \frac{t''}{2}\right) \right\rangle \times \left\langle G'^*\left(\mathbf{k}_2, t' - \frac{t''}{2}\right) \right\rangle \exp[i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}] \exp\left[i\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s}\right] \iint d^3\boldsymbol{\rho} d^3\boldsymbol{\rho}' \times j_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{\rho}' + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) j_{\text{ext}}^*\left(\boldsymbol{\rho}' - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \underbrace{\exp\left[-i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\rho}' + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right) + i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\boldsymbol{\rho}' - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}\right)\right]}_{\exp[-i\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \boldsymbol{\rho}] \exp[-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \boldsymbol{\rho}']} \times \exp[i\omega_0 t'' + i\omega t']. \quad (\text{A.122})$$

On reconnaît ainsi la transformée de WIGNER des courants :

$$\int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d\omega}{2\pi} j_{\text{ext}} \left(\boldsymbol{\rho}' + \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) j_{\text{ext}}^* \left(\boldsymbol{\rho}' - \frac{\boldsymbol{\rho}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \exp \left[-i \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \boldsymbol{\rho} \right] \\ \times \exp [-i\omega (t - t')] = f_j \left(\boldsymbol{\rho}', \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t - t', \omega_0 \right). \quad (\text{A.123})$$

Ainsi, le terme cohérent s'écrit :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int d^3 \mathbf{s} \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + i \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s} \right] \iiint \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{8\pi^3} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{8\pi^3} dt' dt'' d^3 \boldsymbol{\rho} \\ \times \left\langle G' \left(\mathbf{k}_1, t' + \frac{t''}{2} \right) \right\rangle \left\langle G'^* \left(\mathbf{k}_2, t' - \frac{t''}{2} \right) \right\rangle f_j \left(\boldsymbol{\rho}, \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t - t', \omega_0 \right) \\ \times \exp [i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp [i\omega_0 t'']. \quad (\text{A.124})$$

L'intégrale sur \mathbf{s} peut maintenant être évaluée et donne :

$$\int d^3 \mathbf{s} \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + i \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s} \right] = 8\pi^3 \delta \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \right) \quad (\text{A.125})$$

ce qui conduit à :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{8\pi^3} d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \boldsymbol{\rho} dt' dt'' \delta \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \right) \left\langle G' \left(\mathbf{k}_1, t' + \frac{t''}{2} \right) \right\rangle \\ \times \left\langle G'^* \left(\mathbf{k}_2, t' - \frac{t''}{2} \right) \right\rangle f_j \left(\boldsymbol{\rho}, \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t - t', \omega_0 \right) \\ \times \exp [i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp [i\omega_0 t'']. \quad (\text{A.126})$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{k}' = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) / 2 \\ \mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}' + \mathbf{q}/2 \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}' - \mathbf{q}/2 \end{cases}, \quad (\text{A.127})$$

et donc :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \mathbf{k}' d^3 \boldsymbol{\rho} dt' dt'' \delta (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left\langle G' \left(\mathbf{k}' + \mathbf{q}/2, t' + \frac{t''}{2} \right) \right\rangle \\ \times \left\langle G'^* \left(\mathbf{k}' - \mathbf{q}/2, t' - \frac{t''}{2} \right) \right\rangle f_j \left(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}', t' - t, \omega_0 \right) \exp [i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp [i\omega_0 t'']. \quad (\text{A.128})$$

Soit encore :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \boldsymbol{\rho} dt' dt'' \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, t' + \frac{t''}{2} \right) \right\rangle \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, t' - \frac{t''}{2} \right) \right\rangle \\ \times f_j \left(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0 \right) \exp [i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp [i\omega_0 t'']. \quad (\text{A.129})$$

Remplaçons une nouvelle fois les fonctions de GREEN par leurs transformées de FOURIER temporelles :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \boldsymbol{\rho} dt' dt'' \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \langle G'(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega_1) \rangle \langle G'^*(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega_2) \rangle \\ \times f_j \left(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0 \right) \exp [i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp [i\omega_0 t''] \exp \left[-i\omega_1 \left(t' + \frac{t''}{2} \right) + i\omega_2 \left(t' - \frac{t''}{2} \right) \right]. \quad (\text{A.130})$$

Nous faisons ensuite le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \omega' = (\omega_1 + \omega_2) / 2 \\ \omega'' = \omega_1 - \omega_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega' + \omega'' / 2 \\ \omega_2 = \omega' - \omega'' / 2 \end{cases} . \quad (\text{A.131})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \boldsymbol{\rho} dt' dt'' \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{d\omega''}{2\pi} \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega' + \frac{\omega''}{2} \right) \right\rangle \\ &\times \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega' + \frac{\omega''}{2} \right) \right\rangle f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp[i\omega_0 t'' - i\omega'' t' - i\omega' t''] . \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

On peut alors évaluer l'intégrale sur la variable t'' ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \boldsymbol{\rho} dt' \frac{d\omega''}{2\pi} \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega_0 + \frac{\omega''}{2} \right) \right\rangle \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega_0 + \frac{\omega''}{2} \right) \right\rangle \\ &\times f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp[i\omega'' t'] . \end{aligned} \quad (\text{A.133})$$

Il reste enfin à faire le décalage qui transforme t' en $t - t'$ ce qui s'écrit finalement :

$$\boxed{f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} d^3 \boldsymbol{\rho} dt' \frac{d\omega}{2\pi} \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \times f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})] \exp[i\omega(t - t')]}$$

(A.134)

On peut poser une autre écriture sous la forme :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \iint d^3 \boldsymbol{\rho} dt' A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t', \omega_0) \quad (\text{A.135})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) &= \iint \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \mathbf{q}/2, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \\ &\times \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \mathbf{q}/2, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - i\omega(t - t')] . \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

Terme incohérent f_{incoh}

Le terme incohérent correspond au deuxième terme du membre de droite dans l'équation de BETHE-SALPETER. Sa transformée de FOURIER est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \iint d^3 \mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \iiint d^3 \mathbf{r}_1 d^3 \mathbf{r}_2 d^3 \boldsymbol{\rho}_1 d^3 \boldsymbol{\rho}_2 \\ &\times \left\langle G \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} - \mathbf{r}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \left\langle G^* \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} - \mathbf{r}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \\ &\times K \left(\mathbf{r}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 + \frac{\omega}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \left\langle E \left(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) E^* \left(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

On introduit alors les transformées de FOURIER de G et de K :

$$\begin{aligned}
f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega) &= \iint d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \iiint d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2 \\
&\times \left\langle E\left(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) E^*\left(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \iint \frac{d^3\mathbf{k}_1}{8\pi^3} dt_1 \langle G(\mathbf{k}_1, t_1) \rangle \exp\left[i\mathbf{k}_1 \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} - \mathbf{r}_1\right)\right] \\
&\times \iint \frac{d^3\mathbf{k}_2}{8\pi^3} dt_2 \langle G^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle \exp\left[-i\mathbf{k}_2 \cdot \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} - \mathbf{r}_2\right)\right] \int \frac{d^3\mathbf{k}'_1}{8\pi^3} \frac{d^3\mathbf{k}'_2}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_2}{8\pi^3} dt_3 dt_4 \\
&\times K\left(\mathbf{k}'_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}'_2, \boldsymbol{\kappa}_2, t_3, t_4\right) \exp\left[i\left(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2\right)\right] \\
&\times \exp\left[i\left(t_1 + t_3\right)\left(\omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) - i\left(t_2 + t_4\right)\left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)\right]. \tag{A.138}
\end{aligned}$$

Utilisons alors le fait que :

$$\int d^3\mathbf{r}_1 \exp\left[-i\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1\right) \cdot \mathbf{r}_1\right] = 8\pi^3 \delta\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1\right) \tag{A.139}$$

et de même avec \mathbf{r}_2 , ce qui donne pour f_{incoh} :

$$\begin{aligned}
f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \iint d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] \iint d^3\boldsymbol{\rho}_1 d^3\boldsymbol{\rho}_2 \\
&\times \left\langle E\left(\boldsymbol{\rho}_1, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) E^*\left(\boldsymbol{\rho}_2, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_2}{8\pi^3} dt_1 dt_2 \langle G(\mathbf{k}_1, t_1) \rangle \\
&\times \langle G^*(\mathbf{k}_2, t_2) \rangle K\left(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, t_3, t_4\right) \exp\left[i\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s} + i\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\right) \cdot \mathbf{r}\right] \\
&\times \exp\left[-i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1 + i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2 + i\left(t_1 + t_3\right)\left(\omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) - i\left(t_2 + t_4\right)\left(\omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)\right]. \tag{A.140}
\end{aligned}$$

On fait alors les changements de variables :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2)/2 \\ \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'/2 \\ \boldsymbol{\rho}_2 = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'/2 \end{cases}, \tag{A.141}$$

$$\begin{cases} t' = (t_1 + t_3)/2 \\ t'' = t_1 - t_3 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t_1 = t' + t''/2 \\ t_3 = t' - t''/2 \end{cases}, \tag{A.142}$$

$$\begin{cases} T' = (t_2 + t_4)/2 \\ T'' = t_2 - t_4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} t_2 = T' + T''/2 \\ t_4 = T' - T''/2 \end{cases}. \tag{A.143}$$

On fait ainsi apparaître la transformée de WIGNER du champ, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3\mathbf{s} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}] \int d^3\boldsymbol{\rho} \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_1}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}_2}{8\pi^3} \\
&\times f\left(\boldsymbol{\rho}, \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2}, t - t' - T', \omega_0\right) \left\langle G\left(\mathbf{k}_1, t' + \frac{t''}{2}\right) \right\rangle \left\langle G^*\left(\mathbf{k}_2, T' + \frac{T''}{2}\right) \right\rangle \\
&\times K\left(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, t' - \frac{t''}{2}, T' - \frac{T''}{2}\right) \exp\left[i\frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s} + i\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\right) \cdot \mathbf{r}\right] \\
&\times \exp\left[-i\left(\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2\right) \cdot \boldsymbol{\rho} + 2i\omega_0\left(t' - T'\right)\right] dt' dt'' dT' dT''. \tag{A.144}
\end{aligned}$$

De même que précédemment, on a :

$$\int d^3 \mathbf{s} \exp \left[-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + i \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \cdot \mathbf{s} \right] = 8\pi^3 \delta \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \right). \quad (\text{A.145})$$

On pose de plus les deux changements de variables :

$$\begin{cases} \mathbf{k}' = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) / 2 \\ \mathbf{q} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{\kappa}_1 + \boldsymbol{\kappa}_2) / 2 \\ \mathbf{Q} = \boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2 \end{cases}. \quad (\text{A.146})$$

En insérant également les transformées de FOURIER temporelles des fonctions de GREEN et de l'opérateur intensité, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} \frac{d^3 \mathbf{Q}}{8\pi^3} f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t - t' - T', \omega_0) \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_1 \right) \right\rangle \\ &\times \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_2 \right) \right\rangle K \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{Q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{Q}}{2}, \omega_3, \omega_4 \right) \\ &\times \exp \left[-i\omega_1 \left(t' + \frac{t''}{2} \right) + i\omega_2 \left(T' + \frac{T''}{2} \right) - i\omega_3 \left(t' - \frac{t''}{2} \right) + i\omega_4 \left(T' - \frac{T''}{2} \right) \right] \\ &\times \exp [i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\rho} + 2i\omega_0 (t' - T')] \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} dt' dt'' dT' dT''. \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

La relation A.111 nous permet d'écrire :

$$K \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{Q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{Q}}{2}, \omega_3, \omega_4 \right) \quad (\text{A.148})$$

$$= 8\pi^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{Q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{Q}}{2}, \omega_3, \omega_4 \right). \quad (\text{A.149})$$

On va donc évaluer l'intégrale sur \mathbf{Q} . De plus, les intégrales sur t'' et T'' sont également calculables ce qui donne :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t - t' - T', \omega_0) \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_1 \right) \right\rangle \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_2 \right) \right\rangle \\ &\times \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_3, \omega_4 \right) 4\pi^2 \delta \left(\frac{\omega_4 - \omega_2}{2} \right) \delta \left(\frac{\omega_3 - \omega_1}{2} \right) \\ &\times \exp [-it'(\omega_1 + \omega_3) + iT'(\omega_2 + \omega_4) + 2i\omega_0(t' - T')] \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \frac{d\omega_3}{2\pi} \frac{d\omega_4}{2\pi} \exp [i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}] dt' dT'. \end{aligned} \quad (\text{A.150})$$

On élimine les distributions de DIRAC et on effectue en même temps le changement de variables devenu classique :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t - t' - T', \omega_0) \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega + \frac{\omega'}{2} \right) \right\rangle \\ &\times \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega - \frac{\omega'}{2} \right) \right\rangle \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega + \frac{\omega'}{2}, \omega - \frac{\omega'}{2} \right) \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \\ &\times \exp \left[it' \left(\omega_0 - \omega - \frac{\omega'}{2} \right) - iT' \left(\omega_0 - \omega + \frac{\omega'}{2} \right) \right] \exp [i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}] dt' dT'. \end{aligned} \quad (\text{A.151})$$

En faisant le changement de variables $\{u = (t' + T')/2, v = (t' - T')\}$, nous pouvons simplifier les intégrales faisant intervenir les variables t' et T' comme suit :

$$\int f(t - t' - T') \exp \left[-it' \left(-\omega_0 + \omega + \frac{\omega'}{2} \right) - iT' \left(-\omega_0 + \omega - \frac{\omega'}{2} \right) \right] dt' dT' \quad (\text{A.152})$$

$$= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \int f(t - 2u) \exp[-iu\omega'] du. \quad (\text{A.153})$$

Le terme incohérent devient alors :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3\boldsymbol{\rho} \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - it'\omega] \frac{d\omega}{2\pi} dt' \\ &\quad \times \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \int d^3\boldsymbol{\rho} \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t', \omega_0) \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \\ &\quad \times \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - i\omega(t - t')] \frac{d\omega}{2\pi} dt' \\ &\quad \times \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

On peut poser une autre écriture sous la forme :

$$f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int d^3\boldsymbol{\rho} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} dt' p_A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t', \omega_0) \quad (\text{A.155})$$

$$\begin{aligned} \text{avec } p_A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \\ &\quad \times \widetilde{K} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \\ &\quad \times \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) + i\omega(t - t')]. \end{aligned} \quad (\text{A.156})$$

Équation de Bethe-Salpeter modifiée

La transformée de FOURIER du premier membre de l'équation de BETHE-SALPETER donne la transformée de WIGNER du champ f . Autrement-dit, sans faire **aucune approximation**, nous déduisons la forme modifiée de l'équation :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int d^3\boldsymbol{\rho} dt' A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t', \omega_0) \\ &\quad + \int d^3\boldsymbol{\rho} \frac{d^3\boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} dt' p_A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t', \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A.157})$$

A.3.2 Approximations pour retrouver l'etr

Calcul de la fonction A et de f_{coh}

La fonction A a été définie pour calculer le terme f_{coh} . Elle s'exprime par (équation A.135) :

$$A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t - t', \omega_0) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{\omega}{2\pi} A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) + i\omega(t - t')] \quad (\text{A.158})$$

$$\text{avec } A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) = \left\langle G' \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \left\langle G'^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle. \quad (\text{A.159})$$

On considère en première approximation que $\omega \ll \omega_0$, on s'intéresse donc aux **grandes échelles de temps** par rapport à la période de l'onde, on a alors :

$$G' \left(\mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 \pm \frac{\omega}{2} \right) \sim i\omega_0 \mu_0 G \left(\mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 \pm \frac{\omega}{2} \right). \quad (\text{A.160})$$

D'après l'équation A.108, on a :

$$\begin{aligned} & A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) \\ &= \frac{i\mu_0\omega_0}{\left[k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) - \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)^2 - M \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right]} \\ &\times \frac{-i\mu_0\omega_0}{\left[k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) - \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2} \right)^2 - M^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right]} \\ &= \frac{\mu_0^2 \omega_0^2 \left[\left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle - \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \right]}{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + M \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) - M^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) - k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) + k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.161})$$

La deuxième approximation consiste à s'intéresser aux **grandes échelles d'espace** telles que $\|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}\| \gg \lambda_{\text{eff}}$ où λ_{eff} désigne la longueur d'onde du rayonnement dans le milieu effectif, soit d'après l'intégrale ci-dessus, aux petits $\|\mathbf{q}\|$ par rapport à $2\pi/\lambda_{\text{eff}}$. À l'ordre le plus bas en q et en ω , on a :

$$M \left(\mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 \pm \frac{\omega}{2} \right) \sim M(k, \omega_0). \quad (\text{A.162})$$

Et donc d'après l'équation A.60, on a :

$$M \left(\mathbf{k} \pm \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 \pm \frac{\omega}{2} \right) \sim k_{\text{ref}}^2(\omega_0) - k_{\text{eff}}^2(\omega_0). \quad (\text{A.163})$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} M \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) - M^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) &= 2i\mathcal{I} [M(k, \omega_0)] \\ &= 2i\mathcal{I} [k_{\text{ref}}^2(\omega_0) - k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.164})$$

Il reste à considérer la différence des fonctions de GREEN moyennes. On a :

$$\begin{aligned} \left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle &\sim \langle G(\mathbf{k}, \omega_0) \rangle = \frac{1}{k_{\text{ref}}^2(\omega_0) - \mathbf{k}^2 - M(\mathbf{k}, \omega_0)} = \frac{1}{k_{\text{eff}}^2(\omega_0) - \mathbf{k}^2} \\ &\sim \frac{1}{-\mathbf{k}^2 + \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)] + i\mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]}. \end{aligned} \quad (\text{A.165})$$

La troisième approximation consiste alors à postuler que $\mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)] \ll \mathbf{k}^2$. Nous verrons un peu plus loin ce que cela signifie physiquement. En utilisant le fait que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = \text{VP} \frac{1}{x - x_0} - i\pi\delta(x - x_0) \quad (\text{A.166})$$

on en déduit que :

$$\left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \sim \text{VP} \frac{1}{\mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)] - \mathbf{k}^2} - i\pi\delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]). \quad (\text{A.167})$$

Ainsi, la différence devient :

$$\left\langle G \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle - \left\langle G^* \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \right\rangle \sim -2i\pi\delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]). \quad (\text{A.168})$$

En ce qui concerne la différence des vecteurs d'onde de référence, elle est donnée par :

$$k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 - \frac{\omega}{2} \right) - k_{\text{ref}}^2 \left(\omega_0 + \frac{\omega}{2} \right) \sim -\frac{2\omega_0\omega\epsilon_{\text{ref}}(\omega_0)}{c_0^2} = -\frac{2\omega_0\omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega_0)}. \quad (\text{A.169})$$

Finalement, l'expression de la fonction A est approximée par :

$$A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) = \mu_0^2 \omega_0^2 \frac{\pi\delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)])}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - i\omega_0\omega/c_{\text{ref}}^2(\omega_0) + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0) - k_{\text{ref}}^2(\omega_0)]}. \quad (\text{A.170})$$

Ainsi, le calcul du terme cohérent approximé donne :

$$\begin{aligned} f_{\text{coh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} d^3\boldsymbol{\rho} \frac{d\omega}{2\pi} dt' \frac{\mu_0^2 \omega_0^2 \pi\delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)])}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - i\omega_0\omega/c_{\text{ref}}^2(\omega_0) + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0) - k_{\text{ref}}^2(\omega_0)]} \\ &\quad \times f_j(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, t', \omega_0) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - i\omega_0(t - t')] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] f_{\text{coh}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0). \end{aligned} \quad (\text{A.171})$$

On en déduit que :

$$f_{\text{coh}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) = \frac{\mu_0^2 \omega_0^2 \pi\delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)])}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - i\omega_0\omega/c_{\text{ref}}^2(\omega_0) + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0) - k_{\text{ref}}^2(\omega_0)]} f_j(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0). \quad (\text{A.172})$$

Calcul de la fonction p_A et de f_{incoh}

Le terme incohérent est donné par :

$$f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} dt' p_A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t', \omega_0). \quad (\text{A.173})$$

La fonction p_A quant à elle se développe quand $\|\mathbf{q}\| \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} p_A(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, t - t', \omega_0) &= \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega_0, \omega)}{\mu_0^2 \omega_0^2} \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - i\omega(t - t')] \\ &\quad \times \underbrace{\widetilde{K}\left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \boldsymbol{\kappa} - \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right)}_{\rightarrow \widetilde{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \omega_0)} \\ &= \widetilde{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \omega_0) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega_0, \omega)}{\mu_0^2 \omega_0^2} \\ &\quad \times \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - i(t - t')]. \end{aligned} \quad (\text{A.174})$$

Or :

$$f_{\text{incoh}}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{8\pi^3} \frac{d\omega}{2\pi} \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] f_{\text{incoh}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) \quad (\text{A.175})$$

ce qui conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} f_{\text{incoh}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) &= \frac{A(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0)}{\mu_0^2 \omega_0^2} \int d^3 \boldsymbol{\rho} \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} dt' \widetilde{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \omega_0) \\ &\quad \times \exp[-i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} + i\omega t'] f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, t', \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A.176})$$

c'est-à-dire finalement :

$$\boxed{f_{\text{incoh}}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) = \frac{\pi \delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega)])}{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} - i\omega_0 \omega / c_{\text{ref}}^2(\omega_0) + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega)]} \times \int \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} \widetilde{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \omega_0) f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, \omega, \omega_0)} \quad (\text{A.177})$$

A.3.3 L'etr retrouvée

Les équations A.157, A.172 et A.177 nous permettent d'écrire au final une nouvelle forme de l'équation de BETHE-SALPETER :

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{i\omega_0 \omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega_0)} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega)] \right\} f(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) &= \pi \delta[\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}(k_{\text{eff}}^2(\omega))] \\ \times \left[\omega_0^2 \mu_0^2 f_j(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) + \int \frac{d^3 \boldsymbol{\kappa}}{8\pi^3} \widetilde{K}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \omega_0) f(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\kappa}, \omega, \omega_0) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.178})$$

qui n'est autre que la transformée de FOURIER de l'ETR par rapport à \mathbf{r} et t . Posons $k_r^2 = \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]$. L'équation précédente nous permet de poser pour la fonction f ¹¹ :

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{k}, \omega, \omega_0) = \frac{16\pi^3}{k_r} \delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{q}, \mathbf{k} = k_r \mathbf{u}, \omega). \quad (\text{A.179})$$

Nous avons ainsi défini la transformée de FOURIER de la luminance par rapport à \mathbf{r} et t . Ainsi, la luminance est la transformée de WIGNER du champ. Elle est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k} = k_r \mathbf{u}, t) = \int \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{q}, \mathbf{k} = k_r \mathbf{u}, \omega) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] \frac{d^3\mathbf{q} d\omega}{8\pi^3 2\pi}. \quad (\text{A.180})$$

La luminance généralisée ainsi définie vérifie toutes les propriétés de la luminance définie en radiométrie classique. En particulier, le flux radiatif se calcule de la même manière (APRESYAN et KRAVTSOV 1996; LITTLEJOHN et WINSTON 1995). Cette formulation ainsi que son utilisation pour la détermination de la cohérence spatiale du rayonnement dans un milieu diffusant sont détaillées dans le chapitre II (PIERRAT *et al.* 2005). De plus, une formulation plus explicite est présentée dans la section A.3.5.

Notons tout de suite que la luminance ainsi définie n'a pas la bonne dimension. Pour cette raison, nous la notons \mathcal{L} et non L . La section A.3.5 présente une méthode pour obtenir le bon préfacteur à appliquer pour retrouver l'unité de la luminance utilisée en radiométrie classique.

En utilisant le fait que :

$$\int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \delta(x_0^2 - \mathbf{x}^2) = \frac{x_0}{2} \int d\mathbf{u} f(\mathbf{x} = x_0 \mathbf{u}) \quad (\text{A.181})$$

où la sommation se fait sur la sphère unité, on déduit que :

$$\left\{ -\frac{i\omega_0\omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega_0)} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0) - k_{\text{ref}}^2(\omega_0)] \right\} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \omega) = \underbrace{\pi \mathcal{S}_{j_\omega}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, \omega)}_{\text{terme source}} + \frac{\pi k_r}{2 \times 8\pi^3} \int d\mathbf{u}' \widetilde{K}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{q}, \mathbf{u}', \omega). \quad (\text{A.182})$$

La luminance appelée « source » correspond simplement à une source de lumière placée dans le milieu. Dans le cas du rayonnement thermique, les courants extérieurs deviennent fluctuants et non déterministes, on peut alors montrer que l'expression de la luminance source correspond à une loi de PLANCK en utilisant le théorème de fluctuation-dissipation (APRESYAN et KRAVTSOV 1996). En repassant dans l'espace réel par transformée de FOURIER inverse, nous obtenons la forme commune de l'ETR en régime instationnaire :

$$\left[\underbrace{\frac{\omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega) k_r}}_A \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right] \mathcal{L}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = - \underbrace{\frac{\mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega) - k_{\text{ref}}^2(\omega)]}{k_r}}_{\mu_{e\omega}} \mathcal{L}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \frac{\mu_{s\omega}}{4\pi} \int p_{\omega}(\mathbf{u}', \mathbf{u}) \mathcal{L}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{u}', t) d\Omega' + \frac{\pi}{k_r} \mathcal{S}_{j_\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{u})$$

avec $p_{\omega}(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{1}{4\pi\mu_{s\omega}} \widetilde{K}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega)$

$$. \quad (\text{A.183})$$

¹¹Le facteur $16\pi^3/k_r$ n'est là que dans le but de retrouver le bon facteur dans la formule de WALTHER décrite en sous-section A.3.5 (WALTHER 1968).

Remarque : Notons qu'il est possible d'obtenir une ETR vectorielle en ne faisant pas l'approximation scalaire dans l'équation de BETHE-SALPETER. Cela permet ainsi de prendre en compte les effets de polarisation. Il est alors nécessaire d'introduire le vecteur de STOKES qui joue le rôle de luminance vectorielle.

Préfacteur \mathcal{A} du terme instationnaire

On remarque que le préfacteur du terme instationnaire \mathcal{A} n'est pas donné par $1/c_{\text{eff}}$ comme on aurait pu s'y attendre. Cependant, si on suppose l'atténuation faible (ce qui est vrai dans un milieu diffusant), on a $k''_{\text{eff}} \ll k'_{\text{eff}}$ avec $k_{\text{eff}} = k'_{\text{eff}} + ik''_{\text{eff}}$, soit :

$$\mathcal{A} = \frac{\omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega) k_r} = \frac{\omega}{c_{\text{ref}}^2(\omega) \sqrt{k'_{\text{eff}}{}^2(\omega) - k''_{\text{eff}}{}^2(\omega)}} \sim \frac{c_{\text{eff}}(\omega)}{c_{\text{ref}}^2(\omega)}. \quad (\text{A.184})$$

En faisant un développement limité plus précis de k_r , on peut faire apparaître un terme prenant en compte les résonances dans les particules diffusantes.

