



Institut **Langevin**  
ONDES ET IMAGES

ESPCI  **PARIS**

Thèse de doctorat de l'Université Sorbonne Paris Cité  
Préparée à l'Université Paris Diderot

*Spécialité : "Acoustique Physique"*

*présentée par*

**Benoît Gérardin**

Manipulation et contrôle d'ondes élastiques  
guidées en milieux complexes

Directeurs de thèse : **Claire Prada** et **Arnaud Derode**  
Encadrant de thèse : **Alexandre Aubry**

*Soutenue le Jeudi 10 novembre 2016*

*devant le jury composé de :*

<b>M. Fabrice Mortessagne,</b>	Directeur de recherche CNRS, Nice	Président
<b>M. Vincent Pagneux,</b>	Directeur de recherche CNRS, Le Mans	Rapporteur
<b>M. Philippe Roux,</b>	Directeur de recherche CNRS, Grenoble	Rapporteur
<b>M. Todd W. Murray,</b>	Associate Professor, University of Colorado	Examineur
<b>M. Olivier Poncelet,</b>	Chargé de recherche CNRS, Bordeaux	Examineur
<b>M. Patrick Sebbah,</b>	Directeur de recherche CNRS, Paris	Examineur
<b>M. Arnaud Derode,</b>	Professeur à l'Université Denis Diderot, Paris	Directeur de thèse
<b>Mme. Claire Prada,</b>	Directrice de recherche CNRS, Paris	Directrice de thèse
<b>M. Alexandre Aubry,</b>	Chargé de recherche CNRS, Paris	Invité
<b>M. Sylvain Gransart,</b>	Responsable DGA IP/MCM/PMA, Paris	Invité



Except where otherwise noted, this work is licensed under  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>



---

## Remerciements

---

L'écriture de ces remerciements vient conclure un travail de trois années, réalisé à l'Institut Langevin. Je tiens à en remercier tous les membres qui ont, plus ou moins directement, contribué à ce dernier. Je remercie également la Direction Générale de l'Armement pour le financement qui m'a été octroyé.

Mes premiers remerciements personnels s'adressent naturellement à Alexandre Aubry. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordé et pour la qualité de son encadrement. Je remercie chaleureusement Claire Prada pour toute l'aide qu'elle m'a apporté, pour sa disponibilité et son soutien. Je remercie Arnaud Derode, qui a complété cet encadrement. La justesse de ses remarques et la finesse de son humour ont su éclairer nos différentes réunions de travail. Enfin, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'égard de Jérôme Laurent dont le savoir-faire et l'enthousiasme ont rendu possible chacune des démonstrations expérimentales de cette thèse.

Je remercie également les différentes personnes avec lesquelles j'ai eu l'occasion de collaborer plus ponctuellement : Stefan Rotter et Philipp Ambichl de l'université de Vienne mais aussi les différents stagiaires, Samuel Métais, Wei Guo et François Legendre à qui j'adresse mes vœux de réussite pour la suite.

Je veux exprimer ma gratitude envers MM. Vincent Pagneux et Philippe Roux d'avoir bien voulu consacrer du temps à l'examen de mon travail. Je tiens à remercier sincèrement MM. Fabrice Mortessagne, Todd Murray, Olivier Poncelet, Patrick Sebbah et Sylvain Gransart de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury ; je suis particulièrement gré à M. Murray de s'être déplacé du Colorado pour la circonstance.

Je ne saurais oublier l'ensemble des amis qui ont fait le quotidien de ces dernières années. Merci à ceux rencontrés à l'ESPCI, à Cambridge, en thèse ou au gré de nos pérégrinations sur les terrains d'Île-de-France.

Je remercie la part châteleraudaise de ma famille pour son accueil. Je remercie enfin tout particulièrement mes parents et l'ensemble de ma fratrie d'avoir fait du *petit mazel* un repère hors du temps.

Je conclus en remerciant Marine envers qui cette courte page ne suffirait pas à exprimer toute ma reconnaissance. Merci Marine pour ton amitié, ta complicité et ta bienveillance. Merci pour les souvenirs passés et à venir.



<b>Introduction générale</b>		<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Contrôle des canaux de propagation en milieux complexes</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Approche matricielle de la propagation en milieux complexes</b>	<b>7</b>
1.1	Propagation des ondes en milieux complexes . . . . .	9
1.1.1	Introduction . . . . .	9
1.1.2	Description classique : de l'équation de transfert radiatif à l'approximation de la diffusion . . . . .	10
1.1.3	Limites de la description classique, effets d'interférences . . . . .	17
1.2	Contrôle cohérent du front d'onde . . . . .	19
1.2.1	Figure de tavelure, degrés de libertés spatio-temporels . . . . .	19
1.2.2	Focalisation à travers les milieux diffusants par optimisation du champ incident . . . . .	19
1.2.3	Retournement temporel des ondes acoustiques . . . . .	20
1.3	Approche matricielle de la propagation des ondes . . . . .	22
1.3.1	Principe . . . . .	22
1.3.2	Matrice de propagation dans les milieux faiblement diffusants - application à la détection de cibles et à la focalisation . . . . .	23
1.3.3	Matrice de propagation dans les milieux diffusants . . . . .	23
1.4	Objectifs . . . . .	24
	Références bibliographiques . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Canaux ouverts et fermés en milieux diffusants</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	31
2.2	Transport de l'énergie à travers un milieu diffusant . . . . .	31
2.2.1	Matrice de diffusion ( <i>Scattering Matrix</i> ) . . . . .	32
2.2.2	Canaux propres de diffusion . . . . .	33
2.2.3	Conductance, régimes de transport . . . . .	33
2.2.4	Loi bimodale, canaux ouverts / fermés . . . . .	34
2.3	Système physique étudié . . . . .	36
2.3.1	Description et motivations . . . . .	36
2.3.2	Géométrie du système . . . . .	37
2.3.3	Méthodes expérimentales . . . . .	37

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.4	Mesure de la matrice $\mathbf{S}$ en milieu diffusant . . . . .	38
2.4.1	Acquisition expérimentale de la matrice $\mathbf{S}$ . . . . .	39
2.4.2	Matrice $\mathbf{S}$ obtenue expérimentalement . . . . .	40
2.4.3	Unitarité de la matrice $\mathbf{S}$ . . . . .	41
2.4.4	Origines et amplitudes des différentes sources de bruit expérimental . . . . .	42
2.4.5	Correction des effets du bruit expérimental : normalisation de la matrice $\mathbf{S}$ . . . . .	44
2.5	Réflexion et transmission totale d'une onde à travers un milieu diffusant . . . . .	44
2.5.1	Estimation de la conductance et du régime de transport . . . . .	44
2.5.2	Estimation de la densité de probabilité des valeurs propres en transmission . . . . .	44
2.5.3	Champ associé aux canaux de diffusion . . . . .	46
2.5.4	Normalisation de la matrice $\mathbf{S}$ , comment retrouver les canaux ouverts malgré le bruit expérimental ? . . . . .	49
2.6	Conséquences du caractère bimodal de l'opérateur de propagation . . . . .	52
2.6.1	Focalisation à travers un milieu diffusant . . . . .	52
2.6.2	Transfert d'information . . . . .	53
2.7	Conclusion et perspectives . . . . .	55
2.A	Annexe . . . . .	56
2.A.1	Décomposition de la matrice $\mathbf{S}$ dans la base des modes propres du guide . . . . .	56
	Références bibliographiques . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Canaux cohérents en milieux réverbérants</b> . . . . .	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Construction de canaux <i>particulaires</i> dans des milieux complexes . . . . .	66
3.2.1	Matrice de diffusion associée à une cavité . . . . .	66
3.2.2	Loi bimodale, canaux ouverts / fermés . . . . .	67
3.2.3	Canaux <i>particulaires</i> au sein d'une cavité . . . . .	68
3.3	Canaux <i>particulaires</i> dans une cavité régulière . . . . .	70
3.3.1	Description de l'étude expérimentale . . . . .	70
3.3.2	Etude de l'opérateur de diffusion associé à la cavité régulière . . . . .	71
3.3.3	Canaux <i>particulaires</i> associés à la cavité régulière . . . . .	74
3.4	Canaux <i>particulaires</i> dans un milieu multi-cibles . . . . .	80
3.4.1	Description de l'étude expérimentale . . . . .	80
3.4.2	Canaux <i>particulaires</i> en transmission . . . . .	80
3.4.3	Canaux <i>particulaires</i> en réflexion . . . . .	84
3.5	Discussion . . . . .	86
3.5.1	Comparaison des canaux <i>particulaires</i> avec les <i>modes principaux</i> des fibres optiques multimodes . . . . .	87
3.5.2	Mise en perspective . . . . .	87
3.5.3	Applications pratiques . . . . .	88
3.6	Conclusion . . . . .	89
	Références bibliographiques . . . . .	90
<b>II</b>	<b>Contrôle du milieu de propagation des ondes élastiques</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>4</b>	<b>Réfraction et réflexion négative</b> . . . . .	<b>95</b>
4.1	Milieux à indices négatifs . . . . .	97
4.1.1	Propagation dans les matériaux à indice négatif . . . . .	97