Coefficients de diffusion et d'extinction

La fonction de phase étant normalisée à 1, on peut facilement en déduire le coefficient de diffusion par :

$$\mu_{s\omega} = \frac{1}{16\pi^2} \int \widetilde{K}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega) d\Omega. \quad (\text{A.185})$$

Dans le cas où le milieu hôte (c'est-à-dire celui de référence ici) n'est pas absorbant, le coefficient d'extinction est donné par $\mu_{e\omega} = \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega)]/k_r$. En décomposant k_{eff} une nouvelle fois sous la forme $k_{\text{eff}} = k'_{\text{eff}} + ik''_{\text{eff}}$, on a :

$$\mu_{e\omega} = \frac{\mathcal{I}(k_{\text{eff}}^2(\omega))}{\sqrt{\mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega)]}} = \frac{2k'_{\text{eff}}(\omega) k''_{\text{eff}}(\omega)}{\sqrt{k'_{\text{eff}}{}^2(\omega) - k''_{\text{eff}}{}^2(\omega)}}. \quad (\text{A.186})$$

Si on suppose l'atténuation faible (ce qui est vrai dans un milieu diffusant), on a $k''_{\text{eff}} \ll k'_{\text{eff}}$, soit :

$$\mu_{e\omega} \sim 2k''_{\text{eff}}(\omega) = 4\pi \frac{\omega}{c_0} \mathcal{I}[n_{\text{eff}}(\omega)]. \quad (\text{A.187})$$

On retrouve ainsi l'expression du coefficient d'extinction déduite de l'équation de DYSON (équation A.65).

À ce stade, revenons sur la deuxième approximation que nous avons faite pour parvenir à l'ETR. La distribution de DIRAC a fixé le vecteur \mathbf{k} à $\mathcal{R}[k_{\text{eff}}(\omega)]$. Or, nous avons fait l'approximation $\mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega)] \ll \mathbf{k}^2$, ce qui devient avec l'hypothèse de faible atténuation :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[k_{\text{eff}}^2(\omega)] \ll \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega)] &\Rightarrow 2k_{\text{eff}}(\omega)' k''_{\text{eff}}(\omega) \ll k'_{\text{eff}}{}^2(\omega) - k''_{\text{eff}}{}^2(\omega) \\ 2k'_{\text{eff}}(\omega) k''_{\text{eff}}(\omega) \ll k'_{\text{eff}}(\omega) &\Rightarrow 2k''_{\text{eff}}(\omega) \ll k'_{\text{eff}}(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.188})$$

ce qui s'écrit finalement $\lambda_{\text{eff}} \ll \pi l_e$ où l_e est la longueur d'extinction, c'est-à-dire l'inverse du coefficient d'extinction $\mu_{e\omega}$.

Ainsi, il ne faut pas perdre de vue que l'ETR a été obtenue en faisant trois approximations importantes :

- D'une part en considérant les grandes échelles de temps par rapport à la période de l'onde.
- Mais aussi en considérant les grandes échelles d'espace par rapport à la longueur d'onde effective.
- et d'autre part en considérant que la longueur d'extinction est grande devant la longueur d'onde effective.

A.3.4 Calcul approché de la fonction de phase

Si nous avons obtenu une méthode approchée de calcul du coefficient d'extinction dans la première section, il nous reste à faire de même pour la fonction de phase. Plaçons-nous dans le cas de la diffusion indépendante (milieu très dilué) et dans le cas de particules sphériques. Pour calculer la fonction de phase, nous allons tout d'abord calculer l'expression de l'opérateur diffusion pour une seule particule t . Considérons un champ incident sur la particule de vecteur d'onde \mathbf{k}_r selon la direction \mathbf{u} sous la forme :

$$\mathbf{E}_{\text{inc}} = \mathbf{E}_0 \exp [ik_r r]. \quad (\text{A.189})$$

Alors le champ diffusé est donné par :

$$\mathbf{E}_{\text{sca}} = \mathcal{G}_{\text{ref}} t \mathbf{E}_{\text{inc}} \quad (\text{A.190})$$

ce qui s'écrit sous forme développée :

$$\mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) = \iint \overleftrightarrow{\mathbf{G}}_{\text{ref}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{r}'', \omega) d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{r}''. \quad (\text{A.191})$$

Or, d'après BOHREN et HUFFMAN (BOHREN et HUFFMAN 1983) ou encore VAN DE HULST (VAN DE HULST 1981), le champ diffusé en champ lointain se met sous la forme :

$$\mathbf{E}_{\text{sca}} = \frac{\exp [ik_r r]}{-ik_r r} S_{k_r}(\theta) \mathbf{E}_0 \quad (\text{A.192})$$

avec θ angle de diffusion et S_{k_r} matrice diffusion. La matrice diffusion relie les amplitudes des composantes \parallel et \perp du champ incident et du champ diffusé. On notera que la particule est placée en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. En champ lointain, en prenant le développement asymptotique du tenseur de GREEN, l'équation A.191 devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sca}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{\exp [ik_r r]}{4\pi r} \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \int \exp [-ik_r \mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}'] d^3\mathbf{r}' \int \overleftrightarrow{\mathbf{t}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) \\ &\quad \times \exp [ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}''] \mathbf{E}_0(\omega) d^3\mathbf{r}'' \\ &= \frac{\exp [ik_r r]}{4\pi r} \overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{t}}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, \omega) \mathbf{E}_0(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.193})$$

où \mathbf{u} est la direction incidente de l'onde, \mathbf{u}' la direction de diffusion et où on rappelle que $\overleftrightarrow{\mathbf{P}}$ est l'opérateur de projection transverse. θ est donc l'angle entre \mathbf{u} et \mathbf{u}' . Les deux équations précédentes permettent de déduire :

$$\boxed{\overleftrightarrow{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \omega) \overleftrightarrow{\mathbf{t}}(k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, \omega) = \frac{4i\pi}{k_r} S_{k_r}}. \quad (\text{A.194})$$

Passons maintenant à l'opérateur intensité K . Utilisons pour cela l'approximation de l'échelle, c'est-à-dire :

$$\mathcal{K} \sim \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \end{array} \Rightarrow \mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \langle tt^* \rangle. \quad (\text{A.195})$$

Ainsi, l'opérateur intensité sous forme développée et sous l'hypothèse d'invariance par translation du problème est donné par :

$$K(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega) = \frac{n}{V} \int t(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{r}, \omega) t^*(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{r}, \omega) d^3\mathbf{r} \quad (\text{A.196})$$

où on a utilisé le fait qu'on s'intéresse qu'à une seule particule et qu'ainsi la densité de probabilité est donnée par $P_1 = 1/V$. Si on considère plusieurs particules, les corrélations apparaissent et font ainsi intervenir les termes en $n^i/V^i = \rho^i$. Dans le cas de milieux très dilués, on peut donc bien utiliser l'approximation de l'échelle qui n'est autre que l'approximation de la diffusion indépendante écrite pour l'opérateur intensité. En définissant la transformée de FOURIER de l'opérateur de diffusion par :

$$t(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint t(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'] \frac{d^3\mathbf{k}d^3\mathbf{k}'}{4\pi^2}. \quad (\text{A.197})$$

On peut exprimer l'opérateur intensité sous la forme :

$$K(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega) = \frac{n}{V} \int \cdots \int t(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \omega) \exp[i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}) - i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot (\boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{r})] \\ \times t^*(\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) \exp[-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}) + i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot (\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{r})] \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\boldsymbol{\kappa}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\boldsymbol{\kappa}_2}{16\pi^4} d^3\mathbf{r}. \quad (\text{A.198})$$

L'intégration sur la variable \mathbf{r} fait alors apparaître la distribution de DIRAC issue de l'invariance par translation du problème physique (équation A.111).

$$\int \exp[i(-\mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\kappa}_2) \cdot \mathbf{r}] d^3\mathbf{r} = 8\pi^3 \delta(-\mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\kappa}_2). \quad (\text{A.199})$$

Ainsi, l'opérateur intensité s'écrit :

$$K(\mathbf{r}'_1, \boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}'_2, \boldsymbol{\rho}_2, \omega) = 8\pi^3 \rho \iiint t(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \omega) t^*(\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) \exp[\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - i\boldsymbol{\kappa}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_1] \\ \times \exp[-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}'_2 + i\boldsymbol{\kappa}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}_2] \delta(-\mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\kappa}_2) \frac{d^3\mathbf{k}_1 d^3\boldsymbol{\kappa}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\boldsymbol{\kappa}_2}{16\pi^4} \quad (\text{A.200})$$

où on rappelle que ρ est la concentration volumique de particules (ou densité). On peut alors identifier la transformée de FOURIER de l'opérateur intensité :

$$K(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) = 8\pi^3 \rho \delta(-\mathbf{k}_1 + \boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\kappa}_2) t(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \omega) t^*(\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) \quad (\text{A.201})$$

expression dans laquelle on peut identifier la fonction \widetilde{K} sous la forme :

$$\widetilde{K}(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) = \rho t(\mathbf{k}_1, \boldsymbol{\kappa}_1, \omega) t^*(\mathbf{k}_2, \boldsymbol{\kappa}_2, \omega) \quad (\text{A.202})$$

$$\Rightarrow \widetilde{K}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega) = \rho t(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega) t^*(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega). \quad (\text{A.203})$$

Ainsi, à partir de l'expression de l'opérateur de diffusion (équation A.194), on déduit celle de \widetilde{K} :

$$\widetilde{K}(k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', k_r \mathbf{u}, k_r \mathbf{u}', \omega) = \frac{16\pi^2 \rho}{k_r^2} |S_{k_r}|^2. \quad (\text{A.204})$$

Nous pouvons exprimer le module au carré de la matrice de diffusion à l'aide de la section efficace de diffusion σ_{sca} et de la section efficace différentielle de diffusion $\frac{d\sigma_{\text{sca}}}{d\Omega}$ par (BOHREN et HUFFMAN 1983) :

$$\frac{d\sigma_{\text{sca}}}{d\Omega} = \frac{|S_{k_r}|^2}{k_r^2} \quad \sigma_{\text{sca}} = \int \frac{|S_{k_r}|^2}{k_r^2} d\Omega \quad (\text{A.205})$$

ce qui permet d'écrire le coefficient de diffusion et la fonction de phase sous la forme (en utilisant les équations A.183 et A.185) :

$$\boxed{\mu_{s\omega} = \rho \sigma_{\text{sca}}(\omega) \quad p_\omega(\mathbf{u}', \mathbf{u}) = \frac{4\pi}{\sigma_{\text{sca}}(\omega)} \frac{d\sigma_{\text{sca}}}{d\Omega}(\omega)}. \quad (\text{A.206})$$

Ainsi, on peut approximer la fonction de phase en calculant la section efficace différentielle de diffusion. Pour ce faire, on peut par exemple utiliser la théorie de MIE. À noter que la fonction de phase ne dépend ici que de l'angle θ , c'est-à-dire du produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$.

A.3.5 Expression explicite de la luminance

Cas instationnaire

Pour déterminer une expression plus explicite de la luminance, repartons de l'expression qui la définit (équation A.179) :

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \frac{16\pi^3}{k_r} \delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{q}, \mathbf{k}, t). \quad (\text{A.207})$$

Par transformée de FOURIER inverse, nous obtenons :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \frac{16\pi^3}{k_r} \delta(\mathbf{k}^2 - \mathcal{R}[k_{\text{eff}}^2(\omega_0)]) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \quad (\text{A.208})$$

où on rappelle que :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t, \omega_0) = \int \underbrace{\left\langle E\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle}_{W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0)} \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3\mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.209})$$

Prenons alors la transformée de FOURIER de l'équation A.208 par rapport aux variables \mathbf{k} et ω :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \frac{16\pi^3}{k_r} \int \delta(k^2 - k_r^2) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + i\omega t] \frac{d^3\mathbf{k}}{8\pi^3} dt. \quad (\text{A.210})$$

Or $d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega$ ce qui permet de réécrire l'équation précédente sous la forme :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{4\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} \delta(k^2 - k_r^2) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}] k^2 dk}_{\text{On note } I \text{ cette intégrale}} \exp[i\omega t] \frac{d\Omega}{8\pi^3} dt. \quad (\text{A.211})$$

On doit tout d'abord calculer l'intégrale I . En utilisant le fait que :

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0) \left/ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right| \right. \quad \text{avec } f(x_0) = 0 \quad (\text{A.212})$$

et en posant $f(k) = k^2 - k_r^2$, on a :

$$\delta(k^2 - k_r^2) = \frac{\delta(k - k_r)}{2k} \quad (\text{A.213})$$

ce qui donne pour l'intégrale I :

$$I = \frac{16\pi^3}{k_r} \int_0^{\infty} \frac{\delta(k - k_r)}{2k} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}] k^2 dk. \quad (\text{A.214})$$

Comme $k_r > 0$, on peut étendre les bornes de l'intégrale pour ainsi éliminer la distribution de DIRAC :

$$I = \frac{16\pi^3}{k_r} \int_{-\infty}^{\infty} k \frac{\delta(k - k_r)}{2} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}] dk = 8\pi^3 \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, k_r \mathbf{u}) \exp[ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}] \quad (\text{A.215})$$

ce qui conduit finalement à :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{4\pi} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, k_r \mathbf{u}, t) \exp[ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + i\omega t] d\Omega dt. \quad (\text{A.216})$$

Il nous faut enfin inverser cette relation pour en déduire une forme explicite de la luminance. Nous avons la relation :

$$d\Omega = \frac{du_x du_y}{|u_z|} \quad (\text{A.217})$$

en considérant z comme axe privilégié et en décomposant \mathbf{u} sous la forme $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z = \mathbf{u}_{\perp} + u_z \mathbf{e}_z$. Posons θ l'angle entre l'axe z et le vecteur \mathbf{u} . Ainsi :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, k_r \mathbf{u}, t) \exp[ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + i\omega t] \frac{d^2 \mathbf{u}_{\perp}}{|u_z|} dt. \quad (\text{A.218})$$

Sur cette intégration, nous avons la condition $\|\mathbf{u}\| = 1$. Pour pouvoir faire apparaître une transformée de FOURIER, nous pouvons poser que $\mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, k_r \mathbf{u}, t) = 0$ si $\|\mathbf{u}\| \neq 1$. De cette manière, nous étendons les bornes de l'intégrale et obtenons ainsi :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp[ik_r u_z s_z]}{|u_z|} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \exp[ik_r \mathbf{u}_{\perp} \cdot \mathbf{s}_{\perp}] d^2 \mathbf{u}_{\perp} \times \exp[i\omega t] dt \quad (\text{A.219})$$

expression que nous inversons pour finalement écrire :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \frac{|u_z|}{4\pi^2} \exp[-ik_r u_z s_z] k_r^2 \times \int_{\mathbb{R}^3} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) \exp[-ik_r \mathbf{u}_{\perp} \cdot \mathbf{s}_{\perp} - i\omega t] d^2 \mathbf{s}_{\perp} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.220})$$

Nous obtenons finalement l'expression de la luminance dans le cas instationnaire :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = |\cos \theta| \left(\frac{k_r}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^3} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) \exp[-ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^2 \mathbf{s}_{\perp} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{A.221})$$

Il est important de noter que la luminance ainsi définie n'a pas la dimension de la luminance utilisée en radiométrie classique exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$. Cependant, ces deux luminances sont égales à un facteur multiplicatif près. Il est utile de rappeler que toute grandeur proportionnelle à la luminance classique vérifie l'ETR.

Cas stationnaire : la formule de Walther retrouvée

Pour déterminer l'expression équivalente dans le cas stationnaire, écrivons la définition de la densité spectrale de puissance croisée :

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega_1, \omega_2) = \iint \underbrace{\langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}_{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2)} \exp[i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2] dt_1 dt_2. \quad (\text{A.222})$$

Faisons alors un changement de variables pour revenir aux notations utilisées dans le cas instationnaire :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{s}/2 \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{s}/2 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = t + \tau/2 \\ t_2 = t - \tau/2 \end{cases}. \quad (\text{A.223})$$

On a alors :

$$\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2 = \omega_1 \left(t + \frac{\tau}{2} \right) - \omega_2 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) = (\omega_1 - \omega_2) t + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \quad (\text{A.224})$$

avec $\omega = \omega_1 - \omega_2$ et $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, fréquence centrale. Le champ est supposé quasi-monochromatique de sorte que $\omega \ll \omega_0$. La pulsation ω représente les variations temporelles de la luminance tandis que la pulsation ω_0 représente les variations ondulatoires de l'onde. Dans le cas stationnaire, la fonction de corrélation spatio-temporelle Γ ne dépend que de τ , ce qui conduit à :

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) = 2\pi \delta(\omega) \underbrace{\int \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \tau) \exp[i\omega_0 \tau] d\tau}_{W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0)}. \quad (\text{A.225})$$

Ainsi, l'équation A.221 donne l'expression de la luminance dans le cas stationnaire, appelée formule de WALTHER (WALTHER 1968) :

$$\mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = |\cos \theta| \left(\frac{k_r}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^2} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0) \exp[-ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}] d^2 \mathbf{s}_{\perp}. \quad (\text{A.226})$$

Il est important de noter que la luminance ainsi définie n'a pas la dimension de la luminance utilisée en radiométrie classique exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1}$. Cependant, ces deux luminances sont égales à un facteur multiplicatif près. Il est utile de rappeler que toute grandeur proportionnelle à la luminance classique vérifie l'ETR.

Dimensionnement correct de la luminance

Le dimensionnement correct de la luminance définie précédemment passe par la recherche d'une constante multiplicative. Cette constante est identique dans le cas stationnaire et instationnaire. Pour cette raison, nous allons travailler en régime instationnaire, plus simple d'approche. Nous notons \mathcal{B} cette constante. Il s'agit alors d'égaliser l'expression du flux écrit d'une part en utilisant le vecteur de POYNTING et d'autre part à partir de la luminance.

Le vecteur flux radiatif en régime instationnaire s'écrit à partir de la luminance :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{4\pi} L_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} d\Omega \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.227})$$

On peut ajouter une intégration sur le module du vecteur d'onde en ajoutant une distribution de DIRAC :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\mathcal{B}}{k_r} \int \underbrace{\delta(k - k_r)}_{2k\delta(k^2 - k_r^2)} \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} k^2 dk d\Omega \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.228})$$

Or, d'après l'équation A.179 et le travail fait en régime instationnaire précédemment, on a :

$$\int W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3 \mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{16\pi^3}{k_r} \delta(k^2 - k_r^2) \mathcal{L}_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t). \quad (\text{A.229})$$

Donc :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = \mathcal{B} \int W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^3 \mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{k} \frac{d^3 \mathbf{k}}{8\pi^3} \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.230})$$

On peut alors expliciter l'intégrale sur \mathbf{k} :

$$\int \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{s}] \mathbf{k} \frac{d^3 \mathbf{k}}{8\pi^3} = i \nabla_{\mathbf{s}} \delta(\mathbf{s}). \quad (\text{A.231})$$

Le vecteur flux radiatif s'écrit alors :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = i\mathcal{B} \int W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) \exp[-i\omega t] \nabla_{\mathbf{s}} \delta(\mathbf{s}) d^3 \mathbf{s} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.232})$$

Effectuons alors une intégration par parties pour faire apparaître une distribution de DIRAC sans dérivée et la dérivée de la densité spectrale de puissance :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = i\mathcal{B} \int \nabla_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.233})$$

Il faut alors calculer le terme de dérivation de la fonction de corrélation spatiale :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega, \omega_0) = & \left\langle \nabla_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} E\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) E^*\left(\mathbf{r}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right. \\ & \left. + E\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \nabla_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} E^*\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.234})$$

En faisant un changement de variables $\mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}$ et $\omega \rightarrow -\omega$, nous pouvons regrouper les deux termes précédents, ce qui donne :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = -2i\mathcal{B} \int \left\langle E\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \nabla_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} E^*\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.235})$$

Or, on a la relation :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x + ay) \Big|_{y \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial y} [f(x) + f'(x) ay] \Big|_{y \rightarrow 0} = af'(x). \quad (\text{A.236})$$

Donc, le vecteur flux radiatif en terme de luminance s'écrit finalement :

$$\boxed{\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = -i\mathcal{B} \int \left\langle E\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \nabla_{\mathbf{r}} E^*\left(\mathbf{r}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}}. \quad (\text{A.237})$$

Le vecteur de POYNTING moyenné s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \rangle}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\langle \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega_1) \exp[-i\omega_1 t] \frac{d\omega_1}{2\pi} \times \int \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega_2) \exp[-i\omega_2 t] \frac{d\omega_2}{2\pi} \right\rangle. \end{aligned}$$

Le champ magnétique étant réel, nous pouvons prendre son complexe conjugué :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega_2) \exp[-i\omega_2 t] \frac{d\omega_2}{2\pi} = \int \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, \omega_2) \exp[i\omega_2 t] \frac{d\omega_2}{2\pi}. \quad (\text{A.238})$$

En posant de plus $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ et $\omega = \omega_1 - \omega_2$, le vecteur de POYNTING moyenné devient :

$$\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\mu_0} \int \left\langle \mathbf{E}\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \times \mathbf{B}^*\left(\mathbf{r}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}. \quad (\text{A.239})$$

De plus, les équations de MAXWELL permettent d'écrire que $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$. Comme $\omega \ll \omega_0$ (champ quasi-monochromatique), nous avons :

$$\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{-i}{\omega_0 \mu_0} \int \left\langle \mathbf{E}\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \times \left[\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}^*\left(\mathbf{r}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right] \right\rangle \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}.$$

(A.240)

En approximation scalaire, cela s'écrit (à une constante numérique près) :

$$\langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{-i}{\omega_0 \mu_0} \int \left\langle E\left(\mathbf{r}, \omega_0 + \frac{\omega}{2}\right) \nabla_{\mathbf{r}} E^*\left(\mathbf{r}, \omega_0 - \frac{\omega}{2}\right) \right\rangle \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega_0}{2\pi}.$$

(A.241)

Il suffit maintenant d'identifier le vecteur flux radiatif avec le vecteur de POYNTING moyenné et on obtient la constante \mathcal{B} :

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = \frac{1}{\omega_0 \mu_0}.$$

(A.242)

Ainsi, la luminance en régime instationnaire est donnée par :

$$L_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \frac{|\cos \theta| k_r^3}{4\pi^2 \omega_0 \mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0, \omega) \exp[-ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} - i\omega t] d^2 \mathbf{s}_{\perp} \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{en } \text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1},$$

(A.243)

et la luminance en régime stationnaire est donnée par :

$$L_{\omega_0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{|\cos \theta| k_r^3}{4\pi^2 \omega_0 \mu_0} \int_{\mathbb{R}^2} W(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega_0) \exp[-ik_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}] d^2 \mathbf{s}_{\perp} \quad \text{en } \text{W.m}^{-2}.\text{Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}.$$

(A.244)

Annexe B

Fonctions de GREEN en espace libre des équations d'onde et de la diffusion

L'objectif de cette annexe est de présenter la méthode de calcul des fonctions de GREEN en espace libre de l'équation de propagation du champ sous forme vectorielle et de l'équation de diffusion en milieu non absorbant.

On rappelle que la fonction de GREEN d'une équation correspond à la solution de cette équation pour un terme source pris sous forme d'une distribution de DIRAC (de variable spatiale et/ou temporelle). Dans le cas le plus général, on souhaite résoudre une équation linéaire de solution $f(x)$ formée d'un opérateur linéaire $\mathcal{L}(x)$ et d'un terme source $\mathcal{S}(x)$:

$$\mathcal{L}(x) f(x) = \mathcal{S}(x). \quad (\text{B.1})$$

La fonction de GREEN $G(x, x')$ de ce problème vérifie l'équation :

$$\mathcal{L}(x) G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (\text{B.2})$$

Le terme source $\mathcal{S}(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{S}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') \mathcal{S}(x') dx'. \quad (\text{B.3})$$

En multipliant l'équation B.2 par $\mathcal{S}(x')$ et en intégrant sur x' , on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x) G(x, x') \mathcal{S}(x') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') \mathcal{S}(x') dx' = \mathcal{S}(x). \quad (\text{B.4})$$

En identifiant les équations B.1 et B.4, on obtient l'expression de $f(x)$ en fonction du terme source et de la fonction de GREEN :

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x') \mathcal{S}(x') dx'}. \quad (\text{B.5})$$

B.1 Équation d'ondes vectorielle en espace libre

On recherche la fonction de GREEN retardée de l'équation d'HELMHOLTZ vectorielle du champ (TAI 1993) :

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - \frac{\omega^2}{c_0^2} \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} \quad (\text{B.6})$$

où ω est la pulsation de l'onde, c_0 la célérité et $\vec{\mathbf{I}}$ le tenseur identité. Dans l'optique de simplifier les notations, on suppose dans la suite que $\mathbf{r}' = \mathbf{0}^1$. On définit la transformée de FOURIER spatiale de $\vec{\mathbf{G}}_0$ par :

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{k}, \omega) = \int \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] d^3\mathbf{r}, \\ \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega) = \int \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{k}, \omega) \exp[+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \frac{d^3\mathbf{k}}{8\pi^3}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Ainsi, en injectant la transformé de FOURIER de $\vec{\mathbf{G}}_0$ dans l'équation B.6, on obtient :

$$\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\vec{\mathbf{I}}}{k^2 \vec{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) - k_0^2 \vec{\mathbf{I}}} \quad (\text{B.8})$$

en ayant posé $k_0 = \omega/c$. $\vec{\mathbf{P}}$ est appelé opérateur transverse, il est défini par :

$$\vec{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \omega) = \vec{\mathbf{I}} - \frac{\vec{\mathbf{k}} \otimes \vec{\mathbf{k}}}{k^2}. \quad (\text{B.9})$$

La transformée de FOURIER inverse donne alors l'expression du tenseur de GREEN dans l'espace direct :

$$\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \omega) = \left[\vec{\mathbf{I}} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}}}{k_0^2} \right] \frac{\exp[ik_0 \|\mathbf{r}\|]}{4\pi \|\mathbf{r}\|}. \quad (\text{B.10})$$

Ainsi, dans le cas général, on obtient la fonction de GREEN retardée :

$$\boxed{\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \left[\vec{\mathbf{I}} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}}}{k_0^2} \right] \frac{\exp[ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|]}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}}. \quad (\text{B.11})$$

B.2 Équation d'onde scalaire en espace libre

Dans le cas scalaire, l'équation d'onde devient :

$$\Delta_{\mathbf{r}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{B.12})$$

La fonction de GREEN dans l'espace de FOURIER est alors donnée par :

$$G_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k_0^2 - k^2}. \quad (\text{B.13})$$

Un calcul identique à celui mené pour l'équation de la diffusion dans la section suivante permet d'obtenir dans l'espace direct la fonction de GREEN retardée :

$$\boxed{G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) = \frac{\exp[ik_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|]}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}}. \quad (\text{B.14})$$

¹Il y a invariance par translation du problème puisque le milieu est homogène, i.e. $\vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \vec{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega)$.