4.1.2	Réfraction négative . . . . .	98
4.1.3	Réflexion négative . . . . .	99
4.1.4	Analogie entre la propagation dans un milieu à indice négatif et la conjugaison de phase . . . . .	101
4.2	Conjugaison de phase passive par réflexion négative . . . . .	101
4.2.1	Conjugaison de phase dans les milieux complexes . . . . .	102
4.2.2	Conjugaison de phase passive par réflexion négative . . . . .	102
4.3	Concept de <i>milieux complémentaires</i> . . . . .	104
4.3.1	Milieux d'incidences complémentaires . . . . .	104
4.3.2	Double coin parfait . . . . .	104
4.4	Réalisation expérimentale . . . . .	106
4.4.1	Ondes électromagnétiques . . . . .	106
4.4.2	Ondes acoustiques et élastiques . . . . .	107
4.4.3	Stratégie alternative : modes de Lamb <i>rétrogrades</i> . . . . .	108
4.5	Objectifs . . . . .	109
	Références bibliographiques . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Réflexion négative des ondes de Lamb</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	117
5.2	Étude théorique de la réflexion négative d'une onde de Lamb sur un bord libre . . . . .	117
5.2.1	Rappels sur les ondes élastiques dans les plaques isotropes . . . . .	118
5.2.2	Interaction d'un mode de Lamb avec le bord libre d'une plaque . . . . .	123
5.2.3	Application aux modes symétriques dans une plaque de Duralumin . . . . .	124
5.3	Démonstration expérimentale d'un miroir plan focalisant . . . . .	126
5.3.1	Miroir plan focalisant en amont . . . . .	126
5.3.2	Miroir plan focalisant en aval . . . . .	131
5.4	Démonstration expérimentale de la conjugaison de phase passive . . . . .	133
5.4.1	Sur le bord libre d'une plaque élastique . . . . .	134
5.4.2	Sur les parois d'une cavité . . . . .	136
5.4.3	Sur un nuage de diffuseur . . . . .	139
5.5	Conclusions, perspectives . . . . .	140
5.A	Annexes . . . . .	142
5.A.1	Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion . . . . .	142
5.A.2	Génération sélective du mode $S_1$ . . . . .	144
	Références bibliographiques . . . . .	145
<b>6</b>	<b>Réfraction négative des ondes de Lamb et milieux complémentaires</b>	<b>147</b>
6.1	Introduction . . . . .	149
6.2	Réfraction négative d'une onde de Lamb à une discontinuité d'épaisseur . . . . .	149
6.2.1	Détermination semi-analytique des coefficients de transmission . . . . .	149
6.2.2	Application à une discontinuité d'épaisseur d'une plaque de Duralumin . . . . .	151
6.3	Étude expérimentale des <i>milieux complémentaires</i> . . . . .	153
6.3.1	Piégeage des ondes : <i>Double coin</i> . . . . .	154
6.3.2	Annulation de la propagation des ondes . . . . .	159
6.3.3	Camouflage . . . . .	160
6.4	Conclusions, perspectives . . . . .	161
6.A	Annexes . . . . .	163
6.A.1	Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion et de transmission . . . . .	163

## TABLE DES MATIÈRES

---

6.A.2 Simulation de la propagation des ondes élastiques . . . . .	163
6.A.3 Décomposition modale . . . . .	164
Références bibliographiques . . . . .	166
<b>Conclusion générale</b>	<b>167</b>



---

## Introduction générale

---

Quelle que soit leur nature et le milieu de propagation traversé, le contrôle de la propagation des ondes présente un intérêt fondamental. Il peut s'exercer à différentes fins, telles que l'optimisation du transport de l'énergie associée, le choix du chemin de propagation désiré, ou encore leur focalisation en un point de l'espace.

Ces questions trouvent un intérêt pratique du fait de la diversité des ondes et de leur place dans notre quotidien. Le contrôle de la propagation des ondes acoustiques a, par exemple, permis le développement d'applications médicales, du diagnostic à la thérapie. En optique, le contrôle de la propagation de la lumière a permis l'émergence de la photonique. Plus récemment, les techniques de contrôle du front d'onde ont été la source de nouvelles avancées dans les domaines de l'imagerie ou du photovoltaïque. En électromagnétisme, l'optimisation locale du champ est particulièrement intéressante pour les télécommunications sans fil. Enfin, les ondes élastiques présentent un intérêt majeur pour le développement d'applications industrielles dans le domaine du contrôle non destructif ou pour le développement de capteurs ou autres actionneurs.

Ces différents exemples mettent en évidence deux stratégies distinctes afin de parvenir au contrôle de la propagation des ondes. D'une part, on peut tirer profit de la complexité du milieu pour manipuler les ondes en contrôlant le front d'onde incident de manière cohérente. D'autre part, on peut forcer une onde à se propager suivant un chemin désiré en concevant soi-même le milieu de propagation. Dans cette thèse, nous étudions ces deux aspects à travers des expériences ultrasons-laser mettant en jeu la propagation d'ondes élastiques guidées dans des plaques : les ondes de Lamb.

La première partie de ce manuscrit traite de la propagation des ondes dans les milieux complexes. Initialement, ce problème a été traité par une approche probabiliste en étudiant, entre autres, l'intensité moyenne du champ. Il a notamment été prouvé que cette dernière obéissait classiquement à une équation de diffusion. Dans cette approche, plusieurs paramètres physiques pertinents sont introduits pour caractériser la propagation des ondes dans les milieux hétérogènes : le libre parcours moyen élastique, le libre parcours moyen de transport ou encore le coefficient de diffusion. Cependant, cette description peut être mise en défaut dès lors que des effets d'interférences parviennent à résister au désordre. Ces derniers peuvent par exemple ralentir, voire même stopper la diffusion des ondes dans le régime de localisation d'Anderson.

L'avènement des technologies multi-éléments a permis de tirer profit des effets d'interférence en exerçant un contrôle cohérent sur le front d'onde incident. La possibilité de manipuler les ondes à travers un milieu diffusant repose sur l'étude de l'opérateur de propagation, également appelé matrice de diffusion. Celui-ci contient les réponses impulsionnelles (ou fonctions de Green) reliant l'entrée et la sortie du milieu désordonné. L'accès à cet opérateur de propagation est précieux car il contient toute l'information sur le milieu étudié. On peut ensuite lui appliquer un ensemble d'opérations matricielles pour en extraire une information pertinente en fonction du problème physique considéré. D'un point de vue fondamental, cet opérateur de propagation a été étudié en physique du solide pour expliquer la conductance électrique de structures désordonnées : il s'agit de la théorie des matrices aléatoires appliquée au transport des électrons. Un résultat important est la prédiction d'un caractère bimodal pour cet opérateur de propagation : les valeurs propres de cet opérateur sont soit nulles, soit égales à l'unité. Autrement dit, les canaux que l'onde peut emprunter sont soit totalement ouverts (l'onde est entièrement transmise à travers le milieu désordonné, soit complètement fermés (l'onde est entièrement réfléchi). Ce résultat prépondérant, en totale contradiction avec l'approche diffusif, n'a toutefois jamais été vérifié expérimentalement puisqu'aucune mesure satisfaisante de l'opérateur de propagation n'a pu être réalisée, que ce soit en physique du solide, en optique, ou en acoustique. Le premier objectif de cette thèse a donc été d'observer l'existence de ces canaux puis d'en tirer profit afin de rendre un milieu diffusant totalement transparent ou opaque suivant la forme du front d'onde incident.

L'existence des canaux ouverts ou fermés repose toutefois sur des effets d'interférences par essence monochromatiques. La suite de notre démarche a consisté à déterminer des canaux de propagation qui soient entièrement transmis ou réfléchis à travers un milieu complexe, tout en étant robustes spectralement. L'existence de tels états, dont les propriétés dépassent à la fois le cadre de l'approche diffusif et de la théorie des matrices aléatoires est mise en évidence dans le troisième chapitre. Ces canaux sont extraits de la matrice de diffusion grâce à l'opérateur de Wigner-Smith. Ils suivent des trajectoires particulières mettant en jeu un certain nombre de réflexions spéculaires au sein du milieu.

L'autre volet de cette thèse consiste à forcer une onde à se propager suivant un chemin désiré en concevant le milieu de propagation de manière adéquate. De cette idée sont apparus les concepts de réfraction négative et de lentille parfaite, avec la possibilité de vaincre la limite de la diffraction en imagerie. La notion de milieux complémentaires en a également découlé : il est en effet possible d'annuler la propagation d'une onde en adjoignant deux milieux d'indice de réfraction opposés. En pratique, de tels milieux ont pu être réalisés en fabriquant des métamatériaux complexes, structurés à l'échelle sub-longueur d'onde de façon à obtenir des propriétés inédites à l'échelle macroscopique. Dans le cadre de nos travaux, nous proposons d'utiliser une stratégie alternative exploitant les propriétés dispersives des ondes élastiques guidées au sein de plaques. L'existence de modes de Lamb à vitesse de phase négative a ainsi été mise à profit pour mettre en évidence les phénomènes de réfraction et réflexion négative. Ainsi, dans une plaque présentant un changement abrupte d'épaisseur (une simple marche), la conversion d'un mode à vitesse de phase positive vers un mode à vitesse de phase négative peut se produire, donnant lieu au phénomène de réfraction négative. Plus simplement encore, la conversion similaire d'une onde sur le bord libre d'une plaque se traduit par la réflexion négative de celle-ci.

Dans un premier temps, nous étudions théoriquement, puis expérimentalement, la réflexion négative des ondes de Lamb sur un bord libre. Nous montrons notamment que sous certaines conditions, celle-ci se comporte comme un conjugueur de phase passif. Cet effet est ensuite mis à profit dans des environnements complexes, tels qu'une cavité réverbérante ou un milieu diffuseur. Enfin, le manuscrit se conclut par une étude à la fois théorique, numérique et expérimentale de la réfraction négative des ondes de Lamb. Ce phénomène nous permet notamment d'étudier le principe des milieux complémentaires qui permet d'annuler la propagation d'une onde et rendre ainsi invisible une partie du milieu de propagation.



Première partie

**Contrôle des canaux de  
propagation en milieux  
complexes**



---

## Approche matricielle de la propagation en milieux complexes

---

### Sommaire

<b>1.1 Propagation des ondes en milieux complexes . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.2 Description classique : de l'équation de transfert radiatif à l'approximation de la diffusion . . . . .	10
1.1.3 Limites de la description classique, effets d'interférences . . . . .	17
<b>1.2 Contrôle cohérent du front d'onde . . . . .</b>	<b>19</b>
1.2.1 Figure de tavelure, degrés de libertés spatio-temporels . . . . .	19
1.2.2 Focalisation à travers les milieux diffusants par optimisation du champ incident . . . . .	19
1.2.3 Retournement temporel des ondes acoustiques . . . . .	20
<b>1.3 Approche matricielle de la propagation des ondes . . . . .</b>	<b>22</b>
1.3.1 Principe . . . . .	22
1.3.2 Matrice de propagation dans les milieux faiblement diffusants - application à la détection de cibles et à la focalisation . . . . .	23
1.3.3 Matrice de propagation dans les milieux diffusants . . . . .	23
<b>1.4 Objectifs . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>Références bibliographiques . . . . .</b>	<b>26</b>

---

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

---



## 1.1 Propagation des ondes en milieux complexes

La conductivité électronique des métaux, la propagation d'ondes sismiques au sein de la croûte terrestre ou encore d'ultrasons au sein du corps humain sont autant d'exemples d'ondes se propageant dans des milieux désordonnés. Dans chacun de ces cas, la complexité du milieu de propagation à l'échelle de la longueur d'onde provoque de multiples événements de diffusion, rendant alors superflu une résolution analytique de l'équation des ondes. Dès lors, le problème est le plus souvent traité sous un angle statistique ; le milieu de propagation complexe est alors vu comme une réalisation d'un processus aléatoire.

### 1.1.1 Introduction

Considérons un milieu diffusant siège de la propagation d'une onde émise par une source  $\mathbf{S}$ . La progression de l'onde est marquée par une série d'évènements de diffusion séparés par une distance moyenne correspondant au libre parcours moyen de diffusion  $\ell_e$  [Fig. 1.1(a)]. Un récepteur  $\mathbf{R}$  mesure le champ diffusé  $\psi(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$ . Ce dernier correspond à la somme des contributions de chacun des chemins de diffusions possibles, indexés par l'indice  $p$ . Il s'écrit alors :

$$\psi(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) = \sum_p A_p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t). \quad (1.1)$$

L'intensité diffusée  $I(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$  peut quant à elle être évaluée en considérant le carré de la norme du champ correspondant :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) &= |\psi(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)|^2 \\ &= \left| \sum_p A_p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) \right|^2 \\ &= \underbrace{\sum_p |A_p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)|^2}_{\text{terme d'intensité "incohérente"}} + \underbrace{\sum_p \sum_{q \neq p} A_p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t) A_q^*(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)}_{\text{terme d'interférence}}. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Cette expression met en évidence deux contributions ; la contribution "incohérente" d'une part, portée par le premier terme, elle correspond à la somme des intensités individuelles (cf. Fig. 1.1(a)) et le second terme, qui correspond à l'ensemble des interférences entre les différentes ondes partielles ayant subi des séquences de diffusions différentes (cf. Fig. 1.1(b)).

Dans un milieu désordonné, la distribution aléatoire des phases de chacun des produits croisés du second terme tend à laisser penser que leur somme va disparaître sous

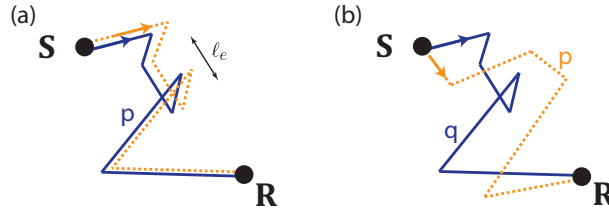


FIGURE 1.1 – Représentation schématique des interférences entre les ondes partielles ayant subies des séquences de diffusions (a) identiques et (b) différentes.

l'effet de la moyenne. Physiquement, l'intensité totale se ramène à la somme des intensités individuelles, deux chemins de diffusion indépendants étant, par hypothèse, décorrélés. Il s'agit de l'approche diffusive classique ; la trajectoire de l'onde est alors vue comme étant celle d'un marcheur aléatoire. Cependant, nous verrons dans un second temps que cette hypothèse peut être mise en défaut dès lors que les amplitudes des différents chemins de propagation sont corrélées. Nous l'illustrerons avec les phénomènes de localisation faible et de localisation forte.

### 1.1.2 Description classique : de l'équation de transfert radiatif à l'approximation de la diffusion

#### Equation de transfert radiatif

Dans le cadre de l'approximation dite *de l'échelle* (valable dans la limite  $k\ell_e \gg 1$ , avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) et en négligeant l'aspect ondulatoire du problème, il est possible d'établir une équation de transport, dite *équation de transfert radiatif* [1–3]. La propagation de l'énergie transportée par l'onde est assimilable à celle d'un ensemble de particules classiques sans interaction entre elles, effectuant chacune une marche aléatoire dans l'espace (cf. Fig. 1.2).

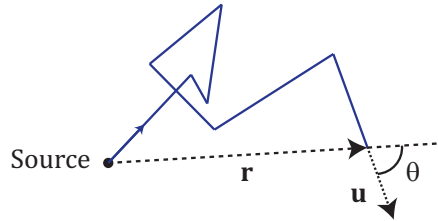


FIGURE 1.2 – Représentation schématique d'une séquence de 6 événements de diffusion dans un milieu aléatoire.

En considérant l'intensité spécifique  $I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$ , c'est-à-dire la densité de puissance (par unité de surface) au point  $\mathbf{r}$  diffusée dans la direction donnée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{c \partial t} I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = - \left( \ell_e^{-1} + \ell_a^{-1} \right) I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) + \ell_e^{-1} I_p(\mathbf{r}, t) + c^{-1} S(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

$$\text{avec } I_p(\mathbf{r}, t) = \int I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}') p(\mathbf{u}|\mathbf{u}') d\Omega_{\mathbf{u}'}, \quad (1.4)$$

## 1.1. PROPAGATION DES ONDES EN MILIEUX COMPLEXES

où  $\ell_e$  et  $\ell_a$  sont les libres parcours moyen élastique et d'absorption, et où  $p(\mathbf{u}|\mathbf{u}')$  représente la fonction de phase, c'est-à-dire la probabilité pour une onde incidente dans la direction  $\mathbf{u}'$  d'être diffusée dans la direction  $\mathbf{u}$ .  $S$  représente le terme source.

Cette équation peut être interprétée physiquement comme une équation bilan portant sur l'intensité spécifique, la diffusion redistribuant les directions de propagation des particules au cours du temps : le terme  $-(\ell_e^{-1} + \ell_a^{-1}) I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u})$  traduit les pertes par diffusion et par absorption alors que le terme  $\ell_e^{-1} I_p(\mathbf{r}, t)$  représente le gain en provenance des autres directions de propagation. De nombreuses techniques de résolution ont été développées dans le cadre du transfert radiatif [3–5]. Toutefois, l'existence de solutions analytiques se résume à des cas simples. Par exemple, dans le cas de diffuseurs isotropes au sein d'un milieu bidimensionnel, Paasschens [6] a montré que la fonction de Green  $P(r, t)$  (solution de l'équation de transfert radiatif pour une source ponctuelle isotrope  $S(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t)$ ) s'écrit :

$$P(r, t) = \underbrace{\frac{e^{(-ct/\ell)}}{2\pi r} \delta(ct - r)}_{\text{Intensité balistique}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi\ell ct} \left(1 - \frac{r^2}{c^2 t^2}\right)^{-1/2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{c^2 t^2 - r^2} - ct}{\ell}\right) \cdot H(ct - r)}_{\text{Intensité diffuse}} \quad (1.5)$$

où  $\ell = (\ell_e^{-1} + \ell_a^{-1})^{-1}$  est la longueur d'extinction qui rend compte des pertes par absorption et par diffusion et où  $H(t)$  est la fonction de Heaviside. Cette expression analytique distingue deux contributions. Le premier terme, associé à la distribution de Dirac  $\delta(ct - r)$ , correspond à la partie de l'onde qui n'a pas subi d'évènement de diffusion : il s'agit de l'intensité balistique. Le second terme, associé à la fonction de Heaviside  $H(ct - r)$ , correspond à l'intensité diffusée ; il rend compte de l'étalement spatial et temporel de l'onde multiplement diffusée [Fig. 1.3].