B.3 Équation de la diffusion sans absorption en espace libre

On recherche la fonction de GREEN de l'équation de la diffusion sans absorption (SMIRNOV 1981) :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') - \mathcal{D}\Delta_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (\text{B.15})$$

où \mathcal{D} est le coefficient de diffusion. Dans l'optique de simplifier les notations, on suppose dans la suite que $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ et $t' = 0^2$. On définit alors la transformée de FOURIER spatio-temporelle de G par :

$$\begin{cases} G(\mathbf{k}, \omega) = \int G(\mathbf{r}, t) \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t] d^3\mathbf{r} dt, \\ G(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{k}, \omega) \exp[+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{8\pi^3 2\pi}. \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

Ainsi, en injectant la transformé de FOURIER de G dans l'équation B.15, on obtient :

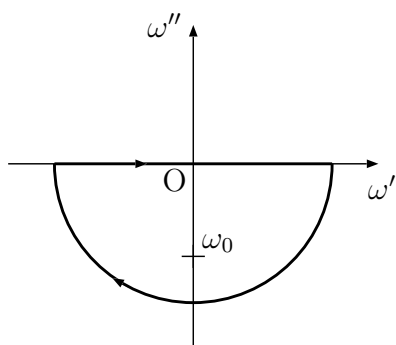
$$(-i\omega + \mathcal{D}k^2) G(\mathbf{k}, \omega) = 1. \quad (\text{B.17})$$

Les variables \mathbf{k} et ω étant réelles, $-i\omega + \mathcal{D}k^2 \neq 0$. On obtient donc directement l'expression de la transformée de FOURIER de la fonction de GREEN :

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\mathcal{D}k^2 - i\omega}. \quad (\text{B.18})$$

Ainsi, la fonction de GREEN dans l'espace direct est donnée par :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\exp[+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t] d^3\mathbf{k} d\omega}{\mathcal{D}k^2 - i\omega} \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{8\pi^3 2\pi}. \quad (\text{B.19})$$



Appliquons la méthode des résidus au calcul de l'intégrale sur ω . On a un pôle $\omega_0 = -i\mathcal{D}k^2$. Le contour retenu est représenté ci-contre. On fait tendre le rayon de l'arc de cercle vers l'infini. Sur l'arc, la fonction à intégrer est nulle, l'intégrale sur le contour est donc égale à l'intégrale sur l'axe des réels :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-i\omega t] d\omega}{\mathcal{D}k^2 - i\omega} \frac{1}{2\pi} = -2i\pi \text{Res}(\omega_0) = \exp[-i\omega_0 t]. \quad (\text{B.20})$$

La fonction de GREEN devient :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int \exp[-\mathcal{D}k^2 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}] \frac{d^3\mathbf{k}}{8\pi^3}. \quad (\text{B.21})$$

²Il y a invariance par translation spatiale et temporelle du problème puisque le milieu est homogène et stationnaire, i.e. $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$.

Sans réduire la généralité, on pose $\mathbf{r} = (0, 0, z)$. À partir des angles θ et φ définis à partir des coordonnées sphériques usuelles, on a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kz\mu$ avec $\mu = \cos\theta$. L'élément différentiel s'écrit $d^3\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = k^2 dk d\mu d\varphi$. Après intégration sur φ , il reste :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{k=0}^{+\infty} \int_{\mu=-1}^{+1} \exp[-\mathcal{D}k^2 t + ikz\mu] \frac{k^2 dk d\mu}{4\pi^2}. \quad (\text{B.22})$$

L'intégration sur μ conduit à :

$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4i\pi^2 z} \exp[-\mathcal{D}k^2 t] \{ \exp[ikz] - \exp[-ikz] \} dk. \quad (\text{B.23})$$

Par changement de variables $k' = -k$ sur la partie $\exp[-ikz]$, on peut regrouper les termes en élargissant les bornes de l'intégrale :

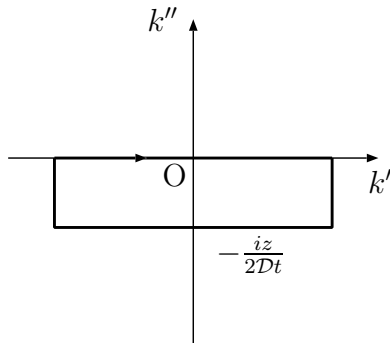
$$G(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{4i\pi^2 z} \exp[-\mathcal{D}k^2 t + ikz] dk. \quad (\text{B.24})$$

Or $-\mathcal{D}k^2 t + ikz = -\mathcal{D}t [k - iz/(2\mathcal{D}t)]^2 - z^2/(4\mathcal{D}t)$, ce qui donne :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4i\pi^2 z} \exp\left[-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} k \exp\left[-\mathcal{D}t \left(k - \frac{iz}{2\mathcal{D}t}\right)^2\right] dk \quad (\text{B.25})$$

et $k = k - iz/(2\mathcal{D}t) + iz/(2\mathcal{D}t)$, soit :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4i\pi^2 z} \exp\left[-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \left(k - \frac{iz}{2\mathcal{D}t}\right) \exp\left[-\mathcal{D}t \left(k - \frac{iz}{2\mathcal{D}t}\right)^2\right] dk \\ + \frac{1}{4i\pi^2 z} \exp\left[-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iz}{2\mathcal{D}t} \exp\left[-\mathcal{D}t \left(k - \frac{iz}{2\mathcal{D}t}\right)^2\right] dk. \quad (\text{B.26})$$



On effectue le changement de variables $k_1 = k - iz/(2\mathcal{D}t)$. La première intégrale se calcule directement par recherche de la primitive est donne 0. Il reste :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^2 \mathcal{D}t} \exp\left[-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right] \int_{-\infty - iz/(2\mathcal{D}t)}^{+\infty - iz/(2\mathcal{D}t)} \exp[-\mathcal{D}t k_1^2] dk_1. \quad (\text{B.27})$$

Une seconde application de la méthode des résidus sur le rectangle de la figure ci-contre permet de conclure que :

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^2 \mathcal{D}t} \exp\left[-\frac{z^2}{4\mathcal{D}t}\right] \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\mathcal{D}t k_1^2] dk_1}_{=\sqrt{\pi/(\mathcal{D}t)}}. \quad (\text{B.28})$$

Finalement, on obtient :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{\text{H}(t - t')}{\sqrt{(4\pi\mathcal{D}(t - t'))^3}} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2}{4\mathcal{D}(t - t')}\right]. \quad (\text{B.29})$$

Annexe C

Résolution de l'ETR par la méthode des ordonnées discrètes

Il existe de nombreuses méthodes de résolution de l'ETR. Nous nous attarderons ici sur celle que nous avons retenue dans le cas d'un problème plan tel que présenté à la section I.4. Nous rappelons qu'il s'agit de résoudre l'ETR dans le cas d'une tranche de milieu diffusant (dénommée dans ce qui suit milieu **2**) infinie selon les axes x et y , de largeur L selon l'axe z entourée par deux milieux non diffusants (dénommés milieux **1** et **3**) identiques. Le milieu **2** est éclairé par une onde plane monochromatique sous incidence normale se propageant selon les $z > 0$ (voir Fig. I.7). Dans un premier temps, nous nous attachons à la résolution de l'ETR en régime stationnaire avant d'évoquer le cas du régime instationnaire.

C.1 Résolution de l'etr en régime stationnaire

C.1.1 Adimensionnement

Dans le but de travailler avec des valeurs numériques de l'ordre de grandeur de l'unité et éviter ainsi les problèmes de convergence, nous adimensionnons les grandeurs spatiales par le coefficient d'extinction :

$$\tau = \mu_e z \quad \Rightarrow \quad L^* = \mu_e L. \quad (\text{C.1})$$

Le système à résoudre déduit des équations I.30 et I.31 est donc le suivant :

$$\pm \frac{\partial L_c^\pm(\tau)}{\partial \tau} = -L_c^\pm(\tau) \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial L_d(\tau, \mu)}{\partial \tau} = & -L_d(\tau, \mu) + \frac{a}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') L_d(\tau, \mu') d\mu' \\ & + \frac{a}{2} p(\mu, 1) L_c^+(\tau) + \frac{a}{2} p(\mu, -1) L_c^-(\tau) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

où on rappelle que a représente l'albédo et p la fonction de phase.

C.1.2 Luminance collimatée

L'équation C.2 régissant l'expression de la luminance collimatée se rédoit analytiquement. En utilisant les conditions aux limites définies par les coefficients de FRESNEL, nous obtenons :

$$L_c^+(\tau) = L_{\text{inc}} \frac{T_{12}(0) \exp[-\tau]}{1 - R_{21}(0) R_{23}(0) \exp[-2L^*]}, \quad (\text{C.4})$$

$$L_c^-(\tau) = L_{\text{inc}} \frac{T_{12}(0) R_{23}(0) \exp(\tau - 2L^*)}{1 - R_{21}(0) R_{23}(0) \exp[-2L^*]}, \quad (\text{C.5})$$

ce qui permet de définir explicitement le terme source de la luminance diffuse par :

$$S(\tau, \mu) = \frac{a}{2} p(\mu, 1) L_c^+(\tau) + \frac{a}{2} p(\mu, -1) L_c^-(\tau). \quad (\text{C.6})$$

C.1.3 Luminance diffuse

Pour résoudre l'équation C.3, nous devons tout d'abord effectuer une discrétisation angulaire afin de discrétiser l'intégrale de diffusion constructive.

Discrétisation angulaire

De manière générale, on a la relation :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^N w_i f_i \text{ avec } w_i \text{ poids et } f_i = f(x_i) \text{ où } x_i \text{ est l'abscisse.} \quad (\text{C.7})$$

De multiples méthodes existent, on peut citer les quadratures de GAUSS, CHEBYSHEV, RADAU, NICOLAU. Cependant des études ont montré que la quadrature la plus adaptée et la plus précise est la quadrature de GAUSS (KUMAR *et al.* 1990). Elle est basée sur le fait que le calcul de l'intégrale doit être exact pour tout polynôme. Comme nous avons $2n$ constantes à déterminer (les abscisses x_i et les poids w_i), le degré maximal d'un polynôme pour lequel le calcul de la quadrature est exact est donné par $N = 2n - 1$. Pour déterminer les coefficients à appliquer, on utilise les racines du polynôme de LEGENDRE d'ordre n $P_n(x)$ (DÉMIDOVITCH et MARON 1979) :

$$P_n(x_i) = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$a_i = \left[\frac{dP_n(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \right]^{-1} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)}{x - x_i} dx. \quad (\text{C.9})$$

Dans notre cas, une bonne quadrature doit au moins vérifier les relations suivantes :

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \rightarrow \sum_{i=1}^{2N} w_i = 2 \quad ; \quad \int_{-1}^{+1} \mu d\mu \rightarrow \sum_{i=1}^{2N} w_i \mu_i = 0 \quad ; \quad \int_0^{+1} \mu d\mu \rightarrow \sum_{i=N+1}^{2N} w_i \mu_i = \frac{1}{2}. \quad (\text{C.10})$$

Remarque : Dans le cas du calcul de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad (\text{C.11})$$

où les bornes sont $\{a, b\}$ différentes de $\{-1, 1\}$, nous devons appliquer un changement de variables

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x' \quad (\text{C.12})$$

qui conduit tout naturellement au résultat suivant sur les poids et abscisses de GAUSS :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N w'_i f'_i \text{ avec } \begin{cases} w'_i = [(b-a)/2] w_i \\ f'_i = f_i \end{cases} . \quad (\text{C.13})$$

Prise en compte des lois de Snell-Descartes dans la discrétisation angulaire

La quadrature de GAUSS nous permet facilement de discrétiser angulairement le milieu diffusant mais un problème se pose aux interfaces. En effet, lorsque les indices des milieux sont différents (i.e. $n_2 > n_1$), les directions de propagation ne sont pas les-mêmes. Nous choisissons de discrétiser le milieu **1** ainsi que le milieu **3** en $2N_1$ directions et le milieu **2** en $2N_2$ directions (voir Fig. C.1).

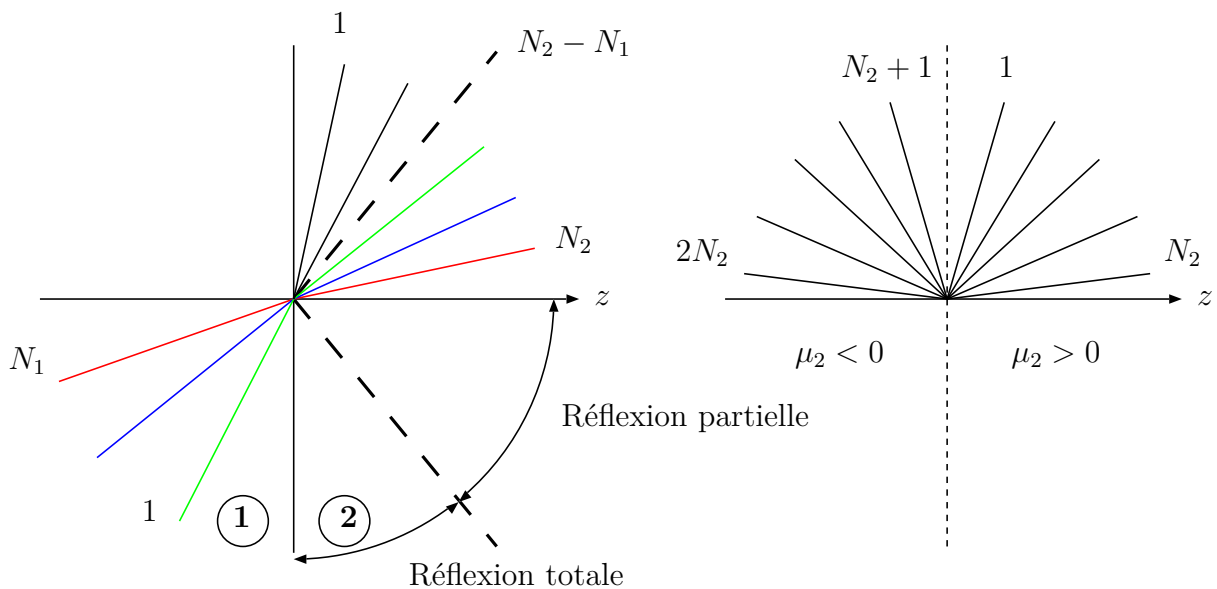


Fig. C.1 – Discretisation angulaire des milieux **1** (idem milieu **3**) et **2** dans le cas de la réflexion non nulle à l'interface.

1. Dans un premier temps, nous déterminons par quadrature de GAUSS, les $2N_1$ directions et poids des milieux **1** et **3**. Ceux-ci sont respectivement définis par $\mu_{1,i}$ et $w_{1,i}$ pour $i \in \{1, \dots, 2N_1\}$. Pour une fonction f de bon comportement, nous avons donc

la relation

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu_1) d\mu_1 = \sum_{i=1}^{2N_1} w_{1,i} f(\mu_{1,i}). \quad (\text{C.14})$$

2. Ensuite, nous appliquons les lois de SNELL-DESCARTES pour déterminer les directions correspondantes dans le milieu **2**. Celles-ci se trouvent donc toutes dans le cône de réflexion partielle et sont données par :

$$\mu_{2,N_2-N_1+i} = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} (1 - \mu_{1,i}^2)} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N_1\} \quad (\text{C.15})$$

le cosinus de l'angle sécrivant $\mu_l = \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2}$. Pour déterminer les poids correspondants, nous calculons l'intégrale

$$I = \left[\int_{-1}^{-\mu_l} + \int_{\mu_l}^{+1} \right] f(\mu_2) d\mu_2 \quad (\text{C.16})$$

qui par changement de variables, donne

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{n_1^2/n_2^2 f(\mu_1)}{\sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 (1 - \mu_1^2)}} d\mu_1. \quad (\text{C.17})$$

Cela nous permet de définir les poids par :

$$w_{2,N_2-N_1+i} = \frac{n_1^2/n_2^2 w_{1,i}}{\sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 (1 - \mu_1^2)}} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N_1\}. \quad (\text{C.18})$$

3. Enfin, nous complétons la discrétisation du milieu **2** par quadrature de GAUSS. Pour cela, nous calculons l'intégrale

$$J = \int_{-\mu_l}^{+\mu_l} f(\mu_2) d\mu_2 = \mu_l \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{\mu'_2}{\mu_l}\right) d\mu'_2. \quad (\text{C.19})$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} \mu_{2,i} = \mu_l \mu'_{2,i} \\ w_{2,i} = \mu_l w'_{2,i} \end{cases} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, N_2 - N_1\}. \quad (\text{C.20})$$

4. Finalement, nous avons calculé l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu_2) d\mu_2 = I + J \quad (\text{C.21})$$

par quadrature de GAUSS en ayant pris soin de discrétiser angulairement le milieu **2** de manière à prendre en compte les lois de SNELL-DESCARTES. Notons enfin que nous avons les relations de symétries suivantes :

$$\mu_{n,i} = \mu_{n,N_n+i} \quad ; \quad w_{n,i} = w_{n,N_n+i} \quad \text{avec } n \in \{1, 2\}. \quad (\text{C.22})$$

Système linéaire

En utilisant la discrétisation angulaire présentée ci-dessus, l'équation C.3 devient un système linéaire d'ordre 1 composé de $2N_2$ équations à $2N_2$ inconnues :

$$\mu_{2,i} \frac{\partial L_d}{\partial \tau}(\tau, \mu_{2,i}) = -L_d(\tau, \mu_{2,i}) + \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{2N_2} w_{2,j} p(\mu_{2,i}, \mu_{2,j}) L_d(\tau, \mu_{2,j}) + S(\tau, \mu_{2,i}). \quad (\text{C.23})$$

Pour plus de clarté, dans la suite, nous choisissons de remplacer les cosinus des angles par leurs indices en prenant soin de séparer à l'aide d'un signe $-$ les cosinus négatifs de ceux positifs :

$$\begin{cases} \mu_{2,i} \rightarrow i & \text{pour } i \in \{1, N_2\} \\ \mu_{2,N_2+i} \rightarrow -i & \text{pour } i \in \{1, N_2\} \end{cases}. \quad (\text{C.24})$$

Grâce aux relations de symétrie (voir Éq. C.22), il est possible de simplifier le système en décomposant la somme :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2N_2} w_{2,j} p(\mu_{2,i}, \mu_{2,j}) L_d(\tau, \mu_{2,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, j) L_d(\tau, j) + \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, -j) L_d(\tau, -j) \quad \text{dans le cas } i, \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{2N_2} w_{2,j} p(\mu_{2,i}, \mu_{2,j}) L_d(\tau, \mu_{2,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(-i, j) L_d(\tau, j) + \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(-i, -j) L_d(\tau, -j) \quad \text{dans le cas } -i. \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

En utilisant également le fait que la fonction de phase ne dépend que de l'angle de diffusion, on a $p(i, j) = p(-i, -j)$ et $p(i, -j) = p(-i, j)$, et le système d'équations devient :

$$\begin{aligned} \mu_{2,i} \frac{\partial L_d(\tau, i)}{\partial \tau} &= -L_d(\tau, i) + \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, j) L_d(\tau, j) + \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, -j) L_d(\tau, -j) \\ &+ S(\tau, i) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} -\mu_{2,i} \frac{\partial L_d(\tau, -i)}{\partial \tau} &= -L_d(\tau, -i) + \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, j) L_d(\tau, -j) + \frac{a}{2} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, -j) L_d(\tau, j) \\ &+ S(\tau, -i) \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

ce qui peut s'écrire en rassemblant les termes en i et $-i$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_d(\tau, i)}{\partial \tau} &= + \frac{1}{\mu_{2,i}} \sum_{j=1}^{N_2} \left[\frac{a}{2} w_{2,j} p(i, j) - \delta_{ij} \right] L_d(\tau, j) + \frac{a}{2\mu_{2,i}} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, -j) L_d(\tau, -j) \\ &+ \frac{1}{\mu_{2,i}} S(\tau, i) \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_d(\tau, -i)}{\partial \tau} &= - \frac{1}{\mu_{2,i}} \sum_{j=1}^{N_2} \left[\frac{a}{2} w_{2,j} p(i, j) - \delta_{ij} \right] L_d(\tau, -j) - \frac{a}{2\mu_{2,i}} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2,j} p(i, -j) L_d(\tau, j) \\ &- \frac{1}{\mu_{2,i}} S(\tau, -i) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

où δ_{ij} est le symbole de KRONECKER. Nous définissons alors les matrices suivantes afin d'écrire le système sous forme plus compacte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^+(\tau) = \{L_d(\tau, i)\} \quad (N_2) \\ \mathbf{L}^-(\tau) = \{L_d(\tau, -i)\} \quad (N_2) \\ \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ = \left\{ \frac{1}{\mu_{2,i}} \left[\frac{a}{2} w_{2,j} p(i, j) - \delta_{ij} \right] \right\} \quad (N_2 \times N_2) \\ \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- = \left\{ \frac{a}{2\mu_{2,i}} w_{2,j} p(i, -j) \right\} \quad (N_2 \times N_2) \\ \mathbf{S}^+(\tau) = \frac{1}{\mu_{2,i}} S(\tau, i) \quad (N_2) \\ \mathbf{S}^-(\tau) = \frac{1}{\mu_{2,i}} S(\tau, -i) \quad (N_2) \end{array} \right. \quad (C.31)$$

Le système matriciel s'énonce alors :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^+ \\ \mathbf{L}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ & \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \\ -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- & -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^+ \\ \mathbf{L}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^+ \\ -\mathbf{S}^- \end{bmatrix}. \quad (C.32)$$

Il s'agit donc bien d'un système linéaire d'ordre 1 à coefficients complexes constants. Sa résolution passe par la recherche de la solution du problème homogène associé et de la solution particulière.

Solution du problème homogène associé

La forme du système C.32 suggère la recherche de solutions homogènes sous la forme :

$$\mathbf{L}_{\text{hom},i}(\tau) = \mathbf{G}_i \exp[k_i \tau]. \quad (C.33)$$

Lorsqu'on injecte cette forme dans le système, on obtient :

$$k_i \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^+ \\ \mathbf{G}_i^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ & \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \\ -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- & -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^+ \\ \mathbf{G}_i^- \end{bmatrix}. \quad (C.34)$$

Le système homogène se réduit donc à un problème aux valeurs propres k_i pour la matrice $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$, de vecteurs propres associés \mathbf{G}_i . La décomposition de la matrice $\overleftrightarrow{\mathbf{M}}$, permet de simplifier le problème d'un facteur 2 car si k_i est valeur propre, alors $-k_i$ l'est également. Pour le vérifier, calculons le polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} P(k_i) &= \det \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ - k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} & \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \\ -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- & -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ - k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \\ &= \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ - k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) \det \left(-\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- - k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) - \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \right) \det \left(-\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ \right) \\ &= (-1)^{N_2} \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ - k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ + k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) - \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \right) \det \left(-\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \right) \\ &= (-1)^{2N_2} \det \left(-\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ + k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ + k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \right) - \det \left(\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \right) \det \left(-\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ + k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} & \overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- \\ -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^- & -\overleftrightarrow{\mathbf{M}}^+ + k_i \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = P(-k_i) \end{aligned} \quad (C.35)$$

ce qui prouve la proposition ci-dessus. La solution générale est alors donnée par :

$$\mathbf{L}_{\text{hom}}(\tau) = \sum_{i=1}^{2N_2} C_i \mathbf{G}_i \exp[-k_i \tau] \quad (\text{C.36})$$

où les constantes C_i seront déterminées par les conditions aux limites. Cette décomposition de la luminance obtenue numériquement aura également son utilité théorique pour l'étude des modes propres de l'ETR. Comme nous le verrons dans les chapitres III et V, le spectre des valeurs propres de l'opérateur intégro-différentiel de l'ETR est composé de deux valeurs propres discrètes et opposées et d'un ensemble de valeurs propres contenues dans un continuum (CASE et ZWEIFEL 1967). Cela est vérifié numériquement. Notons également que dans le cas où l'absorption est nulle (albédo $a = 1$), la valeur $k_0 = 0$ est valeur propre. La luminance s'écrit alors :

$$L_{d\text{hom}}(\tau, \mu_{2,i}) = \sum_{j=1}^{2N_2-2} C_j G_{i,j} \exp[-k_j \tau] + K_1(\tau - \mu_{2,i}) + K_2 \quad (\text{C.37})$$

les facteurs K_1 et K_2 étant déterminés par les conditions aux limites. Cette expression pose un problème lors de la résolution numérique puisque la forme des solutions n'est plus la même. En pratique, on ajoute de l'absorption numérique, ce qui ne pose pas de problème particulier du moment que la longueur d'absorption l_a reste bien supérieure à la taille du système L .

Solution particulière

La forme du terme source nous suggère de rechercher la solution particulière sous la forme :

$$\mathbf{L}_{\text{par}}(\tau) = \mathbf{X} \exp[-\tau] + \mathbf{Y} \exp[\tau - 2L^*]. \quad (\text{C.38})$$

En effet, la luminance collimatée contenue dans le terme \mathbf{S} contient deux exponentielles décroissantes, l'une en $-\tau$ et l'autre en $\tau - 2L^*$. L'injection de cette forme dans le système C.32 aboutit à un système en \mathbf{X} et \mathbf{Y} qu'il est facile de résoudre.