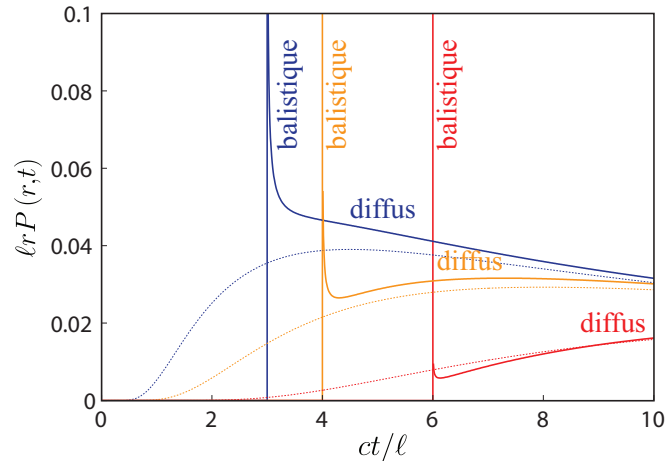


FIGURE 1.3 – Tracés temporels de la fonction de Green  $P(r, t)$  solution de l'équation de transfert radiatif (cf. Equation (1.5)) (traits pleins) et de l'équation de diffusion (cf. Equation (1.11)) (pointillés) dans le cas de diffuseurs isotropes répartis au sein d'un milieu bidimensionnel aux distances  $r/\ell = 3.0$  (courbes bleues),  $r/\ell = 4.0$  (courbes oranges) et  $r/\ell = 6.0$  (courbes rouges).

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

---

Du point de vue des échelles caractéristiques, nous avons vu que l'équation de transfert radiatif (cf. Eq. (1.3)) faisait intervenir directement les libres parcours moyens élastiques et d'absorption  $\ell_e$  et  $\ell_a$ , lesquels pilotent en particulier la décroissance d'un faisceau pénétrant au sein d'un milieu diffusant. Il existe une autre longueur caractéristique dans cette équation, dont la signature est portée par la fonction de phase  $p(\mathbf{u}|\mathbf{u}')$ , c.à.d. dans la redistribution des directions de propagation par un évènement de diffusion. Alors que dans le cas d'un diffuseur isotrope, la direction de propagation d'un faisceau initialement collimaté est rendue aléatoire dès le premier évènement de diffusion, dans le cas de diffuseurs anisotropes, l'onde peut conserver une trace de sa direction de propagation initiale malgré plusieurs évènements de diffusion. Le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$  représente la distance au bout de laquelle une onde "perd la mémoire" de sa direction initiale ; à ce titre,  $\ell^*$  constitue la longueur caractéristique du processus de diffusion.

### Approximation de la diffusion

Aux grandes échelles d'espace et de temps, c.-à-d. pour un milieu de taille caractéristique  $L \gg l^*$  et dans la limite  $ct \gg l^*$ , l'équation de transfert radiatif peut être approchée par une équation de diffusion pour la densité locale d'énergie  $W(\mathbf{r}, t)$  définie comme

$$W(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}') d\Omega_{\mathbf{u}'}. \quad (1.6)$$

Pour un problème de dimension  $d$ , l'équation (1.3) se simplifie alors en [7, 8] :

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D\Delta W(\mathbf{r}, t) = -\frac{c}{\ell_a} W(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t), \quad (1.7)$$

$$\text{avec } D = \frac{c\ell^*}{d} \text{ la constante de diffusion (ou diffusivité),} \quad (1.8)$$

où  $\ell^*$  est le *libre parcours moyen de transport* décrit précédemment et défini comme :

$$\ell^* = \frac{\ell_e}{1-g}, \quad (1.9)$$

expression dans laquelle le paramètre  $g$  rend compte de l'anisotropie des évènements de diffusion et se calcule de la manière suivante,

$$g = \frac{1}{4\pi} \int p(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' d\Omega_{\mathbf{u}'} = \frac{1}{4\pi} \int p(\cos\theta) \cos\theta d\Omega_{\mathbf{u}'}, \quad (1.10)$$

en notant  $\cos\theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$ . La fonction de Green de l'équation de diffusion  $P_D(\mathbf{r}, t)$  en milieu infini s'écrit alors,

$$P_D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \exp\left(-\frac{ct}{\ell_a}\right) H(ct). \quad (1.11)$$

On retrouve une expression analogue à la distribution de probabilité de présence d'un marcheur aléatoire à une position donnée aux temps infinis. On peut également noter que la fonction de Green de l'équation de diffusion (Eq. (1.11)) se déduit de la fonction de Green correspondant à l'équation de transfert radiatif donnée par l'équation (1.5) dans le régime des temps longs  $ct \gg r$  [Fig. 1.3].

**Efficacité du transport à travers un milieu diffusant**

Lors de cette thèse, nous allons nous intéresser à l'optimisation du transport des ondes à travers un milieu diffusant. Nous allons donc ici établir le résultat prédit par l'approche diffusive pour, par la suite, le comparer à nos résultats expérimentaux. Calculons le flux transmis à travers une couche plane de milieu diffusant d'épaisseur  $L \gg l^*$ , non absorbante, insonifiée par une onde plane incidente dans la direction  $\mathbf{e}_z$  (cf. Fig. 1.4). En tout point, l'intensité spécifique peut s'écrire comme la somme d'une composante balistique et d'une composante diffuse,

$$I(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) = I_b(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_z + I_{\text{diff}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{u}) \quad (1.12)$$

En insérant la décomposition (1.12) dans l'équation de transfert radiatif (Eq. (1.3)), on obtient deux équations mettant en jeu respectivement la composante balistique  $I_b(z)$  et la composante diffuse  $I_{\text{diff}}(z)$  de l'intensité spécifique. Le problème sera donc traité tour à tour pour chacune des deux composantes de l'intensité spécifique.

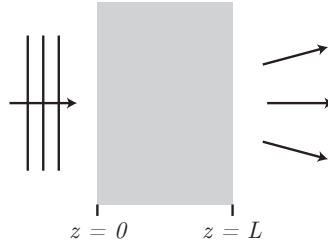


FIGURE 1.4 – Transmission diffuse à travers une couche de largeur  $L$  d'un milieu multidiffusant non absorbant. L'interface  $z = 0$  est éclairée par une onde plane monochromatique d'intensité  $I_0$  ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ )

**Décroissance de l'intensité balistique, loi de Beer-Lambert** Au fur et à mesure de sa propagation au sein du milieu diffusant, l'onde incidente voit sa composante balistique décroître du fait de multiples événements de diffusion. Il est possible d'établir la loi de décroissance de l'intensité  $I_b(z)$  associée à cette onde dans la géométrie représentée sur la figure 1.4. L'équation de transfert radiatif pour la composante balistique s'écrit :

$$\frac{\partial}{c \partial t} I_b(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla I_b(\mathbf{r}, t) = -\frac{I_b(\mathbf{r}, t)}{\ell_e}, \quad (1.13)$$

soit, en régime stationnaire :

$$\frac{\partial I_b(z)}{\partial z} + \frac{I_b(z)}{\ell_e} = 0. \quad (1.14)$$

Cette équation traduit la conversion du champ balistique en champ diffus. On retrouve, en intégrant l'équation différentielle correspondante sur la tranche d'épaisseur  $L$ , la loi dite de *Beer-Lambert*,

$$I_b = I_0 \exp(-L/\ell_e). \quad (1.15)$$

**Intensité diffusée** Au sein du milieu, la densité locale d'énergie vérifie l'équation de diffusion (1.7) en régime stationnaire avec un terme source correspondant au faisceau balistique résiduel [9] :

$$\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = -\frac{I_b(z)}{D\ell^*} = -\frac{I_0 \exp(-z/\ell^*)}{D\ell^*}. \quad (1.16)$$

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

---

Une solution particulière de cette équation différentielle s'écrit :

$$W_p(z) = \frac{-3I_0}{c} \exp\left(-\frac{z}{\ell^*}\right). \quad (1.17)$$

La solution de l'équation (1.16) s'écrit donc :

$$W(z) = \frac{-3I_0}{c} \exp\left(-\frac{z}{\ell^*}\right) + C_1 \cdot z + C_2, \quad (1.18)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes à déterminer.

La condition aux limites en  $z = 0$  s'obtient en écrivant la nullité du flux diffus entrant, c'est-à-dire en intégrant angulairement l'intensité spécifique du champ diffus sur le demi espace pour lequel  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z > 0$  :

$$\int_{2\pi} I_{\text{diff}}(z=0, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z d\Omega = 0, \quad (1.19)$$

Au fil de sa propagation, la distribution angulaire de l'intensité diffusée est rendue de plus en plus isotrope par les multiples évènements de diffusion. On peut alors l'écrire à l'*approximation*  $P_1$ , c'est-à-dire en la développant sur les deux premiers vecteurs de la base de polynômes de Legendre [4], on a :

$$I_{\text{diff}}(z, \mathbf{u}) = \underbrace{\frac{c}{4\pi} W(z)}_{\text{terme isotrope}} + \underbrace{\frac{3}{4\pi} \mathbf{J}(z) \cdot \mathbf{u}}_{\text{terme anisotrope}}, \quad (1.20)$$

où  $\mathbf{J}(z) = \int I(z, \mathbf{u}) \mathbf{u} d\Omega$  est le *vecteur flux radiatif* qui représente le courant moyen de particules à la profondeur  $z$ . Il s'écrit :

$$J(z) = -\frac{c\ell^*}{3} \frac{dW(z)}{dz} + \frac{g}{1-g} I_b(z). \quad (1.21)$$

L'introduction de cette expression dans l'équation (1.19) conduit – en notant  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z = \cos(\theta)$  – à l'expression :

$$\frac{c}{4\pi} W(z=0) \int_{2\pi} \cos(\theta) d\Omega + \frac{3}{4\pi} J(z=0) \int_{2\pi} \cos^2(\theta) d\Omega = 0, \quad (1.22)$$

soit,

$$\frac{c}{2} W(z=0) + J(z=0) = 0 \quad (1.23)$$

ou encore, en intégrant l'expression du vecteur flux radiatif (Eq. (1.21)) :

$$W(z=0) - \frac{2\ell^*}{3} \frac{dW(z=0)}{dz} + \frac{2g}{c(1-g)} I_b(z=0) = 0. \quad (1.24)$$

En  $z = L$ , on obtient, en suivant la même démarche :

$$W(z=L) - \frac{2\ell^*}{3} \frac{dW(z=L)}{dz} - \frac{2g}{c(1-g)} I_b(z=L) = 0. \quad (1.25)$$

En insérant l'expression (1.18) dans les deux équations (1.24) et (1.25), on obtient l'expression de la densité d'énergie dans la couche :

$$W(z) = \frac{5I_0}{c} \left( \frac{L + z_0 - z}{L + 2z_0} \right) - 3 \frac{I_0}{c} \exp(-z/\ell^*), \quad (1.26)$$

## 1.1. PROPAGATION DES ONDES EN MILIEUX COMPLEXES

avec  $z_0 = 2/3\ell^*$ .

On peut définir le coefficient de transmission  $T$  comme le rapport entre le flux transmis,  $J(z=L) = -D \frac{dW(z=L)}{dz}$  et l'intensité incidente  $I_0$ . On a alors, dans la limite  $L \gg \ell^*$  :

$$J(z) = -D \frac{\partial W}{\partial z}(z) = D \left[ \frac{5I_0}{c(L+2z_0)} + \frac{3I_0}{cl^*} \exp(-z/l^*) \right], \quad (1.27)$$

où  $D = cl^*/3$ . On peut définir le coefficient de transmission,

$$T = \frac{J(z=L)}{I_0} = \frac{5}{2} \frac{z_0}{L+2z_0}. \quad (1.28)$$

Dans la limite  $L \gg l^*$ , on a :

$$T = \frac{5}{3} \frac{l^*}{L}. \quad (1.29)$$

Cette équation est connue sous le nom de *loi d'Ohm* : l'intensité transmise est inversement proportionnelle à la largeur de milieu diffusant traversé. Ce comportement est caractéristique du régime diffusif.

### Perte de la cohérence spatiale et temporelle

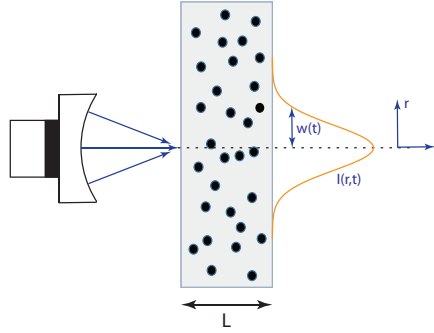


FIGURE 1.5 – Représentation du dispositif expérimental utilisé par Page *et al.* [10] pour la mesure de la courbe des *temps de vol* à travers une tranche de milieu diffusant d'épaisseur  $L$ , sur et en dehors de l'axe de façon à mesurer le confinement transverse. Une source ponctuelle est créée à la surface de la tranche de milieu diffusant en utilisant un transducteur focalisé. La mesure se fait en transmission à l'aide d'hydrophones sub-longueur d'onde.

Au cours de cette thèse, nous étudierons également la possibilité de construire des états cohérents au sein de milieux complexes. Afin d'illustrer la dispersion spatiale et temporelle d'une impulsion s'étant propagée dans de tels milieux, reprenons l'exemple précédent d'une couche plane de milieu diffusant d'épaisseur  $L$ , et étudions le profil de l'intensité transmise pour un point source placé près de la surface du milieu en fonctions du temps et de la position transverse par rapport à la source  $r$  [Fig. 1.5].

Ce problème a été traité théoriquement par Carslaw et Jaeger dans le cadre de la conduction de la chaleur [11] puis appliqué par Page *et al.* [10] au cas de la transmission d'ultrasons par une tranche tri-dimensionnelle de milieu fortement diffusant. Considérons un point source à la position  $\mathbf{r}_0$ , délivrant une énergie totale  $P_0 = 1$ , l'équation (1.7) s'écrit :

$$\frac{\partial W(\mathbf{r},t)}{\partial t} - D\Delta W(\mathbf{r},t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t). \quad (1.30)$$

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

La prise en compte des effets d'absorption peut se faire en écrivant, la densité locale d'énergie sous la forme  $W(\mathbf{r}, t) e^{-t/\tau_a}$ , où  $\tau_a$  est le temps d'absorption inélastique. Les conditions aux limites sont quant à elles imposées en considérant la nullité du flux diffus pénétrant dans le milieu en dehors des réflexions aux interfaces [12]. Le flux transmis dans la direction normale à la frontière du milieu – grandeur mesurée expérimentalement – s'écrit alors comme,

$$J(r, t) = \frac{e^{-r^2/4Dt} e^{-t/\tau_a}}{2\pi L^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) e^{-D\beta_n^2 t/L^2}, \quad (1.31)$$

où l'expression des coefficients  $A_n$  et  $\beta_n$  est donnée dans la référence [10].

**Temps de Thouless** Aux temps longs, pour lesquels le premier terme du développement présenté dans l'équation (1.31) domine, la décroissance se fait avec un temps caractéristique  $\tau_c$ , donné par,

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_a} + \frac{D\beta_1^2}{L^2}. \quad (1.32)$$

L'expression met ainsi en évidence les effets de l'absorption, portés par le premier terme ainsi que le temps de Thouless,

$$\tau_D = \frac{L^2}{D\beta_1^2} \simeq \frac{L^2}{D}, \quad (1.33)$$

caractéristique du temps passé par l'onde dans le milieu diffusant.

**Halo diffusif** La dispersion spatiale de l'impulsion s'étant propagée dans la tranche de milieu diffusant apparaît également dans l'expression du flux transmis (cf. Eq. (1.31)). La figure 1.6(b) représente la densité locale d'énergie à un instant  $t$  fixé en fonction de la distance  $r$  à la source ; on observe l'étalement du dirac spatial en un halo diffusif de largeur caractéristique  $\sqrt{Dt}$

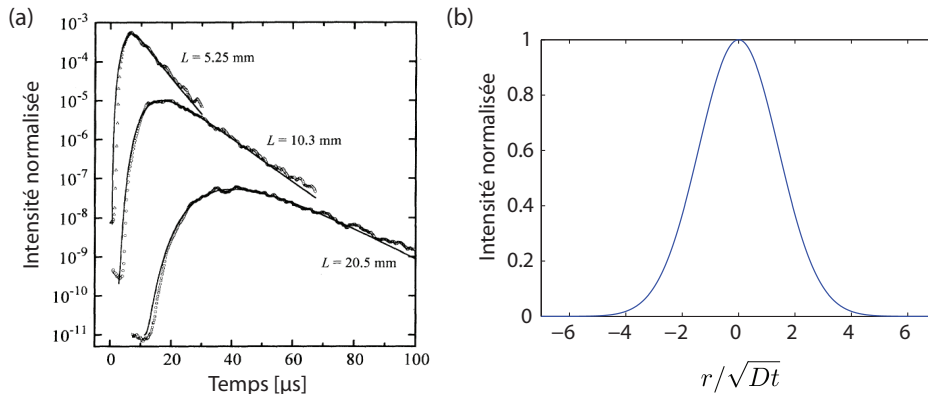


FIGURE 1.6 – (a) Distributions des temps de vols obtenus sur l'axe ( $r = 0$ ) pour trois milieux diffusant ( $D = 0,43 \text{ mm}^2/\mu\text{s}$ ) d'épaisseur  $L$  constitués de billes de verres. (b) Représentation de l'intensité normalisée à un instant  $t$  donné en fonction du paramètre  $r/\sqrt{Dt}$ .



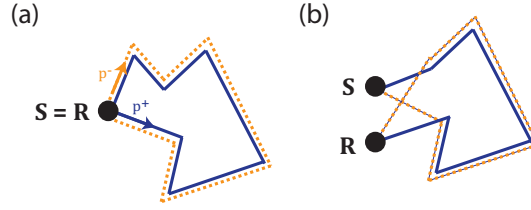


FIGURE 1.7 – Représentation schématique de deux séquences de diffusion réciproques l’une de l’autre, parcourues l’une dans le sens direct et l’autre dans le sens indirect dans les cas (a)  $\mathbf{S} = \mathbf{R}$  et (b)  $\mathbf{S} \neq \mathbf{R}$ .

### 1.1.3 Limites de la description classique, effets d’interférences

L’approche diffusivo apparaît satisfaisante pour rendre compte des propriétés statistiques de la contribution incohérente de l’intensité multiple diffusée. Toutefois, cette approche néglige l’aspect ondulatoire du problème et donc les effets d’interférences qui peuvent résister au désordre, aussi important qu’il soit. Dans cette sous-partie, nous illustrerons ce phénomène à travers deux exemples ; dans le cadre de la rétrodiffusion cohérente et de la localisation *faible* dans un premier temps, puis dans le régime de localisation *forte* d’Anderson dans un second temps.