Solution complète

Finalement, la solution complète est donnée par :

$$\mathbf{L}(\tau) = \mathbf{L}_{\text{hom}}(\tau) + \mathbf{L}_{\text{par}}(\tau) = \sum_{i=1}^{2N_2} C_i \mathbf{G}_i \exp[-k_i \tau] + \mathbf{X} \exp[-\tau] + \mathbf{Y} \exp[\tau - 2L^*]. \quad (\text{C.39})$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur la luminance diffuse sont données par les réflexions aux interfaces (voir Chap. I). Dans le cas de l'interface en $\tau = 0$ (i.e. $z = 0$), on a

$$L_d(\tau = 0, \mu_2 > 0) = R_{21}(|\mu_2|) L_d(\tau = 0, \mu_2 < 0) \quad (\text{C.40})$$

ce qui devient avec les notations discrétisées :

$$L_d(\tau = 0, i) = R_{21}(|\mu_{2,i}|) L_d(\tau = 0, -i) \quad (\text{C.41})$$

soit encore

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2N_2} C_i \mathbf{G}_i(\mu_2 > 0) + \mathbf{X}(\mu_2 > 0) + \mathbf{Y}(\mu_2 > 0) \exp[-2L^*] = \\ R_{21}(|\mu_{2,i}|) \sum_{i=1}^{2N_2} C_i \mathbf{G}_i(\mu_2 < 0) + \mathbf{X}(\mu_2 < 0) + \mathbf{Y}(\mu_2 < 0) \exp[-2L^*] \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

où $\mathbf{G}_i(\mu_2 > 0)$ correspond au vecteur \mathbf{G}_i restreint aux composantes correspondant à $\mu_2 > 0$. Sous forme indicielle, cela s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{2N_2} C_i (G_{i,j} - R_{21,j} G_{i,j+N_2}) = -X_j - Y_j \exp[-2L^*] + R_{21,j} [X_{j+N_2} + Y_{j+N_2} \exp(-2L^*)] \quad (\text{C.43})$$

pour $j \in \{1, \dots, N_2\}$. De même, pour l'interface $\tau = L^*$ (i.e. $z = L$), on a

$$\sum_{i=1}^{2N_2} C_i (G_{i,j} - R_{23,j} G_{i,j-N_2}) \exp[k_i L^*] = [-X_j - Y_j + R_{23,j} (X_{j-N_2} + Y_{j-N_2})] \exp(-L^*) \quad (\text{C.44})$$

pour $j \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\}$. La réécriture du système C.43, C.44 passe par la définition des variables suivantes :

$$\begin{aligned} F_{i,j} &= \begin{cases} G_{i,j} - R_{21,j} G_{i,j+N_2} & j \in \{1, \dots, N_2\} \\ G_{i,j} - R_{23,j} G_{i,j-N_2} & j \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\} \end{cases} \\ H_j &= \begin{cases} -X_j - R_{21,j} X_{j+N_2} & j \in \{1, \dots, N_2\} \\ -X_j - R_{23,j} X_{j-N_2} & j \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\} \end{cases} \\ K_j &= \begin{cases} (-Y_j - R_{21,j} Y_{j+N_2}) \exp[-2L^*] & j \in \{1, \dots, N_2\} \\ -Y_j - R_{23,j} Y_{j-N_2} & j \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{2N_2} C_i F_{i,j} = H_j + K_j & j \in \{1, \dots, N_2\} \\ \sum_{i=1}^{2N_2} C_i F_{i,j} \exp[k_i L^*] = (H_j + K_j) \exp[-L^*] & j \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\} \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

Le système d'équations précédent présente des problèmes de résolution numérique du fait du mauvais conditionnement de la matrice à inverser (THOMAS et STAMNES 1999). En effet, la matrice contient des exponentielles à arguments positifs. Pour palier à ce problème, nous procédons au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} C_i = \tilde{C}_i \exp[-k_i L^*] & i \in \{1, \dots, N_2\} \\ C_i = \tilde{C}_i & i \in \{N_2 + 1, \dots, 2N_2\} \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

Ainsi, la recherche des \tilde{C}_i passe par une inversion de matrice contenant que des exponentielles à arguments négatifs. Cela conclut la recherche de la luminance dans un problème plan en utilisant la méthode des ordonnées discrètes.

C.2 Résolution de l'etr en régime instationnaire

L'ETR dans sa version temporelle ne fait apparaître qu'une dérivée partielle du premier ordre en temps. L'astuce consiste ici à se ramener au cas du régime stationnaire en passant dans le domaine fréquentiel. Nous définissons la transformée de FOURIER de la luminance par :

$$L_\nu(\tau, \mu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} L_\nu(\tau, \mu, \omega) \exp[-i\omega t] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (\text{C.48})$$

L'injection de cette relation dans les équations C.2 et C.3, donne un système stationnaire effectif sous la forme :

$$\pm \frac{\partial L_c^\pm(\tau, \omega)}{\partial \tau} = - \left(1 - \frac{i\omega}{\mu_e c} \right) L_c^\pm(\tau, \omega) \quad (\text{C.49})$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial L_d(\tau, \mu, \omega)}{\partial \tau} = & - \left(1 - \frac{i\omega}{\mu_e c} \right) L_d(\tau, \mu, \omega) + \frac{a}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') L_d(\tau, \mu', \omega) d\mu' \\ & + \frac{a}{2} p(\mu, 1) L_c^+(\tau, \omega) + \frac{a}{2} p(\mu, -1) L_c^-(\tau, \omega) \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

où on définit un coefficient d'extinction effectif adimensionné par

$$\mu_e^*(\omega) = 1 - \frac{i\omega}{\mu_e c}. \quad (\text{C.51})$$

La résolution de ce système passe alors par la méthode présentée dans la section précédente itérée sur un ensemble de pulsations ω choisies de telle sorte qu'on puisse faire une transformée de FOURIER inverse numérique pour obtenir la luminance temporelle.

La fréquence ν correspond à des variations rapides (longueur d'onde du rayonnement) alors que la fréquence ω correspond à des variations lentes (évolution temporelle). Dans le spectre, ν est donc la fréquence centrale. C'est l'hypothèse d'une luminance quasi-monochromatique.

Annexe D

Fonction de corrélation spatiale pour une luminance isotrope

Cette annexe a pour but le calcul de la fonction de corrélation spatiale dans le cas d'une luminance totalement isotrope. Une luminance isotrope dans tout l'espace intégrée sur φ donne également une luminance isotrope, on a donc $\mathcal{L}(z, \mu) = \mathcal{L}$. L'équation II.13 donne :

$$W(\rho) = \mathcal{L} \int_{-1}^{+1} \mathcal{J}_0\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sqrt{1-\mu^2}\right) d\mu \quad (\text{D.1})$$

Posons $X = 2\pi\rho/\lambda$. On a $\mu = \cos\theta$, d'où $d\mu = -\sin\theta d\theta$, ce qui amène :

$$W(X) = \mathcal{L} \int_0^\pi \mathcal{J}_0(X \sin\theta) \sin\theta d\theta \quad (\text{D.2})$$

La fonction de BESSEL \mathcal{J}_0 est la solution du problème :

$$\begin{cases} x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

L'équation différentielle permet alors de déduire le développement en série entière de \mathcal{J}_0 en posant :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{D.4})$$

ce qui donne les relations :

$$\begin{cases} a_n n(n-1) + a_n n + a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \\ a_0 = 1 \text{ et } a_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

La récurrence précédente se résume en :

$$a_{2p+2} = \frac{-a_{2p}}{(2p+2)^2}; \quad a_{2p+1} = 0; \quad a_0 = 1 \quad (\text{D.6})$$

Soit finalement :

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)^2 (2p-2)^2 \dots (2)^2} = \frac{(-1)^p}{(2^p p!)^2} \quad (\text{D.7})$$

Le développement de \mathcal{J}_0 s'écrit ainsi :

$$\mathcal{J}_0(X \sin \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \frac{(X \sin \theta)^{2p}}{(p!)^2} \quad (\text{D.8})$$

On remarque alors qu'il faut calculer l'intégrale :

$$I_{2p} = \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta \quad (\text{D.9})$$

Une intégration par parties amène immédiatement :

$$I_{2p} = 2p (I_{2p-2} - I_{2p}) \Rightarrow I_{2p} = I_{2(p-1)} \frac{2p}{2p+1} \quad (\text{D.10})$$

On obtient donc :

$$I_{2p} = I_0 \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{2^{2p+1} p!^2}{(2p+1)!} \text{ avec } I_0 = 2 \quad (\text{D.11})$$

On en déduit le développement en série entière de la fonction de corrélation spatiale du champ :

$$\begin{aligned} W(X) &= L \sum_{p=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^p \frac{(X)^{2p}}{(p!)^2} \frac{2^{2p+1} p!^2}{(2p+1)!} \\ &= 2L \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p X^{2p}}{(2p+1)!} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Développons également en série entière la fonction sinus cardinal :

$$\sin X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p X^{2p+1}}{(2p+1)!} \Rightarrow \frac{\sin X}{X} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p X^{2p}}{(2p+1)!} \quad (\text{D.13})$$

On en déduit la formulation finale de la fonction de corrélation :

$$\boxed{W(\rho) = 2\mathcal{L} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right)} \quad (\text{D.14})$$

On peut remarquer que si on ne considère que la propagation dans le sens des z croissants (respectivement dans le sens des z décroissants), la fonction de corrélation spatiale notée W^+ (respectivement W^-) est également un sinus cardinal car :

$$I'_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta \quad (\text{D.15})$$

$$\text{et } I''_{2p} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin \theta)^{2p+1} d\theta \quad (\text{D.16})$$

vérifient la même relation de récurrence que I_{2p} avec $I'_0 = I''_0 = 1$.

Annexe E

Modes propres de l'ETR

Nous nous intéressons ici aux modes propres de l'ETR en régimes stationnaire et instationnaire dans le cas d'une fonction de phase isotrope, seul cas où une étude analytique est possible. Cependant, nous avons vérifié par expérimentation numérique que les propriétés obtenues sur le spectre et les valeurs propres en diffusion isotrope restent valables en diffusion anisotrope. Tous ces résultats sont issus de (CASE et ZWEIFEL 1967).

E.1 Modes propres en régime stationnaire

Nous recherchons une décomposition en modes propres de l'ETR en régime stationnaire avec fonction de phase isotrope (i.e. $p = 1$) rappelée ci-après :

$$\mu \frac{\partial}{\partial z} L(z, \mu) = -\mu_e L(z, \mu) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu') d\mu'. \quad (\text{E.1})$$

Nous écrivons alors la luminance sous la forme d'un mode spatial :

$$L(z, \mu) = G_\nu(\mu) \exp\left(-\frac{z}{\nu}\right) \quad (\text{E.2})$$

où $k = 1/\nu$ est une valeur propre spatiale et $G_\nu(\mu)$ le vecteur propre associé ne dépendant que de la direction μ . En injectant cette forme dans l'équation E.1, on obtient :

$$\left(\mu_e - \frac{\mu}{\nu}\right) G_\nu(\mu) = \frac{\mu_s}{2} \underbrace{\int_{-1}^{+1} G_\nu(\mu') d\mu'}_{=1 \text{ par normalisation}}. \quad (\text{E.3})$$

Nous obtenons ainsi :

$$G_\nu(\mu) = \frac{\mu_s \nu}{2} \frac{1}{\mu_e \nu - \mu}. \quad (\text{E.4})$$

Deux cas de figure se présentent :

- Si $\nu \in]-1/\mu_e, 1/\mu_e[$, le dénominateur peut être nul. Au sens des distributions, la solution s'écrit avec VP valeur principale, δ distribution de DIRAC en 0 et λ fonction quelconque de ν :

$$G_\nu(\mu) = \frac{\mu_s \nu}{2} \text{VP} \left(\frac{1}{\mu_e \nu - \mu} \right) + \lambda(\nu) \delta(\mu_e \nu - \mu). \quad (\text{E.5})$$

On obtient ainsi un continuum de valeurs propres.

- Si $\nu \notin]-1/\mu_e, 1/\mu_e[$, il est nécessaire à ce stade de supprimer le vecteur propre, pour cela, on somme la relation E.4 sur μ :

$$1 = \frac{\mu_s \nu}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\mu_e \nu - \mu}. \quad (\text{E.6})$$

Finalement, on obtient la relation de dispersion :

$$\Lambda(\nu) = 1 - \frac{\mu_s \nu}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\mu_e \nu - \mu} \quad (\text{E.7})$$

avec la fonction $\Lambda(\nu)$ qui doit être nulle. Après calcul de l'intégrale, on obtient :

$$\Lambda(\nu) = 1 - \mu_s \nu \underbrace{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\mu_e \nu}\right)}_{=1/2 \ln[(\mu_e \nu + 1)/(\mu_e \nu - 1)]}. \quad (\text{E.8})$$

On voit immédiatement que $\Lambda(\nu) = \Lambda(-\nu)$ et $\Lambda(\nu^*) = \Lambda(\nu)^*$. Donc, si ν_0 est solution, $-\nu_0$ et ν_0^* le sont également. En réalité, on peut montrer qu'il n'y a que deux solutions qui sont donc opposées et conjuguées :

$$\begin{cases} a < 1 & \Rightarrow \nu_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow -\nu_0 \in \mathbb{R} & \text{cas d'un milieu absorbant,} \\ a > 1 & \Rightarrow \nu_0 \in i\mathbb{R} \Rightarrow -\nu_0 \in i\mathbb{R} & \text{cas d'un milieu amplificateur.} \end{cases} \quad (\text{E.9})$$

C'est le spectre discret composé de deux valeurs propres.

Ainsi, la luminance s'écrit en terme de décomposition modale :

$$L(z, \mu) = C_0^+ G_0^+(\mu) \exp(k_0 z) + C_0^- G_0^-(\mu) \exp(-k_0 z) + \int_{-1}^{+1} C_\nu G_\nu(\mu) \exp\left(\frac{z}{\nu}\right) d\nu. \quad (\text{E.10})$$

E.2 Modes propres en régime instationnaire

Dans le cas du régime instationnaire, l'étude modale peut s'effectuer également de manière analytique. En diffusion isotrope, l'ETR devient :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L(z, \mu, t) = -\mu_e L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu', t) d\mu'. \quad (\text{E.11})$$

Écrivons une décomposition modale de la luminance sous la forme :

$$L(z, \mu, t) = G_{ks}(\mu) \exp[ikz + s(k)t]. \quad (\text{E.12})$$

Cette forme est obtenue par transformée de FOURIER spatiale de la luminance (k est ainsi réel, on superpose les modes spatiaux). À k fixé, s est une valeur propre temporelle de l'ETR, elle peut prendre des valeurs complexes. $G_{ks}(\mu)$ est le vecteur propre associé, il ne dépend que de la direction μ .

Tout comme dans le cas du régime stationnaire, en injectant la décomposition de la luminance dans l'ETR nous obtenons :

$$\left(\frac{s(k)}{c} + ik\mu\right) G_{ks}(\mu) = -\mu_e G_{ks}(\mu) + \underbrace{\frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} G_{ks}(\mu') d\mu'}_{=1 \text{ par normalisation}}. \quad (\text{E.13})$$

En posant $\mu_e + s(k)/c = ik\alpha$, nous aboutissons à :

$$G_{ks}(\mu) = \frac{\mu_s}{2ik(\alpha + \mu)}. \quad (\text{E.14})$$

Deux cas de figure se présentent :

- si $\alpha \in]-1, 1[$, alors $\alpha \in \mathbb{R}$, le dénominateur peut être nul. Le mode s'écrit alors :

$$G_{ks}(\mu) = \text{VP} \left[\frac{\mu_s}{2ik(\alpha + \mu)} \right] + \lambda(\alpha) \delta(\alpha + \mu) \quad (\text{E.15})$$

où VP désigne la valeur principale, δ la distribution de DIRAC et où λ est une fonction quelconque de α . Il est à remarquer que nous avons alors un continuum de valeurs propres s pour k fixé.

- si $\alpha \notin]-1, 1[$, $\alpha + \mu \neq 0$. En intégrant angulairement la relation E.14, on aboutit à :

$$1 = \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_s d\mu}{2ik(\alpha + \mu)}. \quad (\text{E.16})$$

Finalement, on obtient la relation de dispersion :

$$\Lambda(\alpha) = 1 - \int_{-1}^{+1} \frac{\mu_s d\mu}{2ik(\alpha + \mu)} \quad (\text{E.17})$$

avec la fonction Λ qui doit être nulle. Après calcul de l'intégrale, on obtient :

$$\Lambda(\alpha) = 1 - \frac{\mu_s}{ik} \underbrace{\tanh^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{1/2 \ln[(\alpha+1)/(\alpha-1)]}. \quad (\text{E.18})$$

Pour k fixé, deux solutions existent comme dans le cas stationnaire, notées $\pm\alpha_0$. Nous retenons alors s_0 sous la forme :

$$s_0(k) = -\mu_e c + \frac{kc}{\tan(k/\mu_s)} \quad \text{pour} \quad |k| < \frac{\pi\mu_s}{2}. \quad (\text{E.19})$$

À noter que k est réel (la luminance complète est en fait donnée par une transformée de FOURIER dans laquelle k joue le rôle de la variable muette) et ainsi s_0 l'est également.

Annexe F

Démonstration $\alpha(\mu) = \text{Cte}$

Dans cette annexe, nous montrons à l'aide de deux démonstrations différentes que l'ordre 0 du développement limité du vecteur propre $G_{ks_0}(\mu)$ du mode $[k, s_0(k)]$ quand $k/\mu_s \rightarrow 0$ est une constante indépendante de la direction μ . Pour cela, nous partons de l'équation III.29 rappelée ci-après :

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \alpha(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.1})$$

F.1 Première démonstration

Lorsqu'on regarde aux grandes échelles d'espace, on a $k \rightarrow 0$ et ainsi en regardant en plus aux grandes échelles de temps $s_0(k) \rightarrow -\mu_a c$ (d'après l'équation III.27). C'est ainsi que :

$$L(z, \mu, t) \rightarrow \alpha(\mu) \exp[-\mu_a c t]. \quad (\text{F.2})$$

Comme la luminance est une quantité positive, on en déduit immédiatement que $\alpha(\mu) \geq 0$. Ainsi, on a :

$$\forall \mu \in [-1, 1] \quad \alpha(\mu) \geq 0 \quad (\text{F.3})$$

$$\forall (\mu', \mu) \in [-1, 1]^2 \quad p(\mu', \mu) \geq 0. \quad (\text{F.4})$$

On considère que la fonction de phase peut être nulle qu'en des points isolés (i.e. $g \neq 1$).

La fonction α est définie continue, positive sur un intervalle fermé borné. Si on pose $\alpha_m = \min \alpha(\mu)$, alors :

$$\exists \mu_m \in [-1, 1] \quad / \quad \alpha(\mu_m) = \alpha_m. \quad (\text{F.5})$$

Supposons par l'absurde que la fonction $\alpha \neq \text{Cte}$. Alors :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \exists (\mu_1, \mu_2) \in [-1, 1]^2 \quad / \quad \forall \mu \in [\mu_1, \mu_2] \quad \alpha(\mu) \geq \alpha_m + \epsilon. \quad (\text{F.6})$$

On a alors en utilisant l'équation F.1 :

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \alpha(\mu') d\mu' \geq \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) \alpha_m d\mu' + \frac{1}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu', \mu) \epsilon d\mu' \quad (\text{F.7})$$

$$\alpha(\mu) \geq \alpha_m + \underbrace{\frac{\epsilon}{2} \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu', \mu) d\mu'}_{>0}. \quad (\text{F.8})$$

Finalement, on en déduit que :

$$\forall \mu \in [-1, 1] \quad \alpha(\mu) > \alpha_m \quad (\text{F.9})$$

ce qui est faux puisqu'il existe μ_m tel que $\alpha(\mu_m) = \alpha_m$. Par conséquent, l'hypothèse de départ est fautive et α est une constante.

F.2 Deuxième démonstration

Cette démonstration est issue de la référence (MORSE et FESHACH 1953), partie 1, section 8.4 qui énonce que l'équation F.1 est une intégrale homogène de FREDHOLM du second ordre dont le noyau (la fonction de phase) est réel et non singulier. Posons :

$$\alpha(\mu) = k \int_{-1}^{+1} p(\mu, \mu') \alpha(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.10})$$

On souhaite donc obtenir la solution de cette équation pour $k = 1/2$. On peut développer la fonction de phase sur les polynômes de LEGENDRE (voir Ann. G) :

$$p(\mu, \mu') = \sum_n a_n P_n(\mu) P_n(\mu'). \quad (\text{F.11})$$

En remplaçant dans l'équation F.10, on obtient :

$$\alpha(\mu) = k \sum_n a_n P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} P_n(\mu') \alpha(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.12})$$

Posons alors :

$$A_n = k \int_{-1}^{+1} P_n(\mu') \alpha(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.13})$$

Remplaçons alors dans cette équation l'expression de $\alpha(\mu)$ obtenue dans l'équation F.12 :

$$A_n = k \int_{-1}^{+1} P_n(\mu') k \sum_p a_p P_p(\mu') \int_{-1}^{+1} P_p(\mu'') \alpha(\mu'') d\mu'' d\mu'. \quad (\text{F.14})$$

On peut donc résumer l'équation précédente ainsi :

$$\sum_p \alpha_{np} A_p = \lambda A_n \quad \text{avec} \quad \lambda = 1/k \quad \text{et} \quad \alpha_{np} = a_p \int_{-1}^{+1} P_n(\mu') P_p(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.15})$$

On obtient donc un problème aux valeurs propres. Il nous faut par conséquent vérifier que $\lambda = 2$ est bien valeur propre. Tout d'abord, les polynômes de LEGENDRE sont orthogonaux deux à deux, ce qui signifie que la matrice $(\alpha_{np})_{(n,p)}$ est diagonale. Autrement-dit, on a :

$$\lambda_m = \alpha_m \quad \text{et} \quad \alpha_{np} = \alpha_n \delta_{np} = a_n \delta_{np} \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) P_n(\mu) d\mu. \quad (\text{F.16})$$

En particulier, 2 est bien valeur propre car $a_0 = 1$ et $P_0(\mu) = 1$. Comme la matrice est diagonale, le vecteur propre associé à la valeur propre λ_0 s'écrit : $A_n^{(0)} = \delta_{0n} A_0^{(0)}$. Or, d'après l'équation F.12, on a :

$$\alpha(\mu) = k \sum_n a_n P_n(\mu) A_n. \quad (\text{F.17})$$

D'où :

$$\alpha(\mu) = \frac{1}{2} \sum_n a_n P_n(\mu) A_n^{(0)} = \frac{A_0^{(0)}}{2}. \quad (\text{F.18})$$

C'est ainsi que $\alpha(\mu)$ est une constante.

Annexe G

Moment d'ordre 1 de la fonction de phase

Nous cherchons la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \mu p(\mu', \mu) d\mu \quad (\text{G.1})$$

où $p(\mu', \mu)$ est la fonction de phase intégrée sur l'angle azimutal φ . Pour cela, utilisons la décomposition de la fonction de phase $p(\mathbf{u}', \mathbf{u})$ sur les polynômes de LEGENDRE :

$$p(\cos \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \Theta). \quad (\text{G.2})$$

La fonction de phase étant normalisée par la relation suivante :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) d\Omega' = 1, \quad (\text{G.3})$$

on obtient l'expression du premier coefficient du développement¹ :

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} P_n(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_0(x) dx = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}. \quad (\text{G.5})$$

De même, le coefficient d'anisotropie est donné par :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} d\Omega' = g, \quad (\text{G.6})$$

¹On rappelle que les polynômes de LEGENDRE vérifient la relation

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (\text{G.4})$$

avec $P_0 = 1$.

ce qui permet de déduire l'expression du deuxième coefficient du développement² :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} P_n(x) x dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} \left[\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}(x) \right] P_0(x) dx \\ &= g \Rightarrow \boxed{a_1 = 3g}. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Pour passer au cas de la fonction de phase intégrée sur l'angle φ , nous devons expliciter les polynômes de LEGENDRE $P_n(\cos \Theta)$ en fonction de μ et μ' . Le théorème d'addition des harmoniques sphériques (JACKSON 2001) nous permet d'expliciter le polynôme de LEGENDRE comme suit :

$$P_n(\cos \Theta) = P_n(\mu') P_n(\mu) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu') P_n^m(\mu) \cos(\varphi - \varphi'). \quad (\text{G.9})$$

L'intégration sur φ du développement de la fonction de phase sur les polynômes de LEGENDRE conduit alors au résultat :

$$p(\mu', \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu') P_n(\mu). \quad (\text{G.10})$$

Nous devons donc calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \boxed{\int_{-1}^{+1} \mu p(\mu', \mu) d\mu} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^{+1} P_n(\mu') P_n(\mu) \mu d\mu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu') \int_{-1}^{+1} P_n(\mu) \mu d\mu \\ &= \frac{2}{3} P_1(\mu') a_1 = \frac{2}{3} \mu' a_1 \boxed{= 2g\mu'} \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

où on rappelle que $P_1(x) = x$.

²On rappelle que les polynômes de LEGENDRE vérifient la relation de récurrence

$$(n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1)x P_n(x) + n P_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{G.7})$$

Annexe H

Expression du flux transmis par une couche en approximation de la diffusion

Cette annexe décrit la méthode de calcul du flux transmis en approximation de la diffusion dans le cas d'une géométrie plane éclairée sous incidence normale telle que présentée au chapitre I. La figure H.1 rappelle le problème étudié.

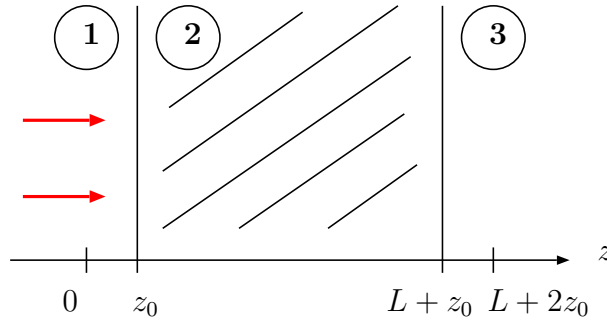


Fig. H.1 – Représentation du problème plan étudié. Le milieu est éclairé sous incidence normale par la gauche par une impulsion très brève localisée en $(z, t) = (z_0, 0)$.

La recherche du flux passe par la recherche de la densité d'énergie $u(z, t)$ au sein du milieu diffusant et donc par la recherche de la fonction de GREEN de l'équation de la diffusion. Les conditions aux limites sont données par (voir Ann. I) :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(d, t) = 0 \quad (\text{H.1})$$

où $d = L + 2z_0$ et z_0 est la longueur d'extrapolation.