#### Rétrodiffusion cohérente

Dans l’introduction de ce chapitre (partie 1.1.1, p. 9), nous avons vu que le terme d’intensité cohérente de l’équation (1.2) mettait en jeu une somme de termes croisés correspondant chacun à deux séquences de diffusions distinctes indexées respectivement  $p$  et  $q$ . En transmission, les amplitudes correspondantes  $A_p(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$  et  $A_q(\mathbf{S}, \mathbf{R}, t)$  étant décorréelées, le terme d’intensité cohérente disparaît sous l’effet de la moyenne. À l’inverse, en réflexion, lorsque  $\mathbf{S} = \mathbf{R}$ , les différents chemins de diffusion multiple ne sont plus décorréelés mais peuvent être regroupés par paires : en effet, chaque séquence, indexée  $p^+$ , peut être associée à une séquence *réciproque*, indexée  $p^-$  mettant en jeu les mêmes événements de diffusion, mais subis dans l’ordre inverse (cf. Fig. 1.7(a)). Ces deux séquences, bien que différentes correspondent à des amplitudes complexes de même phase lorsque  $\mathbf{S} = \mathbf{R}$ . L’équation (1.2) s’écrit alors :

$$I(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t) = \sum_p |A_p(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t)|^2 + \sum_p \sum_{q \neq p} A_p(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t) A_q^*(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t), \quad (1.34)$$

soit une intensité moyenne :

$$\langle I(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t) \rangle = \sum_p \langle |A_p(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t)|^2 \rangle + \sum_p \langle A_{p^+}(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t) A_{p^-}^*(\mathbf{S} = \mathbf{R}, t) \rangle. \quad (1.35)$$

Le premier terme correspond à l’intensité incohérente précédemment traité dans le cadre de l’approche diffusivo. Il tient compte à la fois des chemins de diffusion simple et des chemins de diffusion multiples. Le second terme correspond à l’intensité cohérente pour lequel seuls les termes d’interférence entre chemins réciproques (e.g. trajets  $p^+$  et  $p^-$  sur la figure 1.7(a)) résistent à la moyenne. Ces trajets ne pouvant, par définition, correspondre qu’à des trajets de diffusion multiple, le terme d’intensité cohérente est équivalent à la contribution des chemins de diffusion multiple au terme d’intensité incohérente. Ainsi, dans le cas où la diffusion simple est négligeable, l’intensité moyenne mesurée à la source est deux fois supérieure aux prédictions obtenues dans l’approche diffusivo : il s’agit du phénomène de rétrodiffusion cohérente. Dès lors que  $\mathbf{S} \neq \mathbf{R}$ , la

différence entre les deux trajets  $p^+$  et  $p^-$  induit un déphasage (cf. Fig. 1.7(b)). La taille typique du pic de rétrodiffusion cohérente est de  $\lambda/2$  lorsque la source est ponctuelle et placée en surface ou au sein du milieu diffusant.

Le phénomène de rétrodiffusion cohérente a été découvert en optique dans les années 80 [13, 14]. Ces deux travaux concomitants constituent les premières mises en évidence de limites à la description incohérente de la diffusion multiple. En acoustique, les premières mesures du cône de rétrodiffusion cohérente *dynamique* ont été réalisées dans les années 90 [15, 16]. Plus récemment, Larose *et al.* l'ont mis en évidence avec des ondes sismiques [17].

### Localisation faible

Du point de vue des propriétés de transport de l'onde multiple diffusée, la prise en compte des séquences de diffusion réciproques amène à doubler la quantité d'énergie revenant vers le point initial comparativement aux prédictions du modèle diffusif : il s'agit du phénomène de localisation faible. Cet effet peut toutefois être pris en compte sous une approche diffusif en renormalisant le coefficient de diffusion de la manière suivante [9] :

$$D' = D \left[ 1 - \frac{1}{(kl^*)^2} \right], \quad (1.36)$$

où  $D'$  est un coefficient de diffusion effectif.

### Localisation forte

Dans le cas d'un désordre important, les effets d'interférences deviennent prédominant et la prise en compte de séquences de diffusion plus complexes est alors nécessaire (cf. Fig. 1.8). Ces effets se traduisent par un arrêt du processus de diffusion, l'énergie reste localisée à proximité de la source, dans un domaine caractérisé par la longueur de localisation  $\xi$ . Ce phénomène, initialement prédit en 1958 par P.W. Anderson dans le cadre du transport électronique [18], a suscité un vif intérêt dans de nombreux domaines de la physique des ondes. Dans les systèmes uni- ou bi-dimensionnels, ainsi que dans les guides d'ondes quasi-uni-dimensionnels, pour lesquels la localisation forte est *triviale*, le phénomène a pu être observé à la fois pour les ondes acoustiques [19], électromagnétiques [20, 21] et les ondes de matières [22]. À trois dimensions, la localisation forte ne survient qu'en régime de fort désordre ( $kl^* \sim 1$ ). Son observation est ainsi rendue plus compliquée et n'a pu être démontrée de manière non ambiguë que pour les ondes élastiques [23].

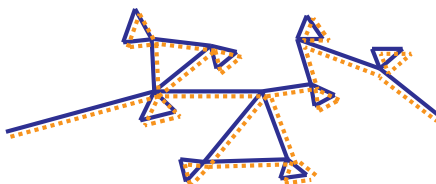


FIGURE 1.8 – Représentation schématique d'une séquence de diffusion mettant en jeu des boucles de diffusion.

## 1.2 Contrôle cohérent du front d'onde

La première partie de ce chapitre nous a permis de montrer que des effets d'interférence pouvaient survivre au désordre et altérer de manière significative la diffusion des ondes. Dans cette deuxième partie, nous nous proposons de montrer que l'on peut tirer profit des interférences en milieu désordonné à des fins de focalisation, d'imagerie, de transport ou de communication en contrôlant de manière cohérente le front d'onde incident.

### 1.2.1 Figure de tavelure, degrés de libertés spatio-temporels

Alors que l'approximation de la diffusion se place dans le cadre d'une approche statistique du désordre, il est possible d'en prendre le contrepied en tirant profit des effets cohérents propres à chacune de ces configurations. La manifestation la plus évidente de ces effets peut être obtenue en observant en champ lointain l'image résultant de la transmission des ondes à travers un milieu multi-diffusant. On observe une figure d'intensité qui, bien que chahutée, est parfaitement déterministe, appelée *figure de tavelure* (cf. Fig. 1.9). Elle résulte des effets d'interférences entre les différentes séquences de diffusion existants au sein du milieu. Les points *sombres* de la figure sont le résultat d'ondes interférant destructivement alors que les points *brillants* résultent d'interférences constructives.

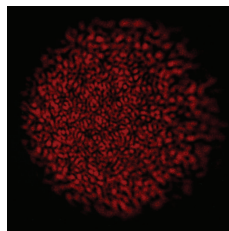


FIGURE 1.9 – Tavelures optiques (*speckle*) obtenues en sortie d'une fibre optique multi-modes dans laquelle un faisceau lumineux issu d'un laser Hélium-Néon est injecté. (Source : Christophe Finot, (CC BY-SA 3.0 FR))

### 1.2.2 Focalisation à travers les milieux diffusants par optimisation du champ incident

Récemment, l'essor des *modulateurs spatiaux de lumière* a offert aux opticiens la possibilité de manipuler spatialement et de manière cohérente le champ incident sur le milieu de propagation. Ce contrôle cohérent a ainsi pu être mis à profit par Ivo Vellekoop et Allard Mosk afin de focaliser la lumière à travers [24] puis au sein d'un milieu diffusant [25] [Fig. 1.10]. En utilisant un récepteur permettant de connaître l'intensité au point sur lequel ils souhaitent focaliser le champ, ils ont pu, à l'aide d'une boucle de rétro-action, optimiser la phase de chacun des pixels du *modulateur spatial de lumière*. Dans la configuration finale, optimisée, l'intensité au point de focalisation est le produit d'interférences constructives alors que partout ailleurs, on observe une figure de tavelure similaire à celle décrite dans le paragraphe précédent.

L'efficacité de la focalisation, c.-à-d. le contraste entre l'intensité mesurée au point focal et celle mesurée en arrière plan dépend alors du degré d'optimisation du front incident possible, caractérisé par le nombre de degrés de liberté spatiaux  $N_s$ . Ce paramètre

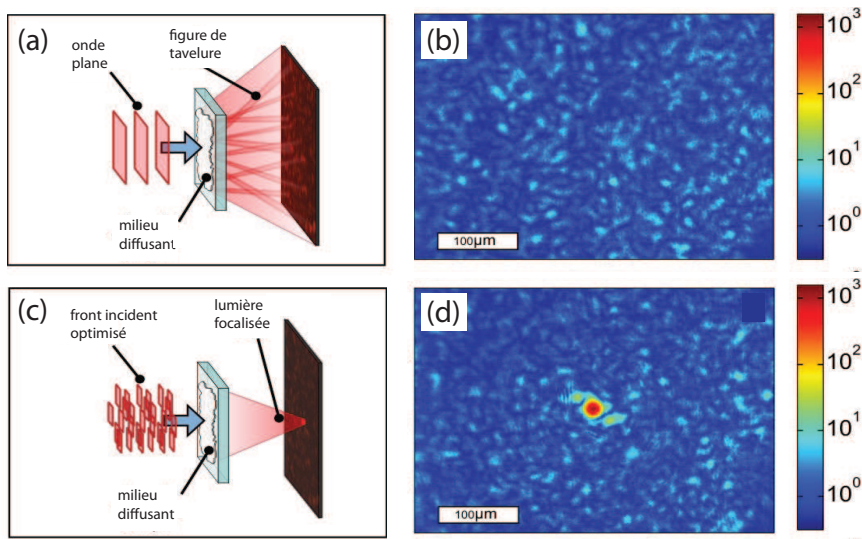


FIGURE 1.10 – Principe de la focalisation à travers un milieu diffusant par optimisation du front incident. (a) Milieu diffusant éclairé par une onde plane. (b) L'image d'intensité obtenue est alors une figure de tavelure. (c) Milieu diffusant éclairé par le champ incident optimisé. (d) La figure d'intensité obtenue correspond à une figure de tavelure à l'exception du point de focalisation pour lequel l'intensité a été optimisée et augmentée d'un facteur  $\sim 10^3$ . Figures issues de [24].