Pour une source ponctuelle placée en \mathbf{r}' émettant une impulsion brève au temps $t = 0$, la fonction de GREEN $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ du problème est définie par :

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - \mathcal{D}\Delta_{\mathbf{r}}G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - \mu_a cG(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t) \quad (\text{H.2})$$

où \mathcal{D} est le coefficient de diffusion (on montre dans le chapitre III que le coefficient de diffusion le plus approprié dans ce cas est donné par $\mathcal{D} = cl_{tr}/3$). Dans le cas d'un milieu

infini, la fonction de GREEN est donnée par (SMIRNOV 1981) (voir Ann. B) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{\sqrt{(4\pi\mathcal{D}t)^3}} \exp\left[-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2}{4\mathcal{D}t}\right] \exp[-\mu_a ct] \quad (\text{H.3})$$

où H est la fonction d'HEAVYSIDE. Afin de prendre en compte correctement les conditions aux limites de l'équation H.1, nous utilisons la méthode des images pour déterminer la fonction de GREEN d'une tranche. Pour cela, nous plaçons tout d'abord la source sur le plan $z' = z_0$. Les conditions aux limites nous obligent alors à placer des sources symétriquement à la source initiale par rapport aux plans $z' = 0$ et $z' = d$, donc sur les plans $z' = -z_0$ (charge opposée), $z' = L + z_0$ (charge identique) et $z' = L + 3z_0$ (charge opposée). Ensuite, il faut également considérer les images de ces nouvelles sources et ainsi de suite. Finalement, la fonction de GREEN du problème s'écrit :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{\sqrt{(4\pi\mathcal{D}t)^3}} \exp\left[-\frac{R^2}{4\mathcal{D}t}\right] \exp[-\mu_a ct] \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - 2nd - z_0)^2}{4\mathcal{D}t}\right] - \exp\left[-\frac{(z - 2nd + z_0)^2}{4\mathcal{D}t}\right] \right\} \quad (\text{H.4})$$

où $R = (x - x')^2 + (y - y')^2$. Cette somme peut être réécrite en utilisant la règle de sommation de POISSON (MORSE et FESHBACH 1953) :

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{4\pi\mathcal{D}td} \exp\left[-\frac{R^2}{4\mathcal{D}t} - \mu_a ct\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n z_0}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 \mathcal{D}t}{d^2}\right]. \quad (\text{H.5})$$

Nous pouvons maintenant intégrer sur les positions des sources (variables x' et y') pour finalement obtenir :

$$G(z, z_0, t) = \frac{H(t)}{d} \exp[-\mu_a ct] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n z_0}{d}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{d}\right) \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 \mathcal{D}t}{d^2}\right]. \quad (\text{H.6})$$

Ainsi, la densité d'énergie est donnée par :

$$u(z, t) = G(z, z_0, t) E_{\text{inc}} \quad (\text{H.7})$$

où E_{inc} est l'énergie du pulse incident. Le flux transmis est alors simplement donné par la loi de FICK :

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{\text{sort,diff}}^+ &= -\mathcal{D} \frac{\partial u}{\partial z}(L + z_0, t) \\ &= \frac{E_{\text{inc}} H(t) \mathcal{D}}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n\pi}{d} \sin\left(\frac{\pi n L}{d}\right) \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 \mathcal{D}t}{d^2} - \mu_a ct\right] \end{aligned}} \quad (\text{H.8})$$

Notons au passage que si la longueur d'extrapolation était nulle (i.e. $z_0 = 0$), on aurait un flux transmis nul. Cela justifie donc pleinement l'utilisation de cette distance fictive pour les conditions aux limites.

Annexe I

Longueur d'extrapolation z_0 pour les conditions aux limites en approximation de la diffusion

Cette annexe présente les deux principales méthodes de calcul de la longueur d'extrapolation z_0 permettant d'écrire les conditions aux limites à utiliser dans le cadre de l'approximation de la diffusion. La première est basée sur l'approximation P1 (ISHIMARU 1997) tandis que la deuxième se déduit d'une étude modale (CASE et ZWEIFEL 1967).

I.1 Calcul de z_0 par l'approximation P1

En ce qui concerne les flux diffus, comme aucun rayonnement ne pénètre dans le milieu, on a :

$$\phi_d^+(z < 0) = 0 \quad \phi_d^-(z > 0) = 0. \quad (\text{I.1})$$

Soit \mathbf{n} la normale entrante, les égalités précédentes deviennent en terme de luminance diffuse (ISHIMARU 1997) :

$$\int_{2\pi} L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0. \quad (\text{I.2})$$

Décomposons alors le vecteur flux radiatif en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\Phi_d(\mathbf{r}) = \phi_{dn}\mathbf{n} + \phi_{dt}\mathbf{t} \quad \text{avec} \quad \Phi_d(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \mathbf{u} d\Omega. \quad (\text{I.3})$$

On suppose maintenant qu'en première approximation, la luminance est isotrope (validité de l'approximation de la diffusion) avec un terme correctif du premier ordre. C'est cette décomposition qui est utilisée dans l'approximation P1 :

$$L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = cu_d(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \Phi_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}. \quad (\text{I.4})$$

Ainsi, l'équation I.2 devient :

$$\int_{2\pi} cu_d(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Omega + \frac{3}{4\pi} \int_{2\pi} (\Phi_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = 0. \quad (\text{I.5})$$

Le premier terme de l'équation ci-dessus donne :

$$\int_{2\pi} cu_d(\mathbf{r}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Omega = cu_d(\mathbf{r}) \int_{2\pi} \cos \theta d \cos \theta d\varphi = \pi cu_d(\mathbf{r}). \quad (\text{I.6})$$

Le deuxième terme quant à lui s'exprime en utilisant la décomposition du flux de l'équation I.3 :

$$\frac{3}{4\pi} \int_{2\pi} (\Phi_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = \frac{3}{4\pi} \underbrace{\int_{2\pi} \phi_{dn} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega}_{2\pi\phi_{dn} \int_0^1 \mu d\mu = \frac{2\pi}{3} \phi_{dn}} + \frac{3}{4\pi} \underbrace{\int_{2\pi} \phi_{dt} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega}_{\phi_{dt} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d \cos \theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0}. \quad (\text{I.7})$$

Finalement, l'équation I.5 devient :

$$\frac{1}{2} cu_d(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \phi_{dn}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{I.8})$$

Cette expression n'est bien sûr valable qu'aux interfaces. Il est nécessaire maintenant d'exprimer le flux ϕ_{dn} en fonction de u_d . Pour cela, repartons de l'ETR :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = -\mu_e L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}) + \frac{\mu_s}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') L_d(\mathbf{r}, \mathbf{u}') d\Omega'. \quad (\text{I.9})$$

Injectons dans cette équation l'expression approximée de la luminance (équation I.4) :

$$c\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} u_d(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} [\Phi_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}] = -c\mu_e u_d(\mathbf{r}) - \frac{3}{4\pi} \mu_e \Phi_d(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u} \\ + c\mu_s u_d(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \mu_s \Phi_d(\mathbf{r}) \int_{4\pi} \frac{p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u}' d\Omega'}{4\pi}. \quad (\text{I.10})$$

Notons que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u}' d\Omega' = \frac{\mathbf{u}}{4\pi} \int_{4\pi} p(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' d\Omega' = g\mathbf{u}. \quad (\text{I.11})$$

car la fonction de phase ne dépend que de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$. Multiplions l'équation I.10 par \mathbf{u} et intégrons sur toutes les directions :

$$c\nabla_{\mathbf{r}} u_d(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} [-\mu_e + g\mu_s] \Phi_d(\mathbf{r}). \quad (\text{I.12})$$

Comme on suppose qu'il n'y a pas d'absorption, on a :

$$c\nabla_{\mathbf{r}} u_d(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi} [1 - g] \mu_s \Phi_d(\mathbf{r}). \quad (\text{I.13})$$

Finalement, en projetant sur le vecteur \mathbf{n} , on obtient :

$$\phi_{dn}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi c l_{tr}}{3} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} u_d(\mathbf{r}). \quad (\text{I.14})$$

En utilisant les équations I.8 et I.14, nous déduisons :

$$\boxed{u_d(\mathbf{r}) - \frac{2l_{tr}}{3} \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} u_d(\mathbf{r}) = 0}. \quad (\text{I.15})$$

Cette équation n'est bien sûr valable que sur les interfaces. Ainsi, si on effectue une extrapolation linéaire de la densité d'énergie en dehors du milieu, celle-ci s'annulera pour une distance à l'interface égale à :

$$\boxed{z_0 = 2/3 l_{tr}}. \quad (\text{I.16})$$

I.2 Calcul de z_0 par méthode asymptotique modale

L'étude analytique présentée ici est un résumé de celle menée dans le cas du transport des neutrons (CASE et ZWEIFEL 1967). Elle s'applique dans le cas d'une diffusion isotrope $p = 1$ ce qui implique $g = 0$. Dans ce cas, l'ETR en régime stationnaire s'écrit :

$$\mu \frac{\partial L}{\partial z}(z, \mu) + \mu_e L(z, \mu) = \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} L(z, \mu') d\mu'. \quad (\text{I.17})$$

Comme mentionné précédemment, la luminance s'écrit sous forme modale (voir Ann. E) :

$$L(z, \mu) = C_0^+ G_0^+(\mu) \exp(k_0 z) + C_0^- G_0^-(\mu) \exp(-k_0 z) + \int_{-1}^{+1} C_\nu G_\nu(\mu) \exp\left(\frac{z}{\nu}\right) d\nu. \quad (\text{I.18})$$

I.2.1 Problème de Milne

La détermination de la longueur d'extrapolation passe alors par la résolution du problème de MILNE. La figure I.1 présente la configuration à résoudre.

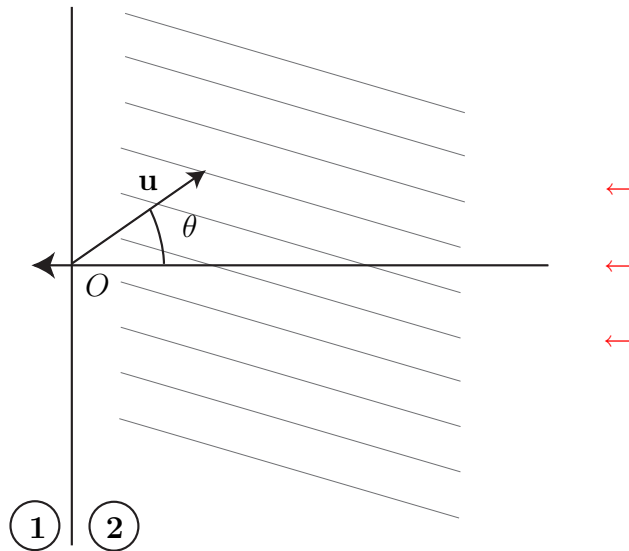


Fig. I.1 – Géométrie du problème de MILNE : le milieu diffusant est semi-infini pour $z < 0$. La luminance incidente est placée à droite sur la figure pour $z \rightarrow -\infty$.

L'approximation de la diffusion sera valable loin de la paroi est loin de la source, donc vers le pseudo-centre de la couche. Dans l'expression de la luminance, nous allons retenir alors que les termes en k_0 et en $-k_0$. L'intégration angulaire nous donnera alors l'expression de la densité d'énergie asymptotique u_{As} . Cette densité s'annulera en z_0 avec $z_0 > 0$ (donc à l'extérieur du milieu) que nous allons déterminer.

Dans ce problème, la luminance s'écrit :

$$L(z, \mu) = C_0^+ G_0^+(\mu) \exp(k_0 z) + G_0^-(\mu) \exp(-k_0 z) + \int_0^{+1} C_\nu G_\nu(\mu) \exp\left(\frac{z}{\nu}\right) d\nu. \quad (\text{I.19})$$

L'intégrale est prise entre 0 et 1 pour supprimer les termes divergeants du continuum. De plus, on doit avoir :

$$L(z, \mu) \rightarrow G_0^-(\mu) \exp(-k_0 z) \quad \text{pour } z \rightarrow -\infty. \quad (\text{I.20})$$

On sait de plus qu'à la paroi, la luminance dans le sens des z croissants (i.e. $\mu > 0$) est nulle puisqu'il n'y a pas de réflexions : $L(0, \mu > 0) = 0$.

On va définir un produit scalaire pour projeter l'expression de la luminance $L(0, \mu > 0)$ sur les vecteurs propres G_ν est ainsi déterminer les coefficients C_ν . Nous ne pouvons considérer ici que les $\mu > 0$. De ce fait, il est nécessaire de faire intervenir une fonction supplémentaire notée W pour l'expression du produit scalaire. Ainsi, les vecteurs propres ne seront pas tous orthogonaux 2 à 2, nous allons faire intervenir une fonction X pour exprimer cette non-nullité, fonction que l'on peut calculer analytiquement (CASE et ZWEIFEL 1967). Finalement, nous avons la relation :

$$\int_0^{+1} W(\mu) G_0^+(\mu) L(0, \mu) d\mu = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_0^+ \int_0^{+1} W(\mu) G_0^{+2}(\mu) d\mu + \int_0^{+1} W(\mu) G_0^+(\mu) G_0^-(\mu) d\mu \\ + \int_0^{+1} \int_0^{+1} C_\nu W(\mu) G_0^+(\mu) G_\nu(\mu) d\nu d\mu = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Après calcul, on obtient en utilisant la fonction X qu'on ne détaillera pas ici :

$$\frac{\mu_s^2 \nu_0^2 C_0^+ X(\nu_0)}{4} - \frac{\mu_s^2 \nu_0^2 X(-\nu_0)}{4} + 0 = 0. \quad (\text{I.23})$$

Finalement :

$$C_0^+ = \frac{X(-\nu_0)}{X(\nu_0)}. \quad (\text{I.24})$$

La densité d'énergie radiative asymptotique peut alors être entièrement déterminée, elle s'exprime par :

$$u_{As}(z) = \frac{C_0^+ \exp(k_0 z)}{c} \underbrace{\int_{-1}^{+1} G_0^+(\mu) d\mu}_{=1} + \frac{\exp(-k_0 z)}{c} \underbrace{\int_{-1}^{+1} G_0^-(\mu) d\mu}_{=1}. \quad (\text{I.25})$$

Or, on veut $u_{As}(z_0) = 0$, ce qui donne la longueur d'extrapolation

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{2k_0} \ln \left(\frac{-1}{C_0^+} \right)}. \quad (\text{I.26})$$

Dans le cas d'un albédo a égal à 1, la valeur analytique obtenue est de $z_0 \approx 0.7104l_{tr}$. On notera que cette valeur est différente de celle trouvée en approximation P1.

Annexe J

Méthode de MONTE CARLO

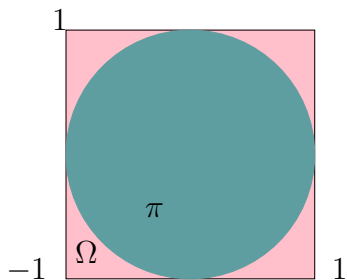
Les méthodes MONTE-CARLO (du nom du célèbre quartier de MONACO) sont des méthodes stochastiques de calcul numérique (METROPOLIS *et al.* 1953; RUBINSTEIN 1981). Elles sont très utilisées en particulier pour le calcul d'intégrales de dimensions supérieures à un (et même de dimension infinie dans le cas du transfert radiatif). Aussi étonnant que cela puisse paraître, le nom fait référence aux jeux de hasard pratiqués à MONTE CARLO. Ces méthodes connurent un développement important lors de la seconde guerre mondiale. John VON NEUMANN et Stanislaw MARCIN ULAM les utilisèrent en particulier dans le cadre de recherches sur la bombe atomique. Actuellement, elles sont de plus en plus utilisées car faciles à mettre en œuvre et de plus en plus rapides compte tenu de la puissance sans cesse croissante des machines de calcul.

J.1 Principe

Soit une fonction f et une densité de probabilité Π . On souhaite calculer l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$ non nécessairement borné du produit Πf . Le calcul de cette intégrale par méthode de MONTE CARLO peut se résumer ainsi :

$$\int_a^b \Pi(x) f(x) dx \approx \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} f(x_i) \quad (\text{J.1})$$

où \mathcal{N} est appelé nombre de tirs de MONTE CARLO et où les x_i sont choisis aléatoirement de telle sorte qu'ils vérifient la densité de probabilité Π .



Une exemple très connu d'application est celui du calcul du nombre π . Dans ce cas, le domaine d'intégration est représenté par un carré de côté 2 (noté Ω). On retient une densité de probabilité uniforme dans le carré (i.e. $\Pi(\mathbf{r}) = 1$ si $\mathbf{r} \in \Omega$, $\Pi(\mathbf{r}) = 0$ sinon). La fonction f est définie ainsi :

$$\begin{cases} f(\mathbf{r}) = 1 & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq 1, \\ f(\mathbf{r}) = 0 & \text{si } \|\mathbf{r}\| > 1. \end{cases} \quad (\text{J.2})$$

Le calcul de l'intégrale devient donc :

$$\pi \approx \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} f(\mathbf{r}_i) \quad \text{où les } \mathbf{r}_i \text{ vérifient la densité de probabilité uniforme } \Pi. \quad (\text{J.3})$$

En pratique, on tire \mathcal{N} positions uniformément réparties dans le carré Ω et on compte simplement celles qui appartiennent également au disque unité contenu dans le carré. Le ratio par rapport à \mathcal{N} donnera une estimation de π .

À noter que les méthodes de MONTE CARLO convergent lentement. En particulier, l'écart-type est en $1/\sqrt{\mathcal{N}}$.

J.2 Cas du transfert radiatif

Les méthodes de MONTE CARLO sont très utilisées en physique car en général elles reflètent la physique du système. Par exemple, dans le cas du transfert radiatif, nous allons voir qu'elles peuvent être interprétées comme le suivi de la propagation des photons dans le milieu. Elles s'apparentent donc à une marche au hasard (MODEST 1993; WALTERS et BUCKIUS 1994).

Nous souhaitons résoudre l'ETR en géométrie plane (voir Chap. I) et en particulier calculer le flux transmis. L'ETR dans ce cas en régime instationnaire s'écrit :

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z}\right) L(z, \mu, t) = -\mu_e L(z, \mu, t) + \frac{\mu_s}{2} \int_{-1}^{+1} p(\mu', \mu) L(z, \mu', t) d\mu. \quad (\text{J.4})$$

J.2.1 Flux transmis sous forme intégrale

Il est possible de montrer que dans le cas sans réflexion interne (i.e. $n_2 = 1$) le flux transmis peut se mettre sous forme intégrale de la manière suivante (ROGER 2006) :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{sort}}^+(t) = & L_{\text{inc}} \int_0^\infty d\Pi_s(s_1) \left[H(s_1 - d_1) \exp[-\mu_a d_1] H(\mu_0) \delta\left(t - \frac{d_1}{c}\right) + H(d_1 - s_1) \right. \\ & \times \int_{-1}^{+1} p(\mu_0, \mu_1) d\mu_1 \int_0^\infty d\Pi_s(s_2) \left\{ H(s_2 - d_2) \exp[-\mu_a(s_1 + d_2)] H(\mu_1) \delta\left(t - \frac{s_1 + d_2}{c}\right) \right. \\ & + H(d_2 - s_2) \int_{-1}^{+1} p(\mu_1, \mu_2) d\mu_2 \int_0^\infty d\Pi_s(s_3) \left[H(s_3 - d_3) \exp[-\mu_a(s_1 + s_2 + d_3)] \right. \\ & \left. \left. \left. \times H(\mu_2) \delta\left(t - \frac{s_1 + s_2 + d_3}{c}\right) + \dots \right] \right\} \right] \quad (\text{J.5}) \end{aligned}$$

où les grandeurs utilisées sont clarifiées sur la figure J.1. H est la fonction d'HEAVYSIDE et δ la distribution de DIRAC. Cette expression est donc constituée d'une somme de produits d'intégrales. Elle peut être interprétée de la manière suivante :

- La première intégrale représente la propagation du rayonnement sur une distance s_1 à partir de son entrée dans le milieu avant diffusion. On intègre sur l'ensemble des distances accessibles en pondérant par la probabilité de parcourir la distance s_1 sans avoir subi de diffusion de 0 à s_1 et en en subissant une entre s_1 et $s_1 + ds_1$. Elle est donnée par :

$$d\Pi_s(s_1) = \mu_s \exp[-\mu_s s_1] ds_1. \quad (\text{J.6})$$

En effet, sous les hypothèses de milieu effectif homogène (invariant par translation) et de processus aléatoires de type MARKOVIEEN (perte totale de mémoire entre chaque processus, ce qui permet la multiplication des densités de probabilité), la probabilité $\Pi_s(s_1)$ qu'un photon ne soit pas diffusé entre les abscisses 0 et s_1 est donnée par :

$$\Pi_s(s_1 + ds_1) = d\Pi'_s \times \Pi_s(s_1) \tag{J.7}$$

où $d\Pi'_{s_\nu}$ est la densité de probabilité qu'un photon ne soit pas diffusé entre les abscisses s_1 et $s_1 + ds_1$. Celle-ci se met sous la forme

$$d\Pi'_s = 1 - \mu_s ds_1 \tag{J.8}$$

ce qui donne directement $\Pi_s(s_1) = \exp[-\mu_s s_1]$.

- Ensuite, on vérifie si le rayonnement sort du milieu ou pas :
 - S'il sort (i.e. $s_1 > d_1$), on vérifie qu'il est transmis (i.e. $\mu_0 > 0$ est toujours vrai car il n'y a pas encore eu de diffusion) et on pondère par la fraction d'énergie non absorbée le long du chemin $\exp[-\mu_a d_1]$ puis on ajoute la contribution au flux en spécifiant l'instant de sortie par une distribution de DIRAC.
 - S'il ne sort pas, il est diffusé. On doit donc intégrer sur tous les angles de diffusion possibles pondérés par la probabilité que le rayonnement parte dans la direction définie par μ_1 sachant qu'il arrive dans la direction définie par μ_0 . On fait donc simplement appel à la fonction de phase $p(\mu_0, \mu_1)$. Ensuite, le rayonnement se propage sur la distance s_2 d'où l'intégrale linéique suivante. On vérifie ensuite s'il sort du milieu ou pas :
 - S'il sort (i.e. $s_2 > d_2$), on vérifie qu'il est transmis (i.e. $\mu_1 > 0$) et on pondère par la fraction d'énergie non absorbée le long du chemin $\exp[-\mu_a(s_1 + d_2)]$ puis on ajoute la contribution au flux en spécifiant l'instant de sortie par une distribution de DIRAC.
 - S'il ne sort pas, il est diffusé. Et ainsi de suite...

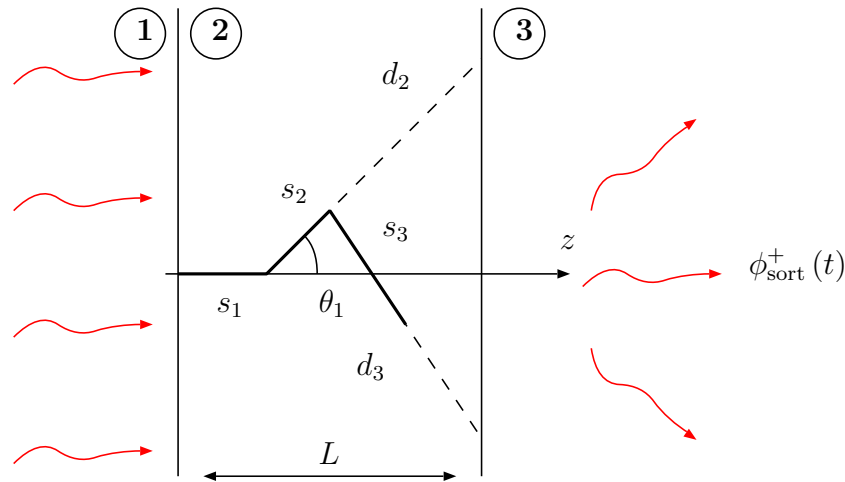


Fig. J.1 – Clarification des notations utilisées pour écrire le flux transmis sous forme intégrale dans le cas d'une géométrie plane.

J.2.2 Algorithme de Monte Carlo

Le principe du calcul d'intégrales par méthode de MONTE CARLO présenté dans la section J.1 va maintenant être appliqué au calcul du flux transmis présenté sous forme intégrale

dans la sous-section J.2.1. On va donc effectuer des tirages aléatoires. C'est à ce moment-là qu'on constate que la méthode peut être vue comme une marche au hasard. Considérons qu'on effectue \mathcal{N} tirs, on va donc suivre l'évolution de \mathcal{N} quantas d'énergie dans le milieu diffusant. Il est évident qu'un quantum ne correspond pas à un unique photon !

1. Considérons que nous souhaitons effectuer un tir dans notre milieu. La puissance surfacique disponible pour le tir sera alors :

$$E = \frac{L_{\text{inc}}}{\mathcal{N}} \quad (\text{J.9})$$

La direction de tir sera donnée par $\mu = 1$ et la position initiale du tir sera $z = 0$.

2. Nous devons ensuite rechercher la distance s_1 parcourue par le faisceau avant diffusion. En sommant la densité de probabilité $\Pi_s(s_1)$ (équation J.6), on obtient la cumulée de cette probabilité qui nous permet de déterminer s_1 à partir du nombre pseudo-aléatoire x_1 vérifiant une loi uniforme entre 0 et 1 :

$$\int_0^{s_1} d\Pi_s(s') = 1 - \exp[-\mu_s s_1] = x_1 \Rightarrow \boxed{s_1 = -\frac{1}{\mu_s} \ln(1 - x_1)} \quad (\text{J.10})$$

3. Nous avons maintenant atteint le point de diffusion. Deux cas peuvent alors se présenter :
 - Nous avons atteint une des deux parois de la couche. On peut ainsi incrémenter le flux transmis (si sortie par la droite du milieu) en prenant soin d'éliminer la part absorbée le long du chemin de longueur l :

$$\Delta\phi_{\text{sort}}^+(t) = E \exp[-\mu_a l] \delta\left(t - \frac{l}{c}\right). \quad (\text{J.11})$$

Le tir se termine ici puisqu'il n'y a pas de réflexion aux parois.

- Si on n'a pas atteint les parois, on doit tirer un angle dans la fonction de phase. La cumulée permet de déterminer μ_1 , la nouvelle direction de tir à partir d'un nombre pseudo-aléatoire x_2 vérifiant une loi uniforme entre 0 et 1 :

$$\int_{-1}^{\mu_1} \frac{p(\mu_0, \mu')}{2} d\mu' = x_2 \quad (\text{J.12})$$

La diffusion étant un phénomène neutre du point de vue énergétique, la puissance surfacique disponible ne variera pas. On doit alors continuer en recherchant une nouvelle distance avant diffusion. On repart donc à l'étape 2.

4. La décroissance de l'énergie du quantum étant exponentielle au fur et à mesure des diffusions, on peut préciser un seuil au delà duquel on considérera le quantum comme éteint, ceci afin d'accélérer l'exécution du code de calcul. Habituellement, on retient 0.1% de l'énergie surfacique disponible au départ. Quand on a atteint cette valeur, on commence un nouveau tir en repartant à l'étape 1.