se calcule comme

$$N_s = \frac{\mathcal{A}}{l_c^2}, \quad (1.37)$$

où  $\mathcal{A}$  représente l'aire de la surface contrôlée et  $l_c$  la longueur de cohérence, définie comme la distance de laquelle il faut déplacer une source située à la surface du milieu pour créer une figure de tavelure indépendante de celle mesurée initialement. L'optimisation du front incident peut ainsi être vue comme la mise en phase, au point de focalisation, des  $N_s$  figures de tavelures indépendantes qu'il est possible de contrôler. Alors qu'en un point situé en arrière plan, la somme incohérente des figures de tavelures engendre une intensité moyenne  $I_0 \propto N_s$  [Fig. 1.11(a)], au point focal, les figures de speckle sont sommées de manière cohérente au point focal, soit une intensité  $I_f \propto N_s^2$  [Fig. 1.11(b)]. Le contraste croît donc linéairement avec le nombre de degré de liberté spatiaux du système :

$$\eta = \frac{I_f}{I_0} \propto N_s. \quad (1.38)$$

Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait qu'aucune connaissance préalable du milieu diffusant n'est nécessaire. À l'inverse, les inconvénients de la méthode dite *d'optimisation* résident dans l'absence d'information qu'elle apporte sur le milieu. D'un point de vue pratique, il sera donc nécessaire de réitérer l'ensemble du processus dès lors qu'il s'agit de focaliser en un autre point. D'un point de vue fondamental, il semble moins aisé d'utiliser cette méthode en vue d'extraire des informations sur les propriétés du milieu.

### 1.2.3 Retournement temporel des ondes acoustiques

Le *retournement temporel* (R.T.) est une technique de focalisation spatio-temporelle développée par Mathias Fink et son équipe au *Laboratoire Ondes et Acoustique* dans

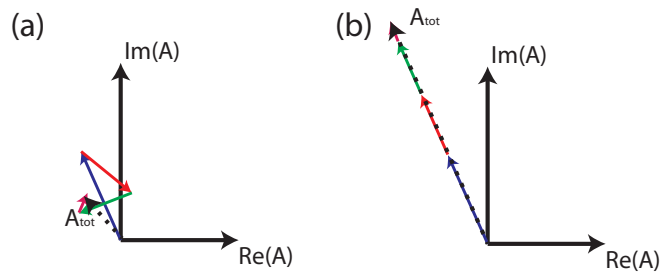


FIGURE 1.11 – Représentation dans le plan complexe de l’amplitude du champ au point de focalisation comme (a) la somme des amplitudes incohérentes associées aux différentes figures de tavelures (avant optimisation) et (b) la somme en phase des amplitudes associées aux différentes figures de tavelures (après optimisation).

les années 1990. Elle est fondée sur la réversibilité en temps de l’équation d’onde [26] : si un champ  $\psi_0(\mathbf{r}, t)$  est solution de l’équation d’onde, alors le champ retourné temporellement  $\psi_0(\mathbf{r}, -t)$  l’est aussi. Si de plus le milieu est stationnaire, l’origine des temps peut être modifiée et ramenée au temps  $t_0$  ;  $\psi_0(\mathbf{r}, t_0 - t)$  est alors également solution de l’équation d’onde.

En pratique, l’application du théorème intégral de Helmholtz-Kirchoff a permis à Didier Cassereau et Mathias Fink de développer le concept de cavité à retournement temporel. En effet, la connaissance du champ et de sa dérivée normale sur l’ensemble d’une surface fermée permet de déduire le champ en tout point du volume délimité par cette dernière. Une expérience de retournement temporel peut alors être réalisée en deux temps comme décrit sur la figure 1.12. Durant une première phase, dite *phase d’enregistrement*, une impulsion est émise à l’aide d’une source située au sein de la cavité puis enregistrée au moyen d’un ensemble de transducteurs formant une surface fermée (cf. Fig. 1.12(a)). Durant la deuxième phase, dite *de ré-émission*, chaque transducteur se comporte comme une source et émet le champ ainsi que sa dérivée normale préalablement renversés temporellement (cf. Fig. 1.12(b)). L’onde revit alors son expérience passée mais en sens inverse. L’onde retournée temporellement reconverge vers la source initiale. Une focalisation spatio-temporelle est alors obtenue de durée équivalente à l’impulsion initiale avec une résolution spatiale seulement limitée par la diffraction ( $\sim \lambda/2$ ). La puissance du concept de retournement temporel réside dans le fait que ce résultat reste valide quelque soit la complexité du milieu entre la source initiale et le réseau de transducteurs.

La mise en œuvre expérimentale d’une cavité à retournement temporel est en réalité rendue compliquée – si ce n’est impossible – par le grand nombre de transducteurs qu’elle nécessite. Il faut donc en pratique se limiter à des réseaux de transducteurs d’ouverture finie, alors qualifiés de *miroirs à retournement temporel* (M.R.T.). Dès lors, la focalisation du champ retourné temporellement donne lieu à une tâche focale limitée par la diffraction. Outre le nombre de degrés de liberté spatiaux contrôlés, la qualité de la focalisation obtenue fait intervenir le nombre de figures de tavelures spectralement incohérentes contrôlées, c’est-à-dire, le degré de liberté fréquentiels du système, défini comme

$$N_f = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}, \quad (1.39)$$

où  $\Delta\omega$  représente la largeur spectrale de l’impulsion initiale et où  $\delta\omega$  est la longueur

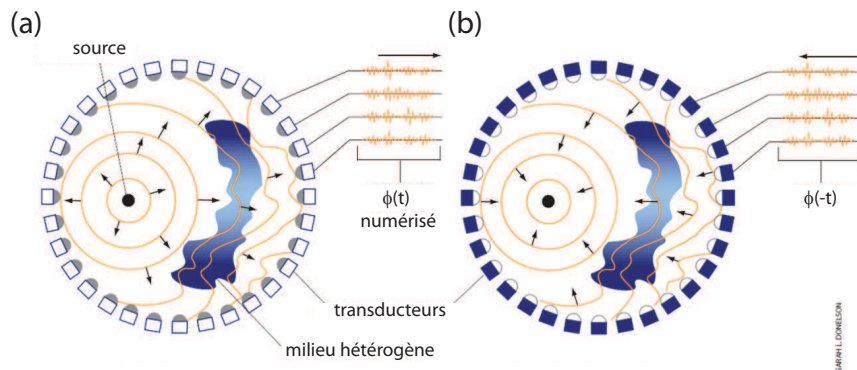


FIGURE 1.12 – Principe de la cavité à retournement temporel. (a) Phase d'enregistrement du champ. (b) Phase de réémission des signaux retournés temporellement et refocalisation. Figure issue de [27].

de cohérence spectrale du milieu. Pour un milieu diffusant, ce paramètre peut être déduit de la largeur caractéristique de la courbe des *temps de vol*, donnée par le temps de Thouless [cf. sous-partie 1.1.2, p. 15] : on a alors  $\delta\omega \sim 1/\tau_D$ . Le contraste de focalisation croît alors comme le produit des deux termes représentant les degrés de libertés spatiaux et fréquentiels :

$$\eta \propto N_s N_f. \quad (1.40)$$

Le dernier paramètre pilotant la qualité de focalisation est l'ouverture angulaire du M.R.T.. Il est toutefois possible d'augmenter artificiellement ce paramètre en créant des sources secondaires virtuelles, grâce à un guide d'onde [28] ou une cavité réverbérante [29, 30]. Enfin, il a également été démontré que la présence d'un milieu multi-diffusant permet d'augmenter la résolution d'un miroir à retournement temporel en augmentant virtuellement l'ouverture du M.R.T. [31].

## 1.3 Approche matricielle de la propagation des ondes

### 1.3.1 Principe

Outre la mise en œuvre de méthodes tirant profit des degrés de liberté spatiaux et temporels comme celles décrites ci-dessus, l'avènement de la technologie multi-éléments a permis le développement d'une approche dite *matricielle* de la propagation des ondes afin d'avoir accès à toute l'information disponible sur le milieu étudié. Cette approche est applicable à tous les domaines de la physique des ondes pour lesquels la technologie multi-éléments est disponible, que ce soit en acoustique (réseaux de transducteurs), en électromagnétisme (réseaux d'antennes), en géologie (réseaux de géophones) ou encore en optique (modulateurs spatiaux de lumière, caméra CCD).