Remarque : Nous avons traité l'absorption de manière déterministe en utilisant la loi d'échelle valide sur ETR (voir Sec. J.2.3)

$$\phi_{\text{sort},\mu_a}^+(t) = \phi_{\text{sort},0}^+(t) \exp[-\mu_a ct]. \quad (\text{J.13})$$

Notons qu'il est également possible de traiter cette dernière de manière stochastique tout comme l'est la diffusion. Pour cela, on considère la distance avant extinction (et non plus diffusion) selon la densité de probabilité :

$$d\Pi_e(s) = \mu_e \exp[-\mu_e s] ds. \quad (\text{J.14})$$

Ensuite, l'albédo nous renseignera sur la part de l'énergie absorbée et la part diffusée. En tirant un nombre pseudo-élatoire x suivant une loi uniforme entre 0 et 1, nous pouvons le comparer à l'albédo :

- Si $x < a$, le quantum est diffusé. On continue le tir sans absorption.
- Si $x > a$, le quantum est absorbé entièrement. On débute alors un nouveau tir.

Remarque : La prise en compte des réflexions aux interfaces se fait en multipliant l'énergie surfacique ayant atteint une interface par les coefficients de FRESNEL en énergie, en lumière non polarisée, pour l'angle et les indices considérés, en transmission (i.e. $T_{ij}(|\mu|)$) et en réflexion (i.e. $R_{ij}(|\mu|)$). Les lois de SNELL-DESCARTES renseignent ensuite sur l'angle des faisceaux réfléchis et transmis (voir Chap. I).

Tout comme pour l'absorption, on peut aussi traiter cet effet de manière stochastique en tirant un nombre pseudo-aléatoire x suivant une loi uniforme entre 0 et 1, nous pouvons le comparer à $T_{ij}(|\mu|)$:

- Si $x < T_{ij}(|\mu|)$, le quantum est entièrement transmis. On incrémente le flux transmis ou réfléchi et on débute un nouveau tir.
 - Si $x > T_{ij}(|\mu|)$, le quantum est entièrement réfléchi. On tire une nouvelle distance avant diffusion dans la direction $\mu' = -\mu$ avec toute l'énergie du quantum.
-

J.2.3 Loi d'échelle pour l'etr : une interprétation en terme de marche au hasard

Il est aisé de remarquer que dans l'ETR, il est possible de factoriser la luminance sous la forme suivante :

$$L_{\mu_a}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = L_{\mu_a=0}(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \exp[-\mu_a ct]. \quad (\text{J.15})$$

En effet, le coefficient d'absorption n'intervient qu'à un seul endroit (pertes) contrairement au coefficient de diffusion (pertes et gains).

Physiquement, on peut comprendre cette loi assez simplement par un raisonnement de type marche au hasard. En effet, si on considère une réalisation d'expérience (on envoie un pulse), les chemins empruntés par les photons sont définis et sont indépendants du niveau d'absorption par le milieu. Ceci se voit également dans l'implémentation numérique de la méthode de MONTE CARLO où les distances entre chaque diffusion et les angles de diffusion

sont indépendants de l'absorption. Considérons alors \mathcal{N} tirs, on appelle $l(n)$ la longueur du chemin parcouru par le tir n avant de s'échapper du milieu. On définit également la fonction α de la manière suivante :

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{si le tir } n \text{ est transmis,} \\ 0 & \text{si le tir } n \text{ est réfléchi.} \end{cases} \quad (\text{J.16})$$

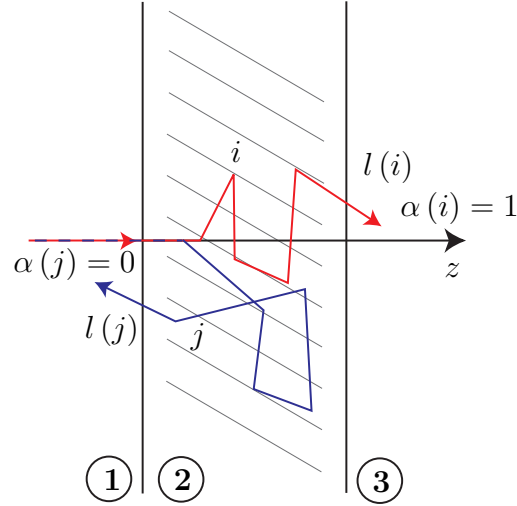


Fig. J.2 – Illustration de la définition des fonctions l et α . Le tir rouge est transmis, le tir bleu est réfléchi.

Ainsi, le flux transmis est donné par :

$$\phi_{\text{sort,ETR},\mu_a}^+(t) = \frac{E_{\text{inc}}}{\mathcal{N}} \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \delta\left(t - \frac{l(n)}{c}\right) \alpha(n) \exp[-\mu_a l(n)] \quad (\text{J.17})$$

ce qui peut donc s'écrire directement :

$$\phi_{\text{sort,ETR},\mu_a}^+(t) = \frac{E_{\text{inc}}}{\mathcal{N}} \exp[-\mu_a ct] \sum_{n=1}^{\mathcal{N}} \delta\left(t - \frac{l(n)}{c}\right) \alpha(n). \quad (\text{J.18})$$

On a alors directement la factorisation.

Annexe K

Les diverses méthodes de calcul de la fonction de corrélation temporelle du champ G_1 en régime diffusif

Nous avons choisi de regrouper dans cette annexe les différentes méthodes de calcul de la fonction de corrélation temporelle du champ G_1 en régime diffusif.

Dans ce cas, le calcul de G_1 passe habituellement par l'utilisation de la formule dite de la DWS standard :

$$\boxed{G_{1\text{standard}}(\tau) = I_0 \int_0^\infty P(s) \exp\left[-2\frac{\tau s}{\tau_0 l_{tr}}\right] ds} \quad (\text{K.1})$$

où $P(s)$ est la densité de probabilité d'avoir un chemin de longueur s , τ est le temps de corrélation, $\tau_0 = 1/(\mathcal{D}_B k^2)$ avec \mathcal{D}_B coefficient de diffusion du mouvement brownien et k vecteur d'onde et l_{tr} est la longueur de transport.

Différentes méthodes sont alors envisageables pour obtenir une version analytique et explicite de $G_{1\text{standard}}$ en utilisant le fait que $P(s)$ est donné par le flux transmis ou réfléchi calculé à partir de l'approximation de la diffusion.

Tous les résultats qui suivent sont valables en géométrie plane (voir Chap. I). Nous nous attachons tout d'abord à traiter le cas de la transmission puis celui de la réflexion.

K.1 Étude en transmission

K.1.1 Formule de Pine

Équation de diffusion

Le calcul de $P(s)$ passe par la résolution de l'équation de la diffusion donnée ci-après (sans absorption) (PINE *et al.* 1990) :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \mathcal{D}\Delta u(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{K.2})$$

où u est la densité d'énergie, \mathcal{D} est le coefficient de diffusion et $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$ est un terme source.

Dans le cas de la géométrie plane, il est placé en $z = z_s$ à l'instant $t = 0$ à l'intérieur du milieu (i.e. $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) \propto \delta(z - z_s) \delta(t)$). En effet, si on considère qu'on éclaire le milieu physiquement en $z = 0$ par une onde plane sous incidence normale, cela revient en première approximation à éclairer le milieu par un plan source isotrope placé à l'intérieur du milieu. Habituellement, on retient $z_s = l_{tr}$.

Conditions aux limites : longueur d'extrapolation z_0

Comme mentionné au chapitre III, l'application de l'approximation de la diffusion nécessite des conditions aux limites adéquates. On retient habituellement la notion de longueur d'extrapolation définie ainsi :

$$u(-z_0) = u(L + z_0) = 0. \quad (\text{K.3})$$

Deux démonstrations sont présentées dans l'annexe I, elles aboutissent à deux expressions différentes de z_0 :

$$\begin{aligned} z_0 &= 2/3l_{tr} \quad (\text{ISHIMARU 1997}), \\ z_0 &= 0.7104l_{tr} \quad \text{avec fonction de phase isotrope, sans réflexion aux pa-} \\ &\quad \text{rois (CASE et ZWEIFEL 1967)}. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation de la diffusion : formule de Pine

Dans la suite, on ne considère plus que la variable spatiale z , le problème étant invariant par translation selon x et y .

La densité de probabilité $P(s)$ d'avoir un chemin de longueur s est proportionnelle à la densité de probabilité $P(t)$ que les photons passent un temps t dans le milieu qui elle-même est proportionnelle au flux transmis $\phi_{\text{sort,diff}}^+(t)$:

$$P(s) \propto P(t) \propto \phi_{\text{sort,diff}}^+(t). \quad (\text{K.4})$$

De ce fait, la définition de la fonction de corrélation normalisée calculée en DWS standard (équation K.1) devient :

$$g_{1\text{standard}}(p) \propto \int_0^\infty \phi_{\text{sort,diff}}^+(t) \exp[-pt] dt \quad \text{avec} \quad p = \frac{2\tau c}{\tau_0 l_{tr}}. \quad (\text{K.5})$$

Si on considère que la luminance collimatée est suffisamment atténuée, le flux transmis est donné par la loi du FICK :

$$\phi_{\text{sort,diff}}^+(t) = -\mathcal{D} \frac{\partial u}{\partial z}(L, t). \quad (\text{K.6})$$

Alors :

$$g_{1\text{standard}}(p) \propto -\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(L, p) \quad \text{avec} \quad \bar{u}(z, p) = \int_0^\infty u(z, t) \exp[-pt] dt. \quad (\text{K.7})$$

Si on prend la transformée de LAPLACE de l'équation K.2, nous obtenons :

$$\mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u}(z, p) - p \bar{u}(z, p) = -\delta(z - z_s). \quad (\text{K.8})$$

La solution de cette équation se déduit ainsi :

- La solution générale sans second membre est donnée par :

$$\bar{u}_g(z, p) = \mathcal{A}(p) \cosh\left(\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} z\right) + \mathcal{B}(p) \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} z\right). \quad (\text{K.9})$$

- La solution particulière avec second membre est donnée par :

$$\bar{u}_p(z, p) = \frac{1}{2\sqrt{p\mathcal{D}}} \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} |z - z_s|\right]. \quad (\text{K.10})$$

Le calcul de cette expression passe simplement par la recherche de la fonction de GREEN. Pour cela, on passe dans le domaine de FOURIER spatial, on en déduit la transformée de FOURIER de \bar{u}_p . La méthode des résidus nous permet enfin d'obtenir directement l'expression de \bar{u}_p (voir Ann. B).

La solution complète s'écrit alors :

$$\bar{u}(z, p) = \mathcal{A}(p) \cosh\left(\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} z\right) + \mathcal{B}(p) \sinh\left(\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} z\right) + \frac{1}{2\sqrt{p\mathcal{D}}} \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\mathcal{D}}} |z - z_s|\right]. \quad (\text{K.11})$$

La détermination des constantes d'intégration \mathcal{A} et \mathcal{B} passe par l'utilisation de l'équation I.15 aux interfaces ($z = 0$ et $z = L$). Ainsi, l'expression de la fonction de corrélation est donnée par la formule de PINE sous la forme :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) = \frac{\frac{L + 2z_0}{z_s + z_0} \left\{ \sinh\left(\frac{z_s}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) + \frac{z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \cosh\left(\frac{z_s}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) \right\}}{\left(1 + \frac{6\tau}{\tau_0} \frac{z_0^2}{l_{tr}^2}\right) \sinh\left(\frac{L}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) + 2 \frac{z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \cosh\left(\frac{L}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right)} \quad (\text{K.12})$$

avec $z_0 = 2/3l_{tr}$ et $z_s = l_{tr}$.

K.1.2 Intégrale de la dws standard avec flux en approximation de la diffusion

L'objectif est de se rapprocher de la formule de PINE en résolvant entièrement l'équation de la diffusion. L'annexe H donne le calcul par méthode des images du flux transmis en approximation de la diffusion pour une tranche de milieu diffusant :

$$\phi(t) = \frac{H(t) \mathcal{D}}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{d} \sin\left(\frac{n\pi L}{d}\right) \exp\left[-\frac{n^2 \pi^2 \mathcal{D} t}{d^2}\right] \quad (\text{K.13})$$

où H est la fonction d'HEAVYSIDE et $d = L + 2z_0$.

Posons alors la variable de LAPLACE $p = 2\tau c/(\tau_0 l_{tr})$. Si on pose également $\alpha(n) = n^2 \pi^2 \mathcal{D}/d^2 = n^2 \beta$, alors le calcul de la fonction de corrélation en DWS standard passe par le calcul de :

$$I(n) = \int_0^\infty \exp[-(p + \alpha(n))t] dt = \frac{1}{p + \alpha(n)}. \quad (\text{K.14})$$

Alors la fonction de corrélation est donnée par :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) \propto \sum_{n=1}^\infty \frac{n\pi}{d} \sin\left(\frac{n\pi L}{d}\right) \frac{1}{p + n^2 \beta} \propto \sum_{n=1}^\infty \frac{n \sin(n\pi L/d)}{n^2 + p/\beta}. \quad (\text{K.15})$$

Or, nous avons la relation (GRADSHTEYN et RYZHIK 1980) :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n \sin(nx)}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \sinh[a(\pi - x)]}{2 \sinh[a\pi]} \quad \text{avec } 0 < x < 2\pi. \quad (\text{K.16})$$

La fonction de corrélation normalisée est alors donnée par :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) = \frac{L + 2z_0}{2z_0} \frac{\sinh\left[\frac{2z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right]}{\sinh\left[\frac{L + 2z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right]}. \quad (\text{K.17})$$

Nous avons retenu implicitement dans le calcul du flux $z_s = 0$. Il est à noter que nous choisissons aussi la longueur d'extrapolation $z_0 = 0.7104l_{tr}$.

K.2 Étude en réflexion

K.2.1 Formule de Pine

Tous les cas vus dans la section précédente concernant l'étude en transmission sont bien entendu applicables pour une étude en réflexion. Il suffit pour cela de remplacer le flux transmis par le flux réfléchi. En particulier, la formule de PINE devient :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) = \frac{L + 2z_0}{L - z_s + z_0} \left\{ \sinh\left(\frac{L - z_s}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) + \frac{z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \cosh\left(\frac{L - z_s}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) \right\} \frac{1}{\left(1 + \frac{6\tau}{\tau_0} \frac{z_0^2}{l_{tr}^2}\right) \sinh\left(\frac{L}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right) + 2 \frac{z_0}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \cosh\left(\frac{L}{l_{tr}} \sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}}\right)}. \quad (\text{K.18})$$

avec toujours $z_0 = 2/3l_{tr}$ et $z_s = l_{tr}$. Dans le cas où $\tau \ll \tau_0$, un développement limité de l'expression précédente donne :

$$g_{1\text{standard}}(x) = \exp(-\gamma x) \quad \text{avec } x = -\sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \ll 1 \text{ et } \gamma = \gamma_s + \gamma_0 \quad (\text{K.19})$$

où $\gamma_s = 1$ et $\gamma_0 = 2/3$, soit $\gamma = 5/3$.

K.2.2 Milieu semi-infini : intégrale de la dws standard avec flux en approximation de la diffusion

Dans le cas d'un milieu semi-infini, en suivant une nouvelle fois la méthode des images (voir Ann. H), on peut déduire simplement la forme du flux réfléchi donné par l'approximation de la diffusion. En effet, la fonction de GREEN de l'équation de la diffusion pour un milieu semi-infini est donnée par :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{(4\pi\mathcal{D}t)^3}} \exp\left[\frac{-R^2}{4\mathcal{D}t}\right] \left\{ \exp\left[-\frac{(z_s - z)^2}{4\mathcal{D}t}\right] - \exp\left[-\frac{(-z_s - 2z_0 - z)^2}{4\mathcal{D}t}\right] \right\} \quad (\text{K.20})$$

avec $R = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|$. En intégrant sur x et y , on a :

$$G(z - z_s, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z_s - z)^2}{4\mathcal{D}t}\right] - \exp\left[-\frac{(-z_s - 2z_0 - z)^2}{4\mathcal{D}t}\right] \right\}. \quad (\text{K.21})$$

La densité de probabilité d'avoir un chemin de longueur s est alors donnée par :

$$P(s) = -\frac{\mathcal{D}}{c} \frac{\partial G}{\partial z} \left(-z_s, \frac{s}{c}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi l_{tr} s^{3/2}}} \left\{ z_s \exp\left[-\frac{3z_s^2}{4sl_{tr}}\right] + (z_s + 2z_0) \exp\left[-\frac{3(z_s + 2z_0)^2}{4sl_{tr}}\right] \right\}. \quad (\text{K.22})$$

Remarque : Notons que pour un temps $t \rightarrow \infty$, le flux réfléchi en approximation de la diffusion décroît en $1/t^{3/2}$ et non de manière exponentielle. Ce régime est aussi décrit par l'ETR dans le cas d'une tranche pour un temps t donné par $t_{tr} = l_{tr}/c < t < L^2/\mathcal{D} = t_{diff}$ (i.e. régime diffusif atteint (t_{tr}) sans atteindre la deuxième paroi (t_{diff})). Au delà du temps de diffusion t_{diff} , la décroissance du flux est exponentielle.

Le calcul de l'intégrale donne alors l'expression de la fonction de corrélation dans ce cas :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) = \frac{1}{2} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \frac{z_s}{l_{tr}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \frac{z_s + 2z_0}{l_{tr}}\right) \right]. \quad (\text{K.23})$$

Il est à noter que le flux réfléchi évalué avec cette méthode est très différent de celui calculé à partir de l'ETR aux temps courts. Pour corriger cela, on peut prendre en compte un terme plus ou moins phénoménologique faisant intervenir le facteur d'anisotropie g (ROJAS-OCHOA *et al.* 2004) (voir Chap. IV) :

$$P_{\text{corr}}(s) = P(s) \left[1 - f(g) \exp\left(-\frac{s}{l_{tr}}\right) \right] \quad \text{avec} \quad f(g) = \frac{3g}{2}. \quad (\text{K.24})$$

Le calcul de la fonction de corrélation donne alors :

$$g_{1\text{standard}}(\tau) = \frac{1}{2} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \frac{z_s}{l_{tr}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{6\tau}{\tau_0}} \frac{z_s + 2z_0}{l_{tr}}\right) \right] - \frac{g}{4} \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{3(2\tau + \tau_0)}{\tau_0}} \frac{z_s}{l_{tr}}\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{3(2\tau + \tau_0)}{\tau_0}} \frac{z_s + 2z_0}{l_{tr}}\right) \right].$$

(K.25)

On utilise ici également $z_s = l_{tr}$ et $z_0 = 0.7104l_{tr}$.

Annexe L

Probabilité d'avoir un chemin de longueur s avec n événements de diffusion

Le but de cette annexe est de calculer la densité de probabilité $P(n, s)$ d'avoir n événements de diffusion sur un chemin de longueur s fixée. Ce processus suit une loi de POISSON (GOODMAN 1985). Il est intéressant de voir qu'avec uniquement trois hypothèses on peut montrer ce fait. Cela explique pourquoi on rencontre fréquemment la distribution de POISSON en physique. Dans notre cas, nous avons une hypothèse supplémentaire permettant de simplifier quelque peu le problème (processus statistiquement homogène).

Le processus de propagation qui nous intéresse ici vérifie donc les quatre hypothèses suivantes (hypothèses qu'on retrouve dans le cas de la méthode de MONTE CARLO) :

1. Le processus est sans mémoire : le nombre d'événements de diffusion sur un chemin de longueur s est statistiquement indépendant de celui sur un chemin de longueur supérieure à s .
2. Événement rare : pour Δs suffisamment petit, la probabilité d'avoir un seul événement de diffusion dans l'intervalle $[s, s + \Delta s]$ est égale au produit de Δs par une fonction réelle positive $\lambda(s)$:

$$P(1, s, s + \Delta s) = \lambda(s) \Delta s. \quad (\text{L.1})$$

3. Événement rare bis : pour Δs suffisamment petit, la probabilité qu'il y ait plus d'un événement de diffusion dans l'intervalle $[s, s + \Delta s]$ est suffisamment petit :

$$P(0, s, s + \Delta s) = 1 - \lambda(s) \Delta s. \quad (\text{L.2})$$

4. Le processus est statistiquement homogène : la différence $P(n, s + \Delta s) - P(n, s)$ ne dépend que de Δs et pas de s .

L'hypothèse 4 permet de conclure que la fonction $\lambda(s)$ est une constante. Ensuite, les hypothèses 2 et 3 donnent :

$$P(1, s, s + \Delta s) + P(0, s, s + \Delta s) = 1. \quad (\text{L.3})$$

Introduisons une nouvelle longueur σ . Entre $s + \sigma$ et $s + \sigma + \Delta s$, il y a 0 ou 1 événement de diffusion. Donc, la probabilité d'avoir n événements de diffusion dans l'intervalle $[s, s + \sigma + \Delta s]$ s'écrit :

$$P(n, s, s + \sigma + \Delta s) = P(n, s, s + \sigma) P(0, s + \sigma, s + \sigma + \Delta s) + P(n - 1, s, s + \sigma) P(1, s + \sigma, s + \sigma). \quad (\text{L.4})$$

En utilisant les relations L.1 et L.2, on a :

$$P(n, s, s + \sigma + \Delta s) = P(n, s, s + \sigma) (1 - \lambda \Delta s) + P(n - 1, s, s + \sigma) \lambda \Delta s. \quad (\text{L.5})$$

En remplaçant Δs par l'élément différentiel ds , nous obtenons l'équation différentielle :

$$\frac{dP(n, s, s + \sigma)}{ds} = \lambda [P(n - 1, s, s + \sigma) - P(n, s, s + \sigma)]. \quad (\text{L.6})$$

En utilisant la condition initiale $P(0, s, s) = 1$, il est possible de résoudre le problème par récurrence. Cela aboutit à l'expression de la probabilité $P(n, s)$:

$$P(n, s) = \frac{(\lambda s)^n}{n!} \exp[-\lambda s] \quad (\text{L.7})$$

qui s'apparente à une distribution de POISSON de paramètre λs . L'espérance mathématique de cette distribution est donnée par :

$$E[P(n, s)] = \lambda s. \quad (\text{L.8})$$

Or, le nombre moyen de diffusions subies par les photons ayant parcourus un chemin de longueur s est donné par $\langle n \rangle = s/l_s$. Ainsi $\lambda = 1/l_s$. Finalement :

$$\boxed{P(n, s) = \frac{1}{n!} \left(\frac{s}{l_s}\right)^n \exp\left[-\frac{s}{l_s}\right]}. \quad (\text{L.9})$$

Annexe M

Polarisabilité d'un atome à deux niveaux

Dans cette annexe, nous recherchons l'expression de la polarisabilité atomique $\alpha(\omega)$. Le taux d'émission fluorescente de l'atome à deux niveaux considéré est noté Γ_a . Nous allons l'exprimer en fonction du moment dipolaire par un calcul quantique, expression utilisée ensuite dans le calcul de la polarisabilité atomique. La polarisabilité relie le moment dipolaire \mathbf{p} au champ incident \mathbf{E}_0 de la manière suivante :

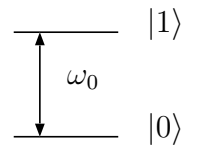
$$\mathbf{p} = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (\text{M.1})$$

Elle exprime donc quantitativement la manière dont l'onde incidente polarise l'atome, ce moment dipolaire générant ensuite une onde diffusée.

Dans un premier temps, nous calculons Γ_a puis nous utiliserons son expression ensuite pour déduire la polarisabilité.

M.1 Taux d'émission Γ_a : règle d'or de Fermi

Le calcul de la polarisabilité atomique nécessite la connaissance du taux d'émission en fonction du moment dipolaire. Celui-ci va être calculé à partir de la règle d'or de FERMI qui permet de calculer le coefficient d'EINSTEIN d'émission stimulée, expression qui nous permettra enfin de remonter au taux d'émission Γ_a (COHEN-TANNOUJJI *et al.* 1997; LOUDON 2000; GRYNBERG *et al.* 1997).



On s'intéresse à un système à deux niveaux décrit par la figure ci-contre ($|0\rangle$ est le niveau fondamental et $|1\rangle$ est le niveau excité, ω_0 la pulsation de BOHR, pulsation de transition).

M.1.1 Coefficients d'Einstein

L'équation d'évolution de la densité de population du niveau fondamental N_0 est donnée par :

$$\frac{dN_0}{dt} = -\frac{dN_1}{dt} = A_{10}N_1 - B_{01}N_0u(\omega_0) + B_{10}N_1u(\omega_0) \quad (\text{M.2})$$

où N_1 est la densité de population de l'état excité, A_{10} le coefficient d'émission spontanée, B_{01} le coefficient d'absorption, B_{10} le coefficient d'émission stimulée et $u(\omega_0)$ la densité d'énergie à la pulsation ω_0 . À noter que les coefficients d'EINSTEIN sont des quantités qui ne dépendent que de la nature de l'atome. À l'équilibre, cette relation devient :

$$A_{10}N_1 - B_{01}N_0u(\omega_0) + B_{10}N_1u(\omega_0) = 0. \quad (\text{M.3})$$

On suppose que le gaz d'atomes est classique. Les densités de population suivent donc la loi de MAXWELL-BOLTZMANN :

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{g_0 \exp[-E_0/(k_B T)]}{g_1 \exp[-E_1/(k_B T)]} = \frac{g_0}{g_1} \exp\left[\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right] \quad (\text{M.4})$$

où g_0 et g_1 sont les dégénérescences des niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ d'énergies propres E_0 et E_1 respectivement et où k_B est la constante de BOLTZMANN et T la température. Ainsi, on retrouve la loi de PLANCK pour le rayonnement du corps noir :

$$u(\omega_0) = \frac{A_{10}}{B_{01}g_0/g_1 \exp[\hbar\omega_0/(k_B T)] - B_{10}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp[\hbar\omega_0/(k_B T)] - 1}. \quad (\text{M.5})$$

Cela permet d'obtenir une relation entre les coefficients d'émission spontanée et d'émission stimulée utile pour caractériser le taux d'émission Γ_a dans la suite :

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}. \quad (\text{M.6})$$

M.1.2 Taux d'émission

Le taux d'émission Γ_a est donné par le coefficient d'EINSTEIN d'émission spontanée :

$$\Gamma_a = A_{10}. \quad (\text{M.7})$$

Dans le formalisme de première quantification (celle de la matière), la règle d'or de FERMI ne permet que de calculer le coefficient d'émission stimulée. Il est nécessaire d'utiliser le formalisme de seconde quantification (celle du champ) pour faire apparaître le phénomène d'émission spontanée. Sans aller jusque-là, nous allons calculer B_{10} puis nous utiliserons l'équation M.6 pour remonter à Γ_a .

On éclaire l'atome par une onde plane de champ électrique $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$. Pour pouvoir décrire le comportement d'un électron dans l'atome soumis à ce champ, il est nécessaire de connaître l'hamiltonien d'interaction avec l'onde. Notons \hat{H}_0 l'hamiltonien au repos (atome non perturbé) et $\hat{W}(t)$ l'hamiltonien de perturbation. Par analogie avec le cas classique, nous définissons l'opérateur moment dipolaire par :

$$\hat{\mathbf{D}} = -e\hat{\mathbf{r}}. \quad (\text{M.8})$$

De même que le potentiel d'interaction classique s'écrit $V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, en utilisant la jauge de GÖPPER-MAYER, l'hamiltonien d'interaction s'écrit :

$$\hat{W} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{M.9})$$

La méthode perturbative dépendant du temps permet d'écrire la règle d'or de FERMI qui nous renseigne sur la probabilité de transition d'un état vers un autre dans le cas d'une perturbation sinusoïdale. Pour notre système à deux niveaux et dans le cas de l'émission stimulée, on s'intéresse à la transition de l'état $|1\rangle$ à l'état $|0\rangle$ ce qui s'écrit :

$$P_{10}(t) = \frac{|W_{01}|^2}{4\hbar^2} t^2 \left| \text{sinc} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \right|^2 \quad (\text{M.10})$$

avec $P_{10}(t)$ la probabilité de transition et $W_{01}(t) = W_{01} \cos(\omega t) = \langle 0 | \hat{W}(t) | 1 \rangle$. D'où :

$$W_{01} = -\langle 0 | \hat{\mathbf{D}} | 1 \rangle \cdot \mathbf{E}_0 = -\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{E}_0. \quad (\text{M.11})$$

On s'intéresse de plus aux temps longs de telle sorte que :

$$\text{sinc}^2 \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2} \sim \frac{2\pi}{t} \delta(\omega_0 + \omega) \quad (\text{M.12})$$

et on suppose de plus que $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{u}_0$. En écrivant la densité d'énergie sous la forme $u(\omega) = \epsilon_0 E_0^2 / 2$, on obtient :

$$P_{10}(t) = u(\omega) \frac{\pi t}{\hbar^2 \epsilon_0} |\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{u}_0|^2 \delta(\omega_0 + \omega). \quad (\text{M.13})$$

Le taux de transition Q_{10} est relié à la probabilité de transition par :

$$Q_{10}(\mathbf{u}_0) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} P_{10}(t) d\omega. \quad (\text{M.14})$$

Comme $u(-\omega_0) = u(\omega_0)$, on obtient :

$$Q_{10}(\mathbf{u}_0) = u(\omega_0) \frac{\pi |\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{u}_0|^2}{\hbar^2 \epsilon_0}. \quad (\text{M.15})$$

En remarquant que $\mathbf{D}_{01} = -e \langle 1 | \mathbf{r} | 2 \rangle$, on moyenne finalement sur les directions d'incidence du champ et sur la polarisation par :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega_0 \frac{1}{2} \sum_{\text{polar}} |\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_0|^2 = \frac{r^2}{3} \quad (\text{M.16})$$

ce qui donne :

$$Q_{10} = u(\omega_0) \frac{\pi \|\mathbf{D}_{01}\|^2}{3\hbar^2 \epsilon_0} = B_{10} u(\omega_0). \quad (\text{M.17})$$

En utilisant la relation existant entre les coefficients d'émission stimulée et spontanée (équation M.6), on déduit Γ_a :

$$\Gamma_a = A_{10} = \frac{\hbar \omega_0^3}{\pi^2 c^3} B_{10} \Rightarrow \boxed{\Gamma_a = \frac{D_{01}^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}}. \quad (\text{M.18})$$

M.2 Polarisabilité atomique α : équations de Bloch optiques

Pour calculer la polarisabilité, nous partons des équations de BLOCH optiques. Elles décrivent l'évolution d'un nouvel opérateur appelé « opérateur densité ».

M.2.1 Opérateur densité $\hat{\rho}$

On considère un système quantique dans l'état $|\psi(t)\rangle = \sum c_n(t) |\psi_n\rangle$ où $\{|\psi_n\rangle\}_n$ est une base d'états propres stationnaires. La moyenne d'un opérateur \hat{A} est alors donnée par (COHEN-TANNOUJJI *et al.* 1997; LOUDON 2000; ROSENCHER 2002) :

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n,m} c_n(t) c_m^*(t) A_{nm} \quad (\text{M.19})$$

où $\{A_{nm}\}_{n,m}$ sont les éléments de la matrice A associée à \hat{A} dans la base $\{|\psi_n\rangle\}_n$. On définit alors l'opérateur densité par :

$$\hat{\rho} = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \quad (\text{M.20})$$

ce qui permet de réécrire la moyenne de l'opérateur \hat{A} sous la forme :

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr} [\rho A]. \quad (\text{M.21})$$

La fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ vérifie l'équation d'évolution de SCHRÖDINGER :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (\text{M.22})$$

En utilisant le fait que l'opérateur hamiltonien est auto-adjoint (hermitien) et en écrivant la dérivée temporelle de $\hat{\rho}$ d'après sa définition, on obtient :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (\text{M.23})$$

où $[\hat{H}, \hat{\rho}]$ désigne le commutateur de \hat{H} et $\hat{\rho}$.

Après les généralités sur l'opérateur densité, on considère de nouveau un atome à deux niveaux. La fonction d'onde d'un électron de cet atome est alors donnée par une combinaison linéaire des fonctions d'onde des deux états (COHEN-TANNOUJJI *et al.* 1996; JACKSON 2001; ROSENCHER 2002) :

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle. \quad (\text{M.24})$$

La matrice densité s'écrit alors :

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{bmatrix} |c_0|^2 & c_0 c_1^* \\ c_0^* c_1 & |c_1|^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{M.25})$$

Les termes ρ_{00} et ρ_{11} représentent les densités de probabilité que l'électron se trouve respectivement dans les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. L'électron est toujours soumis à une onde extérieure de pulsation ω . L'hamiltonien d'interaction est donné par :

$$\hat{W} = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow W = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) \\ -\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{M.26})$$

où on rappelle que $\hat{\mathbf{D}}$ est l'opérateur moment dipolaire et $\mathbf{D}_{01} = \langle 0 | \hat{\mathbf{D}} | 1 \rangle = \langle 1 | \hat{\mathbf{D}} | 0 \rangle$ supposé réel si les deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont liés. On remarquera que \mathbf{D}_{00} et \mathbf{D}_{11} sont nuls dans le cas d'un système centrosymétrique. On note \hat{H}_0 l'hamiltonien non perturbé par l'onde. Sous forme matricielle, en utilisant les énergies E_0 et E_1 des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ respectivement, il s'écrit :

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{M.27})$$

L'équation d'évolution de l'opérateur densité est alors :

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0 + \hat{W}, \rho]}_{\text{Couplage au champ extérieur}} + \underbrace{\left\{ \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right\}_{\text{relax}}}_{\text{Émission spontanée, collisions}}. \quad (\text{M.28})$$

L'électron initialement dans l'état $|1\rangle$ peut se désexciter spontanément en émettant un photon avec un taux d'émission Γ_a . Ainsi :

$$\left\{ \frac{d\rho_{00}}{dt} \right\}_{\text{relax}} = \Gamma_a \rho_{00} \quad \text{et donc} \quad \left\{ \frac{d\rho_{11}}{dt} \right\}_{\text{relax}} = -\Gamma_a \rho_{11}. \quad (\text{M.29})$$

L'émission spontanée influe aussi sur les cohérences que sont les termes croisés de la matrice densité. On pose qu'elles évoluent en :

$$\left\{ \frac{d\rho_{01}}{dt} \right\}_{\text{relax}} = -\gamma \rho_{01} \quad ; \quad \left\{ \frac{d\rho_{10}}{dt} \right\}_{\text{relax}} = -\gamma \rho_{10}. \quad (\text{M.30})$$

Ainsi, l'équation d'évolution écrite sous forme matricielle conduit à un système de quatre équations. Nous faisons ensuite l'approximation dite de l'onde tournante, c'est à dire qu'on retient $\omega \approx \omega_0$ (excitation quasi-résonante). En posant :

$$\omega_0 = \frac{E_1 - E_0}{\hbar} \quad \text{pulsation de BOHR}, \quad (\text{M.31})$$

$$\Omega_R = \frac{-\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar} \quad \text{pulsation de RABI}, \quad (\text{M.32})$$

$$\sigma_{01} = \rho_{01} \exp[-i\omega t],$$

$$\sigma_{10} = \rho_{10} \exp[i\omega t],$$

$$\sigma_{00} = \rho_{00},$$

$$\sigma_{11} = \rho_{11},$$

on aboutit aux équations de BLOCH optiques :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\sigma_{00}}{dt} &= -i\frac{\Omega_R}{2}(\sigma_{10} - \sigma_{01}) + \Gamma_a\sigma_{00} \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} &= i\frac{\Omega_R}{2}(\sigma_{10} - \sigma_{01}) - \Gamma_a\sigma_{11} \\ \frac{d\sigma_{01}}{dt} &= i(\omega_0 - \omega) - i\frac{\Omega_R}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{00}) - \gamma\sigma_{01} \\ \frac{d\sigma_{10}}{dt} &= -i(\omega_0 - \omega) + i\frac{\Omega_R}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{00}) - \gamma\sigma_{10} \end{aligned}} \quad (\text{M.33})$$

M.2.2 Polarisabilité atomique

D'après l'équation M.21, la moyenne de l'opérateur moment dipolaire est donnée par :

$$\langle \hat{\mathbf{D}} \rangle = \text{Tr}[\rho \mathbf{D}] = \mathbf{D}_{01}[\rho_{01} + \rho_{10}] \quad (\text{M.34})$$

$$= \mathbf{D}_{01}[\sigma_{01} \exp(i\omega t) + \sigma_{10} \exp(-i\omega t)]. \quad (\text{M.35})$$

La connaissance de σ_{01} et σ_{10} est apportée par la résolution des équations de BLOCH en régime stationnaire (i.e. $d/dt = 0$). On définit le paramètre de saturation s par :

$$s = \frac{\Omega_R^2/2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma_a^2/4}. \quad (\text{M.36})$$

En fait et comme le montre l'équation M.32, Ω_R^2 est proportionnelle à l'intensité incidente. Dans le cas où celle-ci tend vers l'infini, $s \rightarrow \infty$ ce qui donne $\sigma_{00} = 1/2$ et $\sigma_{11} = 1/2$. On obtient :

$$\langle \hat{\mathbf{D}} \rangle = \frac{\Omega_R \mathbf{D}_{01}}{2(1+s)} \left[\frac{(\omega - \omega_0) + i\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \exp(i\omega t) + \frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \exp(-i\omega t) \right]. \quad (\text{M.37})$$

On se place en régime non saturé $s \rightarrow 0$ et on remplace Ω_R par son expression :

$$\langle \hat{\mathbf{D}} \rangle = -\frac{\mathbf{D}_{01}(\mathbf{D}_{01} \cdot \mathbf{E}_0)}{2\hbar} \left[\frac{(\omega - \omega_0) + i\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \exp(i\omega t) + \frac{(\omega - \omega_0) - i\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \exp(-i\omega t) \right]. \quad (\text{M.38})$$

La polarisabilité α sous forme scalaire (cas d'une réponse isotrope) relie le moment dipolaire au champ par :

$$\langle \hat{\mathbf{D}} \rangle = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (\text{M.39})$$

Dans le cas non isotrope, α serait un tenseur. Par identification, on trouve α . Habituellement, on travaille en notation complexe, la polarisabilité alors est donnée par :

$$\alpha(\omega) = -\frac{D_{01}^2}{\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma}. \quad (\text{M.40})$$

En utilisant l'expression de Γ_a donnée par l'équation M.18, on obtient :

$$\boxed{\alpha(\omega) = -\frac{3\pi c^3 \Gamma_a}{\omega^3} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\gamma}} \quad (\text{M.41})$$

M.3 Théorème optique

Nous considérons ici un système quelconque ponctuel placé en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$ de polarisabilité α . Le théorème optique décrit simplement la conservation de l'énergie entre les processus d'extinction, de diffusion et d'absorption. En terme de sections efficaces σ_e (extinction), σ_s (diffusion) et σ_a (absorption), cela s'écrit :

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a, \quad (\text{M.42})$$

expression qui devient en terme de puissance $P_e = P_s + P_a$, les sections efficaces n'étant qu'une normalisation par la puissance incidente surfacique. Il est possible d'exprimer ces sections efficaces en fonction de la polarisabilité α . En particulier, cela va nous permettre de déterminer une relation vérifiée par α dans le cas de l'atome à deux niveaux étudié et ainsi d'en déduire l'expression de γ dans l'équation M.41.

Dans tout ce qui suit, on considère un atome soumis à une onde incidente \mathbf{E}_0 de pulsation ω .

M.3.1 Section efficace de diffusion

La puissance incidente par unité de surface est donnée par le module du vecteur de POYNTING¹ :

$$\|\mathbf{\Pi}\| = \left\| \frac{\mathcal{R}[\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*]}{2\mu_0} \right\| \quad (\text{M.43})$$

ce qui se réduit dans le cas d'une onde plane à :

$$\|\mathbf{\Pi}\| = \frac{\|\mathbf{E}_0\|^2}{2\mu_0 c}. \quad (\text{M.44})$$

Le moment dipolaire créé par le champ incident sur le système est donné par :

$$\mathbf{p} = \alpha(\omega) \epsilon_0 \mathbf{E}_0. \quad (\text{M.45})$$

Or, la puissance rayonnée (ou diffusée) dans le vide s'écrit :

$$P_s = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{\omega^4 |\alpha|^2 \epsilon_0}{12\pi c^3} \|\mathbf{E}_0\|^2. \quad (\text{M.46})$$

Ainsi, la section efficace de diffusion est exprimée par :

$$\sigma_s = \frac{P_s}{\|\mathbf{\Pi}\|} = \frac{k^4}{6\pi} |\alpha|^2. \quad (\text{M.47})$$

¹où \times désigne le produit vectoriel

M.3.2 Section efficace d'extinction

Notons $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_d$ le champ total comme étant égal à la somme du champ incident et du champ diffusé respectivement. La puissance absorbée par le système s'écrit :

$$P_a = \frac{1}{2} \int_V \mathcal{R} [\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}^*] d^3\mathbf{r}. \quad (\text{M.48})$$

Or $\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$ et $\mathbf{p} = \alpha(\omega)\epsilon_0\mathbf{E}_0$ ce qui donne :

$$P_a = \frac{1}{2} \mathcal{I} [\omega\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}^*] = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \mathcal{I} [\alpha(\omega) \|\mathbf{E}_0\|^2 + \alpha(\omega) \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_d]. \quad (\text{M.49})$$

Or $P_a = P_e - P_s$, ce qui donne :

$$P_e = \frac{\omega\epsilon_0}{2} \mathcal{I} [\alpha(\omega)] \|\mathbf{E}_0\|^2 \quad (\text{M.50})$$

et ainsi, la section efficace d'extinction est donnée par :

$$\sigma_e = \frac{P_e}{\|\mathbf{\Pi}\|} = k\mathcal{I} [\alpha(\omega)]. \quad (\text{M.51})$$

M.3.3 Théorème optique et expression finale de la polarisabilité atomique

Dans le cas d'un atome à deux niveaux, il n'y a pas d'absorption de l'onde incidente. Ainsi, le théorème optique se réduit-il à :

$$\sigma_e = \sigma_s \Rightarrow \boxed{k\mathcal{I} [\alpha(\omega)] = \frac{k^4}{6\pi} |\alpha|^2}. \quad (\text{M.52})$$

L'application de cette relation à l'expression de l'équation M.41 donne $\gamma = \Gamma_a/2$, expression qu'il est possible de trouver de manière quantique également. Finalement, la polarisabilité atomique d'un atome à deux niveaux s'écrit :

$$\boxed{\alpha(\omega) = -\frac{3\pi c^3 \Gamma_a}{\omega^3} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma_a/2}}. \quad (\text{M.53})$$

Remarque : Notons que la polarisabilité en scalaire est donnée par :

$$\alpha(\omega) = -\frac{2\pi c^3 \Gamma_a}{\omega^3} \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\Gamma_a/2}, \quad (\text{M.54})$$

le théorème optique s'énonçant dans ce cas :

$$k\mathcal{I} [\alpha(\omega)] = \frac{k^4}{4\pi} |\alpha|^2. \quad (\text{M.55})$$

Références

- ACKERSON, B. J., R. L. DOUGHERTY, N. M. REGUIGUI, et U. NOBBMAN (1992). Correlation transfer: Application of radiative transfer solution methods to photon correlation problems. *J. Thermophys. and Heat Transfer* 6, 577.
- ALONSO, M. (2001a, Avril). Radiometry and wide-angle wave fields. I. Coherent fields in two dimensions. *J. Opt. Soc. Am. A* 18, 902–909.
- ALONSO, M. (2001b, Avril). Radiometry and wide-angle wave fields. II. Coherent fields in three dimensions. *J. Opt. Soc. Am. A* 18, 910–918.
- ANDERSON, P. (1958). Absence of Diffusion in Certain Random Lattices. *Phys. Rev.* 109, 1492–1505.
- ANDREWS, L. C. et R. L. PHILIPS (1998). *Laser Beam Propagation through Random Media*. SPIE Press, Bellingham.
- APRESYAN, L. A. et Y. A. KRAVTSOV (1996). *Radiation Transfer - Statistical and Wave Aspects*. Gordon and Breach Publishers, Amsterdam.
- ARONSON, R. (1995, Novembre). Boundary conditions for diffusion of light. *J. Opt. Soc. Am. A* 12, 2532–2538.
- ARONSON, R. et N. CORNGOLD (1999, Mai). Photon diffusion coefficient in an absorbing medium. *J. Opt. Soc. Am. A* 16, 1066–1071.
- ATLAN, M., M. GROSS, B. C. FORGET, T. VITALIS, A. RANCILLAC, et A. K. DUNN (2006). Frequency-domain wide-field laser Doppler in vivo imaging. *Opt. Lett.* 31, 2762–2764.
- BALACHANDRAN, R. M., N. M. LAWANDY, et J. A. MOON (1997, Mars). Theory of laser action in scattering gain media. *Opt. Lett.* 22, 319–321.
- BARABANENKOV, Y. N. (1969, Octobre). On the spectral theory of radiation transport equations. *Sov. Phys. JETP* 29, 679–684.
- BARABANENKOV, Y. N. et V. M. FINKEL'BERG (1968). Radiation transport equation for correlated scatterers. *Sov. Phys. JETP* 26, 587.
- BASSANI, M., F. MARTELLI, G. ZACCANTI, et G. CONTINI (1997). Independence of the diffusion coefficient from absorption: experimental and numerical evidence. *Opt. Lett.* 22, 853–855.
- BEENAKKER, C. W. J. (1998). Thermal Radiation and Amplified Spontaneous Emission from a Random Medium. *Phys. Rev. Lett.* 81, 1929–1832.
- BEENAKKER, C. W. J., J. C. J. PAASSCHENS, et P. W. BROUWER (1996). Probability of Reflection by a Random Laser. *Phys. Rev. Lett.* 76, 1368–1371.
- BERGER, G. A., M. KEMPE, et A. Z. GENACK (1997, Novembre). Dynamics of stimulated emission from random media. *Phys. Rev. E* 56, 6118–6122.
- BERNE, B. J. et R. PECORA (1976). *Dynamic Light Scattering*. John-Wiley.

- BIZHEVA, K. K., A. M. SIEGEL, et D. A. BOAS (1998). Path-length-resolved dynamic light scattering in highly scattering random media: The transition to diffusing wave spectroscopy. *Phys. Rev. E* 58, 7664–7667.
- BLADEL, J. v. (1991). *Singular Electromagnetic Fields and Sources*. Oxford University Press.
- BLOOMFIELD, V. A. et T. K. LIM (1978). Quasi-elastic light scattering. *Meth. Enzymology*.
- BOAS, D. A., L. E. CAMPBELL, et A. G. YODH (1995). Scattering and Imaging with Diffusing Temporal Field Correlations. *Phys. Rev. Lett.* 75, 1855–1858.
- BOHREN, C. et D. HUFFMAN (1983). *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley-Interscience Publication.
- BORN, M. et E. WOLF (1999). *Principles of Optics*. Cambridge University Press.
- BROWN, R. (1828). A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Edinburgh new Philosophical Journal*, 358–371.
- BURIN, A. L., M. A. RATNER, H. CAO, et R. P. H. CHANG (2001). Model for a Random Laser. *Phys. Rev. Lett.* 87, 215503–1–215503–4.
- BURIN, A. L., M. A. RATNER, H. CAO, et S. H. CHANG (2002). Random Laser in One Dimension. *Phys. Rev. Lett.* 88, 093904–1–093904–4.
- CAI, W., M. XU, M. LAX, et R. R. ALFANO (2002, Mai). Diffusion coefficient depends on time, not on absorption. *Opt. Lett.* 27, 731–733.
- CALVO-PEREZ, O. (1999). *Diffusion des ondes électromagnétiques par un film diélectrique rugueux hétérogène. Étude expérimentale et modélisation*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- CAO, H. (2003). Lasing in random media. *Wave in Random Media* 13, R1–R39.
- CAO, H., J. Y. XU, S.-H. CHANG, et S. T. HO (2000, Février). Transition from amplified spontaneous emission to laser action in strongly scattering media. *Phys. Rev. E* 61, 1985–1989.
- CAO, H., Y. G. ZHAO, S. T. HO, E. W. SEELIG, Q. H. WANG, et R. P. H. CHANG (1999). Random Laser Action in Semiconductor Powder. *Phys. Rev. Lett.* 82, 2278–2281.
- CARMINATI, R., R. ELALOUI, et J.-J. GREFFET (2004, Mai). Beyond the Diffusion-Wave Spectroscopy Model for the Temporal Fluctuations of Scattered Light. *Phys. Rev. Lett.* 92, 213903–1–213903–4.
- CARMINATI, R., M. NIETO-VESPERINAS, et J.-J. GREFFET (1998). Reciprocity of evanescent electromagnetic waves. *J. Opt. Soc. Am. A* 15, 706–712.
- CARMINATI, R., R. PIERRAT, J. d. ROSNY, et M. FINK (2007). Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields. *Opt. Lett.* submitted.
- CARMINATI, R., J. J. SÁENZ, J.-J. GREFFET, et M. NIETO-VESPERINAS (2000). Reciprocity, unitarity, and time-reversal symmetry of the S matrix of fields containing evanescent components. *Phys. Rev. A* 62, 012712–1–012712–7.
- CASE, K. M. et P. F. ZWEIFEL (1967). *Linear Transport Theory*. Addison-Wiley, Reading, Massachusetts.
- CASSEREAU, D. et M. FINK (1992). Time-Reversal of Ultrasonic Fields-Part III: Theory of the Closed Time-Reversal Cavity. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Cont.* 39, 579–592.

- CHANCE, R. R., A. PROCK, et R. SILBEY (1974a, Avril). Lifetime of an emitted molecule near a partially reflecting surface. *J. Chem. Phys.* 60, 2744–2748.
- CHANCE, R. R., A. PROCK, et R. SILBEY (1974b, Mars). Lifetime of an excited molecule near a metal mirror: Energy transfer in the Eu^{3+} /silver system. *J. Chem. Phys.* 60, 2184–2185.
- CHANCE, R. R., A. PROCK, et R. SILBEY (1975a, Mars). Comments on the classical theory of energy transfer. *J. Chem. Phys.* 62, 2245–2253.
- CHANCE, R. R., A. PROCK, et R. SILBEY (1975b, Mars). Decay of an emitting dipole between two parallel mirrors. *J. Chem. Phys.* 62, 771–772.
- CHANDRASEKHAR, S. (1950). *Radiative Transfer*. Dover, New-York.
- CHEIKH, M., H. M. NGHIEM, D. ETTORI, E. TINET, S. AVVRILLIER, et J. M. TUALLE (2006). Time-resolved diffusing wave spectroscopy applied to dynamic heterogeneity imaging. *Opt. Lett.* 31, 2311–2313.
- COHEN-TANNOUJDI, C., B. DIU, et F. LALOË (1997). *Mécanique quantique*. Hermann, Paris.
- COHEN-TANNOUJDI, C., J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG (1987). *Photons et atomes ; introduction à l'électrodynamique quantique*. InterEditions, Paris.
- COHEN-TANNOUJDI, C., J. DUPONT-ROC, et G. GRYNBERG (1996). *Processus d'Intéraction entre Photons et Atomes*. InterEditions, Paris.
- DOUGHERTY, R. L., B. J. ACKERSON, N. M. REGUIGUI, F. DORRI-NOWKOORANI, et U. NOBBMAN (1994). Correlation transfer: Development and application. *J. Quant. Spec. Radiat. Transfer* 52, 713.
- DRAEGER, C. et M. FINK (1997). One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2D-Silicon Cavity. *Phys. Rev. Lett.* 79, 407–410.
- DRAINE, B. T. (1988, Octobre). The discrete-dipole approximation and its application to interstellar graphite grains. *Astrophys. J.* 333, 848–872.
- DREXHAGE, K. H. (1970). Influence of a dielectric interface on fluorescence decay time. *J. Lumin.* 1, 2, 693–701.
- DREXHAGE, K. H. (1974). Interaction of Light with Monomolecular Dye Lasers. *Prog. in Opt.*.
- DUBOIS, A., L. VABRE, A. C. BOCCARA, et E. BEAUREPAIRE (2002). High-resolution full-field optical coherence tomography with a Linnik microscope. 41, 805–812.
- DUNG, H. T., L. KNÖLL, et D.-G. WELSCH (2000). Spontaneous decay in the presence of dispersing and absorbing bodies: General theory and application to a spherical cavity. *Phys. Rev. A* 62, 053804.
- DURANT, S. (2003). *Propagation de la lumière en milieu aléatoire. Rôle de l'absorption, de la diffusion dépendante et du couplage surface-volume*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- DURDURAN, T., A. G. YODH, B. CHANCE, et D. A. BOAS (1997, Décembre). Does the photon-diffusion coefficient depend on absorption? *J. Opt. Soc. Am. A* 14, 3358–3365.
- DURIAN, D. J. (1995, Avril). Accuracy of diffusing-wave spectroscopy theories. *Phys. Rev. E* 51, 3350–3358.
- DURIAN, D. J. (1998, Octobre). The diffusion coefficient depends on absorption. *Opt. Lett.* 23, 1502–1504.
- DURIAN, D. J., D. A. WEITZ, et D. J. PINE (1991). Multiple Light-Scattering Probes of Foam Structure and Dynamics. 252, 686–688.

- DYSON, F. (1949a). The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynmann. *Phys. Rev.* 75, 486–502.
- DYSON, F. (1949b). The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.* 75, 1736–1755.
- DÉMIDOVITCH, B. et I. MARON (1979). *Éléments de calcul numérique*. Mir, Moscou.
- EINSTEIN, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik* 17, 549–560.
- ELALOUI, R. (2003). *Propagation du rayonnement en milieux diffusant. Étude de la transition entre régime balistique et régime diffusif et des fluctuations temporelles d'intensité*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- ELALOUI, R., R. CARMINATI, et J.-J. GREFFET (2002, Août). Time-dependant transport through scattering media: from radiative transfer to diffusion. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 4, S103–S108.
- ELALOUI, R., R. CARMINATI, et J.-J. GREFFET (2003, Avril). Definition of the diffusion coefficient in scattering and absorbing media. *J. Opt. Soc. Am. A* 20, 678–685.
- ELALOUI, R., R. CARMINATI, et J.-J. GREFFET (2004, Août). Diffusive-to-ballistic transition in dynamic light transmission through thin scattering slabs: a radiative transfer approach. *J. Opt. Soc. Am. A* 21, 1430–1437.
- FINK, M. (1997). Time reversed Acoustics. *Phys. Today* 20, 34.
- FINK, M., D. CASSEREAU, A. DERODE, C. PRADA, P. ROUX, M. TANTER, J.-L. THOMAS, et F. WU (2000). Time-reversed acoustics. *Rep. Prog. Phys.* 63, 1933.
- FLORESCU, L. et S. JOHN (2004). Photon Statistics and Coherence in Light Emission from a Random Laser. *Phys. Rev. Lett.* 93, 013602–1–013602–4.
- FRISH, U. (1967). *La propagation des ondes en milieu aléatoire et les équations stochastiques*. Institut d'Astrophysique.
- FRISH, U. (1968). *Wave Propagation in Random Media*. Volume 1. In Bharuch-Reid, editor, in Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Academic Press.
- FROUFE-PÉREZ, L. S. et R. CARMINATI (2007). Fluorescence decay rate statistics of a single molecule in a disordered cluster of nanoparticles. *Phys. Rev. A* 76, 013835.
- FURUTSU, K. et Y. YAMADA (1994, Novembre). Diffusion approximation for a dissipative random medium and the applications. *Phys. Rev. E* 50, 3634–3640.
- GAYEN, S. K. et R. R. ALFANO (1996, Juillet). Biomedical imaging techniques. *Opt. Photon. News*, 17–22.
- GOODMAN, J. W. (1985). *Statistical Optics*. Wiley, New-York.
- GOUEDARD, C., D. HUSSON, C. SAUTERET, F. AUZEL, et A. MIGUS (1993). Generation of spatially incoherent short pulses in laser-pumped neodymium stoichiometric crystals and powders. *J. Opt. Soc. Am. B* 10, 2358–2363.
- GRAAFF, R. et K. RINZEMA (2001). Practical improvements on photon diffusion theory: application to isotropic scattering. *Phys. Med. Biol.* 46, 3043–3050.
- GRAAFF, R. et J. J. TEN BOSCH (2000, Janvier). Diffusion coefficient in photon diffusion theory. *Opt. Lett.* 25, 43–45.
- GRADSHTEYN, I. S. et I. M. RYZHIK (1980). *Table of integrals, series and products*. Academic Press, New-York.
- GREFFET, J.-J. et R. CARMINATI (1997). Image formation in near-field optics. *Prog. Surf. Sci.* 56, 133–237.

- GREFFET, J.-J. et M. NIETO-VESPERINAS (1998, Octobre). Field theory for generalized bidirectionnal reflectivity: derivation of Helmholtz's reciprocity principle and Kirchhoff's law. *J. Opt. Soc. Am. A* 15, 2735–2744.
- GROSS, M., P. GOY, B. C. FORGET, M. ATLAN, F. RAMAZ, A. C. BOCCARA, et A. K. DUNN (2005). Heterodyne detection of multiply scattered monochromatic light with a multipixel detector. *Opt. Lett.* 30, 1357–1359.
- GRYNBERG, G., A. ASPECT, et C. FABRE (1997). *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique*. Ellipses, Paris.
- GUÉRIN, C. A., P. MALLETT, et A. SENTENAC (2006). Effective-medium theory for finite-size aggregates. *J. Opt. Soc. Am. A* 23, 349–358.
- HENKEL, C. (1997). *Transfert Radiatif et Transport d'atomes*. Rapport de stage post-doctoral, École Centrale Paris.
- HUANG, D., E. A. SWANSON, C. P. LIN, J. S. SCHUMAN, W. G. STINSON, W. CHANG, M. R. HEE, T. FLOTTE, K. GREGORY, C. A. PULIAFITO, et J. G. FUJIMOTO (1991, Novembre). Optical Coherence Tomography. *Science* 254, 1178–1181.
- ISHIMARU, A. (1997). *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. IEEE Press, Oxford.
- JACKSON, J. D. (2001). *Électrodynamique classique*. Dunod, Paris.
- JAILLON, F., S. E. SKIPETROV, J. LI, G. DIETSCHÉ, G. MARET, et T. GISLER (2001). Diffusing-wave spectroscopy from head-like tissue phantoms : influence of a non-scattering layer. 14, 10181–10194.
- JIAND, X. et C. M. SOUKOULIS (2000). Time Dependent Theory for Random Lasers. *Phys. Rev. Lett.* 85, 70–73.
- JOULAIN, K., R. CARMINATI, J.-P. MULET, et J.-J. GREFFET (2003). Definition and measurement of the local density of electromagnetic states close to an interface. *Phys. Rev. B* 68, 245405–1–245405–.
- KAPLAN, P. D., A. G. YODH, et D. J. PINE (1992). Diffusion and structure in dense binary suspensions. *Phys. Rev. Lett.* 68, 393–396.
- KHVOLSON, O. D. (1890). Grundzüge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes. *Bull. St. Petersburg Acad. Sci.* 33, 221–256.
- KIM, A. D. et J. C. SCHOTLAND (2006). Self-consistent scattering theory for the radiative transport equation. *J. Opt. Soc. Am. A* 23, 596–602.
- KUGA, Y. et A. ISHIMARU (1984). Retroreflectance from a Dense distribution of Spherical Particles. *J. Opt. Soc. Am. A* 1, 831–835.
- KUMAR, S., A. MAJUMDAR, et C. TIEN (1990). The differential-discrete ordinate method for solutions of the equation of radiative transfert. 112, 424–429.
- KUSCER, I. et N. J. MCCORMICK (1991). Some analytical results for radiative transfer in thick atmospheres. *Transp. Theory Stat. Phys.* 20, 351–381.
- LAGENDIJK, A., B. NIENHUIS, B. v. TIGGELEN, et P. d. VRIES (1997). Microscopic Approach to the Lorentz Cavity in Dielectrics. *Phys. Rev. Lett.* 79, 657–660.
- LAGENDIJK, A. et B. A. VAN TIGGELEN (1996). Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.* 270, 143.
- LANDAU, L. D., E. M. LIFSHITZ, et L. P. PITAEVSKII (1984). *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon, Oxford.
- LAWANDY, N. M., R. M. BALACHANDRAN, A. S. GOMES, et E. SAUVAIN (1994, Mars). Laser action in strongly scattering media. *Nature* 368, 436–438.

- LAX, M. (1952, Février). Multiple Scattering of Waves. II. The Effective Field in Dense Systems. *Phys. Rev.* *85*, 621–629.
- LEMIEUX, P.-A., M. U. VERA, et D. J. DURIAN (1998, Avril). Diffusing-light spectroscopies beyond the diffusion limit: The role of ballistic transport and anisotropic scattering. *Phys. Rev. E* *57*, 4498–4514.
- LEROSEY, G., J. DE ROSNY, A. TOURIN, et M. FINK (2007, Février). Focusing Beyond the Diffraction Limit with Far-Field Time Reversal. *Science* *315*, 1120–1122.
- LEROSEY, G., J. DE ROSNY, A. TOURIN, A. TOURIN, G. MONTALDO, et M. FINK (2004). Time Reversal of Electromagnetic Waves. *Phys. Rev. Lett.* *92*, 193904–1–193904–3.
- LESAFFRE, M., M. ATLAN, et M. GROSS (2006). Effect of the Photon's Brownian Doppler Shift on the Weak-Localization Coherent-Backscattering Cone. *Phys. Rev. Lett.* *97*, 033901.
- LETOKHOV, V. S. (1968). Generation of light by a scattering medium with a negative resonance absorption. *Sov. Phys. JETP* *26*, 835.
- LI, J., G. DIETSCHÉ, D. IFTIME, S. E. SKIPETROV, G. MARET, T. ELBERT, B. ROCKSTROH, et T. GISLER (2005). Noninvasive detection of functional brain activity with near-infrared diffusing-wave spectroscopy. *J. Biomed. Opt.* *20*, 044002.
- LITTLEJOHN, R. G. et R. WINSTON (1995, Décembre). Generalized radiance and measurement. *J. Opt. Soc. Am. A* *12*, 2736–2743.
- LORENZ, L. (1890). Lysbevaegelsen i og uden for en af plane Lysbolger belyst Kugle. *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* *6*(6), 1–62.
- LOUDON, R. (2000). *The Quantum Theory of Light*. Oxford University Press.
- LÉVÊQUE-FORT, S., J. SELB, L. POTTIER, et A. C. BOCCARA (2001). In situ local tissue characterization and imaging by backscattering acousto-optic imaging. *Opt. Commun.* *196*, 127–131.
- MACKINTOSH, F. C. et S. JOHN (1989a, Août). Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media. *Phys. Rev. B* *40*, 2383–2406.
- MACKINTOSH, F. C. et S. JOHN (1989b, Août). Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media. *Phys. Rev. B* *40*, 2383–2406.
- MALLET, P., C. A. GUÉRIN, et A. SENTENAC (2005). Maxwell-Garnett mixing rule in the presence of multiple scattering: Derivation and accuracy. *Phys. Rev. B* *72*, 014205.
- MANDEL, L. et E. WOLF (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. University Press, Cambridge.
- MANDELIS, A. (2000). Diffusion waves and their uses. *Phys. Today* *53*, 29–34.
- MARET, G. et P. E. WOLF (1987). Multiple light scattering from disordered media. The effect of Brownian motion of scatterers. *Zeitschrift für Physik B* *65*, 409–413.
- MASON, T. G. et D. A. WEITZ (1995). Optical Measurements of Frequency-Dependent Linear Viscoelastic Moduli of Complex Fluids. *Phys. Rev. Lett.* *74*, 1250–1253.
- METROPOLIS, N., A. W. ROSENBLUTH, M. N. ROSENBLUTH, A. H. TELLER, et E. TELLER (1953). Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.* *21*, 1087–1092.
- MIE, G. (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Ann. Phys. Leipzig* *25*, 377–445.
- MILNER, V. et A. Z. GENACK (2005). Photon Localization Laser: Low-Threshold Lasing in a Random Amplifying Layered Medium via Wave Localization. *Phys. Rev. Lett.* *94*, 073901–1–073901–4.

- MITCHELL, A. R. (1969). *Computational methods in partial differential equations*. John Wiley & Sons, London.
- MITCHELL, A. R. et D. F. GRIFFITHS (1980). *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley & Sons, New-York.
- MODEST, M. F. (1993). *Radiative Heat Transfer*. McGraw-Hill.
- MORICE, O., Y. CASTIN, et J. DALIBARD (1995). Refractive index of a dilute Bose gas. *Phys. Rev. A* 51, 3896–3901.
- MORSE, P. M. et H. FESHBACH (1953). *Methods of theoretical physics*. Mc Graw-Hill, New-York.
- MUJUMDAR, S., M. RICCI, R. TORRE, et D. S. WIERSMA (2004, Juillet). Amplified Extended Modes in Random Lasers. *Phys. Rev. Lett.* 93, 053903–1–053903–4.
- NGHIEM, H. L. (2005). *Mise en œuvre et calibration d’une méthode interférométrique à balayage spectral pour la mesure résolue dans le temps de la lumière diffuse*. Thèse de doctorat, Université de Paris XIII.
- NIETO-VESPERINAS, M. (1991). *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. Wiley.
- NOGINOV, M. A. (2005). *Solid-State Random Lasers*. Springer, Berlin.
- NOGINOV, M. A., I. N. FOWLKES, G. ZHU, et J. NOVAK (2004, Octobre). Random laser thresholds in cw and pulsed regimes. *Phys. Rev. A* 70, 043811–1–043811–5.
- NOGINOV, M. A., J. NOVAK, D. GRIGSBY, et L. DEYCH (2006). Applicability of the diffusion model to random lasers with non-resonant feedback. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 8, S285–S295.
- NOGINOV, M. A., J. NOVAK, et S. WILLIAMS (2004, Décembre). Modeling of photon density dynamics in random lasers. *Phys. Rev. A* 70, 063810–1–063810–5.
- NOVOTNY, L. et B. HECHT (2006). *Principle of Nano-Optics*. Cambridge University Press.
- PATRA, M. (2003). Decay rate distributions of disordered slabs and application to random lasers. *Phys. Rev. E* 67, 016603–1–016603–10.
- PEDERSEN, H. M. (1991a, Janvier). Exact geometrical theory of free-space radiative energy transfer. *J. Opt. Soc. Am. A* 8, 176–185.
- PEDERSEN, H. M. (1991b, Septembre). Exact geometrical theory of free-space radiative energy transfer: errata. *J. Opt. Soc. Am. A* 8, 1518–1518.
- PERCUS, J. et G. YEVICK (1958). Analysis of Classical Statistical Mechanics by Means of collective Coordinates. *Phys. Rev.* 110, 1–13.
- PIERRAT, R., N. BEN BRAHAM, SCHEFFOLD. F., et R. CARMINATI (2006). Diffusing-wave spectroscopy beyond the diffusive regime: The influence of short light paths and anisotropic scattering. *Proc. SPIE 6191*, 619116–1–619116–7.
- PIERRAT, R., N. BEN BRAHAM, L. F. ROJAS-OCHOA, SCHEFFOLD. F., et R. CARMINATI (2007). The influence of the scattering anisotropy parameter on diffuse reflection of light. *Opt. Commun. accepted*.
- PIERRAT, R. et R. CARMINATI (2007). Threshold of random lasers in the incoherent transport regime. *Phys. Rev. A* 76, 023821.
- PIERRAT, R., J.-J. GREFFET, et R. CARMINATI (2006, Mai). Photon diffusion coefficient in scattering and absorbing media. *J. Opt. Soc. Am. A* 23, 1106–1110.
- PIERRAT, R., J.-J. GREFFET, R. ELALOUI, et R. CARMINATI (2005, Novembre). Spatial coherence in strongly scattering media. *J. Opt. Soc. Am. A* 22, 2329.

- PINE, D. J., D. A. WEITZ, P. M. CHAIKIN, et E. HERBOLZHEIMER (1988, Mars). Diffusing-Wave Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.* *60*, 1134–1137.
- PINE, D. J., J. X. WEITZ, J. X. ZHU, et E. HERBOLZHEIMER (1990, Septembre). Diffusing-wave spectroscopy: dynamic light scattering in the multiple scattering limit. *J. Phys.* *51*, 2101–2127.
- PINHEIRO, F. A. et L. C. SAMPAIO (2006). Lasing threshold of diffusive random lasers in three dimensions. *Phys. Rev. A* *73*, 013826–1–013826–4.
- POLSON, R. C. et Z. V. VARDENY (2004, Août). Random lasing in human tissues. *App. Phys. Lett.* *85*, 1289–1291.
- POLSON, R. C. et Z. V. VARDENY (2005). Organic random lasers in the weak-scattering regime. *Phys. Rev. B* *71*, 045205–1–045205–5.
- PONOMARENKO, S. A., J.-J. GREFFET, et E. WOLF (2002, Juillet). The diffusion of partially coherent beams in turbulent media. *Opt. Commun.* *208*, 1–8.
- POPESCU, G. et A. DOGARIU (2001). Dynamic Light Scattering in Subdiffusive Regimes. *40*, 4215–4221.
- PRASAD, B. R., H. RAMACHANDRAN, A. K. SOOD, C. K. SUBRAMANIAN, et N. KUMAR (1997). Lasing in active, sub-mean-free path-sized systems with dense, random, weak scatterers. *36*, 7718–7724.
- PURCELL, E. M. (1946). Spontaneous emission probabilities at radio frequencies. *Phys. Rev.* *69*, 681.
- RAHMANI, A. (1998). *Électrodynamique en espace confiné. Fluorescence en Optique de Champ proche*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- RAHMANI, A., P. C. CHAUMET, et G. W. BRYANT (2002). Local-field correction for an interstitial impurity in a crystal. *Opt. Lett.* *27*, 430.
- RIPOLL, J., D. YESSAYAN, G. ZACHARAKIS, et V. NTZIACHRISTOS (2005, Mars). Experimental determination of photon propagation in highly absorbing and scattering media. *J. Opt. Soc. Am. A* *22*, 546–551.
- ROGER, M. (2006). *Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de MONTE CARLO : illustrations en transfert radiatif*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- ROJAS-OCHOA, L. F., D. LACOSTE, R. LENKE, P. SCHURTENBERGER, et F. SCHEFFOLD (2004, Septembre). Depolarization of backscattered linearly polarized light. *J. Opt. Soc. Am. A* *21*, 1799–1804.
- ROSENCHER, E. (2002). *Optoélectronique*. Dunod, Paris.
- ROSNY, J. d. et M. FINK (2002). Overcoming the Diffraction Limit in Wave Physics Using a Time-Reversal Mirror and a Novel Acoustic Sink. *Phys. Rev. Lett.* *89*, 124301–1–124301–4.
- ROSSUM, M. C. W. et T. M. NIEUWENHUIZEN (1999). Multiple scattering of classical waves: microscopy, mesoscopy and diffusion. *71*, 313–371.
- ROUX, L. (1996). *Étude numérique de la diffusion multiple dans les milieux aléatoires. Modèle de transfert radiatif et électromagnétique*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- ROUX, L., P. MARESCHAL, N. VUKADINOVIC, J.-B. THIBAUD, et J.-J. GREFFET (2001, Février). Scattering by a slab containing randomly located cylinders: comparison between radiative transfer and electromagnetic simulation. *J. Opt. Soc. Am. A* *18*, 374–384.

- RUBINSTEIN, R. (1981). *Simulation and the MONTE CARLO Method*. Wiley-Interscience.
- RYTOV, S. M., Y. A. KRAVTSOV, et V. I. TATARSKII (1989). *Principles of Statistical Radiophysics*, Volume 4. Springer-Verlag, Berlin.
- RYZHIK, L., G. PAPANICOLAOU, et J. B. KELLER (1996). Transport equations for elastic and other waves in random media. *Wave Motion* 24, 327–370.
- SCHEFFOLD, F., W. HARTK, G. MARET, et E. MATIJEVIC (1998). Observation of long-range correlations in temporal intensity fluctuations of light. *Phys. Rev. B* 56, 10942–10952.
- SCHEFFOLD, F. et P. SCHURTENBERGER (2003). Light Scattering Probes of Viscoelastic Fluids and Solids. *Soft Materials* 1, 139–165.
- SCHEFFOLD, F., S. E. SKIPETROV, S. ROMER, et P. SCHURTENBERGER (2001). Diffusing-wave spectroscopy of nonergodic media. *Phys. Rev. E* 63, 061404–1–061404–11.
- SCHUSTER, A. (1905). Radiation through a foggy atmosphere. *Astrophys. J.* 21, 1–22.
- SEBBAH, P. (2001). *Waves and Imaging through Complex Media*. Kluwer Academic, Dordrecht.
- SEDLITSKII, A. M. (2000). *Fourier Transforms and Approximations*. Gordon & Breach.
- SELB, J., S. LÉVÊQUE-FORT, L. POTTIER, et A. C. BOCCARA (2001). 3D acousto-optic modulated-speckle imaging in biological tissues. *Compte-rendus de l'Académie des Sciences, Série IV, Physique, Astrophysique* 2, 1213–1225.
- SHAPIRO, B. (1999). New Type of Intensity Correlation in Random Media. *Phys. Rev. Lett.* 83, 4733–4735.
- SHENG, P. (1995). *Introduction of Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*. Academic, San Diego.
- SIROVITCH, L. (1971). *Techniques of Asymptotic Analysis*. Springer-Verlag.
- SMIRNOV, V. (1981). *Cours de Mathématiques Supérieures*. Mir, Moscou.
- SOEST, G. v. (2001). *Experiments on random Lasers*. Thèse de doctorat, Amsterdam University.
- SOEST, G. v., F. J. POELWIJK, R. SPIRIK, et A. LAGENDIJK (2001, Février). Dynamics of a Random Laser above Threshold. *Phys. Rev. Lett.* 86, 1522–1525.
- TAI, C.-T. (1993). *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*. IEEE Press, New-York.
- TAINÉ, J. et J.-P. PETIT (2003). *Transferts thermiques*. Dunod, 3^{ème} édition, Paris.
- TATARSKII, V. I. (1971). *Effects of the turbulent atmosphere on wave propagation*. US Dept. of Commerce, Washington, DC.
- THOMAS, G. E. et K. STAMNES (1999). *Radiative Transfer in the Atmosphere and Ocean*. University Press, Cambridge.
- THOMAS, M. (2004). *Fluorescence d'une molécule unique au voisinage d'une nanostructure métallique et étude de systèmes résonants pour la plasmonique dans le domaine visible et infrarouge*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris.
- TIGGELEN, B. v., A. LAGENDIJK, et A. TIP (1990). Multiple-scattering effects for the propagation of light in 3D slabs. *J. Phys.: Condens. Matter* 2, 7653–7677.
- TIGGELEN, B. v. et S. E. SKIPETROV (2006, Avril). Fluctuations of local density of states and c_0 speckle correlations are equal. *Phys. Rev. E* 73, 045601(R).
- TOTSUKA, K., G. v. SOEST, T. ITO, A. LAGENDIJK, et M. TOMITA (2000, Juin). Amplification and diffusion of spontaneous emission in strongly scattering medium. *J. Appl. Phys.* 87, 7623–7628.

- TSANG, L., J. KONG, et R. SHIN (1985). *Theory of Microwave Remote Sensing*. Wiley Series in Remote Sensing.
- TUALLE, J.-M. (1996). *Réflectance résolue dans le temps et dans l'espace appliquée à l'étude des propriétés optiques de milieux diffusants*. Thèse de doctorat, Université Paris Nord.
- TUALLE, J. M., H. L. NGHIEM, M. CHEIKH, D. ETTORI, E. TINET, et S. AVRILLIER (2006). Time-resolved diffusing wave spectroscopy beyond 300 transport mean free paths. *J. Opt. Soc. Am. A* *23*, 1452–1457.
- VAN ALBADA, M. et A. LAGENDIJK (1985). Observation of Weak Localization of Light in a Random medium. *Phys. Rev. Lett.* *55*, 2692–2695.
- VAN DE HULST, H. C. (1981). *Light Scattering by Small Particles*. Dover, New-York.
- VANNESTE, C. et P. SEBBAH (2001). Selective Excitation of Localized Modes in Active Random Media. *Phys. Rev. Lett.* *87*, 183903–1–183903–4.
- VANNESTE, C., P. SEBBAH, et H. CAO (2007). Lasing with Resonant Feedback in Weakly Scattering Random Systems. *Phys. Rev. Lett.* *98*, 143902–1–143902–4.
- VENTSEL, H. (1973). *Théorie des probabilités*. Mir, Moscou.
- WALTERS, D. V. et R. O. BUCKIUS (1994). MONTE CARLO methods for radiative heat transfer in scattering media. *Annual Reviews of Heat Transfer* *5*, 131–176.
- WALTHER, A. (1968). Radiometry and coherence. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1256–1259.
- WAX, A., C. YANG, R. DASARI, et M. FELD (2001). Path-Length-Resolved Dynamic Light Scattering: Modeling the Transition From Single to Diffusive Scattering. *40*, 4222–4227.
- WEBER, B., C. BURGER, M. T. WYSS, v. G. K. SCHULTHESS, F. SCHEFFOLD, et A. BUCK (2004). Optical imaging of the spatiotemporal dynamics of cerebral blood flow and oxidative metabolism in the rat barrel cortex. *Eur. J. Neuroscience* *20*, 2664–2670.
- WERTHEIM, M. (1963). Exact Solution of the Percus-Yevick Integral Equation for Hard Spheres. *Phys. Rev. Lett.* *10*, 321–323.
- WIERSMA, D. S. et S. CAVALIERI (2001). Light emission: A temperature-tunable random laser. *Nature* *414*, 708–709.
- WIERSMA, D. S. et A. LAGENDIJK (1996, Octobre). Light Diffusion with gain and random lasers. *Phys. Rev. E* *54*, 4256–4265.
- WINSTON, R. et R. G. LITTLEJOHN (1997). Measuring the instrument function of radiometers. *J. Opt. Soc. Am. A* *14*, 3099–3101.
- WOLF, E. (1994, Décembre). Radiometric model for propagation of coherence. *Opt. Lett.* *19*, 2024–2026.
- WOLF, K. B., M. ALONSO, et G. W. FORBES (1999, Octobre). Wigner functions for Helmholtz wave fields. *J. Opt. Soc. Am. A* *16*, 2476–2487.
- WOLF, P.-E. et G. MARET (1985). Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media. *Phys. Rev. Lett.* *55*, 2696–2699.
- WU, X., A. YAMILOV, A. A. CHABANOV, A. A. ASATRYAN, L. C. BOTTEN, et H. CAO (2006). Random lasing in weakly scattering systems. *Phys. Rev. A* *74*, 053812–1–053812–11.
- YAGHJIAN, A. D. (1980, Février). Electric Dyadic GREEN's Functions in the Source Region. *Proceedings of the IEEE* *68*, 248–263.

- YODH, A. et B. CHANCE (1995). Spectroscopy and imaging with diffusion light. *Phys. Today* 48(3), 34–40.
- YODH, A. G., P. D. KAPLAN, et D. J. PINE (1990). Pulsed diffusing-wave spectroscopy: High resolution through nonlinear optical gating. *Phys. Rev. B* 42, 4744–4747.
- ZACHARAKIS, G., N. A. PAPADOGIANNIS, G. FILIPPIDIS, et T. G. PAPAZOGLU (2000). Photon statistics of laserlike emission from polymeric scattering gain media. *Opt. Lett.* 25, 923–925.
- ZAKHAROV, P., F. CARDINAUX, et F. SCHEFFOLD (2006). Multispeckle diffusing-wave spectroscopy with a single-mode detection scheme. *Phys. Rev. E* 73, 011413.
- ZHU, J. X., D. J. PINE, et D. A. WEITZ (1991). Internal reflection of diffusive light in random media. *Phys. Rev. A* 44, 3948–3959.