Considérons deux réseaux de  $N$  et  $M$  éléments, définis respectivement comme *sources* et *récepteurs*. L'opérateur de propagation  $\mathbf{h}$  reliant ces deux réseaux contient les réponses impulsionnelles  $h_{ij}$  entre chaque élément  $i$  du réseau source et éléments  $j$  du réseau récepteur. Deux configurations sont à distinguer selon que les deux réseaux de sources et de récepteurs sont situés du même côté du milieu de propagation considéré, auquel cas cette matrice sera appelée *matrice de réflexion* et sera notée  $\mathbf{r}$  (cf. Fig. 1.13(a)) ou de part et d'autre du milieu de propagation considéré, auquel cas cette matrice sera appelée *matrice de transmission* et sera notée  $\mathbf{t}$  (cf. Fig. 1.13(b)).

### 1.3. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION DES ONDES

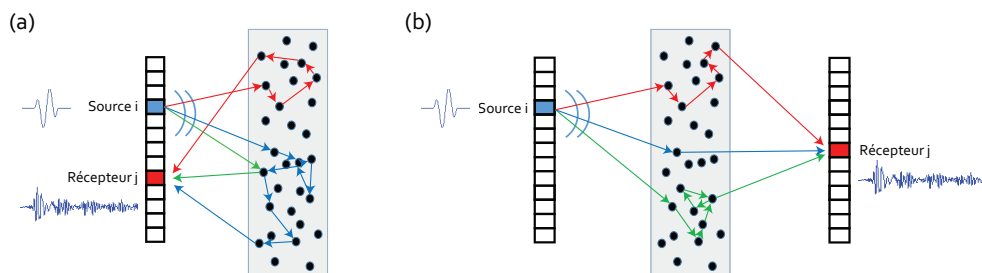


FIGURE 1.13 – Schéma de principe de l'acquisition d'une matrice de réflexion (a) et de transmission (b).

L'opérateur de propagation contient alors toute l'information disponible sur le milieu de propagation considéré. Il est alors possible de lui appliquer par la suite un ensemble d'opérations matricielles afin d'en extraire l'information pertinente en fonction du problème considéré, le problème étant supposé linéaire et invariant par translation dans le temps.

#### 1.3.2 Matrice de propagation dans les milieux faiblement diffusants - application à la détection de cibles et à la focalisation

La souplesse expérimentale offerte en acoustique par les réseaux de transducteurs a rendu possible les premières mesures de l'opérateur de propagation, initialement dans le cadre de la focalisation sélective dans des milieux constitués de quelques cibles. La mesure de la matrice de réflexion  $\mathbf{r}$  a permis de définir l'opérateur de retournement temporel  $\mathbf{r}^*\mathbf{r}$  dans le domaine fréquentiel [32, 33]. La décomposition de cette opérateur (méthode dite, de *décomposition de l'opérateur de retournement temporel*, DORT) offre non seulement la possibilité d'établir une correspondance entre le rang de l'opérateur et le nombre de cibles mais également de déterminer les lois d'amplitude et de phase permettant la focalisation sélective sur chacune d'entre elles. Ces concepts ont ensuite été appliqués à la thérapie [34], la détection de défauts [35] ou l'acoustique sous-marine [36]. Ils ont été par la suite étendus aux micro-ondes [37] et à l'optique [38]. Au début des années 2000, M. Tanter et ses collaborateurs ont également tiré profit de cette approche matricielle – en transmission cette fois – pour réaliser des expériences de focalisation par *filtre inverse* [39, 40]. Cette méthode, basée sur une pseudo-inversion de la matrice de transmission, permet une focalisation optimale des ondes à travers des milieux aberrateurs ou absorbants.

#### 1.3.3 Matrice de propagation dans les milieux diffusants

Dans les milieux diffusants, chacun des éléments de l'opérateur de propagation prend la forme d'une variable aléatoire; ce dernier peut alors être étudié à travers le prisme de la théorie des matrices aléatoires (R.M.T. pour random matrix theory [41, 42]). Initiée par Wigner dans les années 1950 en physique du solide [43], celle-ci apporte le support d'un ensemble de prédictions théoriques à l'étude de la propagation des ondes en milieux complexes. Les premières confrontations expérimentales à ces résultats ont été menées en acoustique dans le cadre de milieux ouverts. Dans un premier temps, la mesure de la matrice de propagation en transmission à travers un milieu diffusant a permis à Rudolf Sprik et ses collaborateurs de caractériser les effets des corrélations entre les différents canaux de la matrice sur la distribution de ses valeurs propres [44]. Puis, au cours de la thèse d'Alexandre Aubry, cette approche matricielle adoptée en

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

rétrodiffusion a conduit à l'étude des propriétés statistiques de la matrice de réflexion dans les régimes de diffusion simple et de diffusion multiple [45]. Les différences de comportement statistique de la matrice  $\mathbf{r}$  dans chacun de ces régimes de transport a ensuite permis la mise au point d'une méthode permettant de séparer les contributions de diffusion simple et multiple et de l'appliquer à la détection de cible enfouie dans des milieux fortement diffusants [46, 47].

Plus récemment, la mesure de la matrice de transmission à travers un milieu diffusant a pu être réalisée en optique par Sébastien Popoff et ses collaborateurs [48]. Ceci a pu être réalisé en contrôlant le front d'onde incident à l'aide d'un modulateur spatial de lumière et en mesurant le champ transmis à l'aide d'une caméra CCD (cf. Fig. 1.14(a)). Ces travaux pionniers ont suscité un grand intérêt en optique puisqu'ils ouvrent de nombreuses perspectives pour focaliser la lumière [48, 49] ou transférer de l'information [50] à travers des milieux diffusants.

Enfin, dans le domaine des micro-ondes, Azriel Genack et son groupe ont mesuré la matrice de transmission à travers un guide d'onde désordonné [51][Fig. 1.14(b)]. Ils ont étudié d'un point de vue fondamental la matrice de transmission en régime localisé. Ils ont notamment pu confronter avec succès leurs expériences à certaines prédictions de la théorie des matrices aléatoires appliquée au transport des ondes à travers les milieux désordonnés [52].

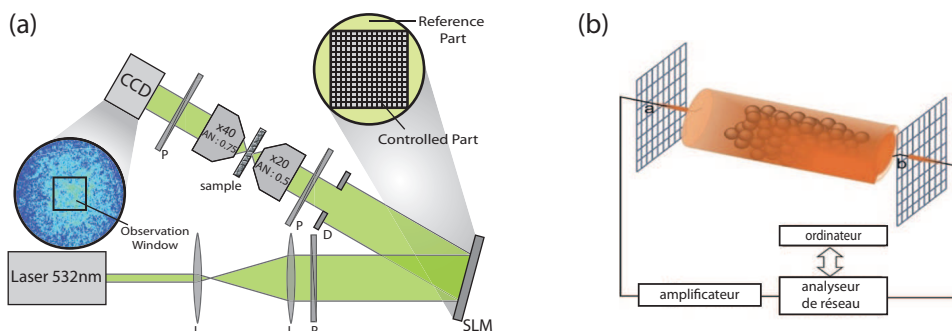


FIGURE 1.14 – Mesure de la matrice de transmission, (a) en optique, entre un modulateur spatial de lumière et une caméra CCD (figure issue de [48]), (b) en électromagnétisme, à l'aide de deux antennes et d'un analyseur de réseau (figure issue de [51]).

### 1.4 Objectifs

La première partie de cette thèse a consisté à étendre l'approche matricielle de la propagation des ondes afin de contrôler ou d'optimiser leur transport à travers les milieux désordonnés.

Le chapitre 2 aborde notamment le problème de l'optimisation du transfert d'énergie à travers un milieu diffusant. Alors que la description classique prévoit une transmission moyenne limitée par le pouvoir diffusant du milieu d'une part, et son épaisseur d'autre part [cf. sous-partie 1.1.2, p. 13], un résultat important de la théorie des matrices aléatoires est la prédiction d'un comportement bimodal pour la matrice de transmission : ses valeurs propres sont soit nulles, soit égales à l'unité. Autrement dit, l'onde voyage de façon (presque) binaire en empruntant des canaux ouverts ou fermés.



Le premier objectif de cette thèse a donc été d'observer l'existence de ces canaux puis de les utiliser afin de rendre un milieu diffusant totalement transparent ou opaque suivant la forme du front d'onde incident.

Alors que le chapitre 2 met en jeu des phénomènes d'interférence par essence monochromatiques et donc incohérents spectralement, le chapitre 3 a pour objectif de déterminer les canaux de propagation suivant lesquels une onde peut conserver sa cohérence à la fois spatiale et temporelle. L'existence de tels canaux n'est ni prédite par l'approche diffusive, ni par la théorie des matrices aléatoires. En nous basant sur de récents travaux théoriques de Stefan Rotter et ses collègues [53], nous montrerons comment accéder expérimentalement à ces états cohérents. L'excitation de ces derniers donnera lieu à des paquets d'onde fortement collimatés et se propageant le long de trajectoires classiques tout en mettant en jeu un certain nombre de réflexions spéculaires au sein du milieu.

## Références bibliographiques

- [1] Y.N. Barabanenkov and V.M. Finkel’Berg. Radiation transport equation for correlated scatterers. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 53 :978–986, 1967.
- [2] V.I. Tatarskii. The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation. *Jerusalem : Israel Program for Scientific Translations*, 1971, 1971.
- [3] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Courier Corporation, 2013.
- [4] A. Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*, volume 2. Academic press New York, 1978.
- [5] G.E. Thomas and K. Stamnes. *Radiative transfer in the atmosphere and ocean*. Cambridge University Press, 2002.
- [6] J.C.J. Paasschens. Solution of the time-dependent boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 56(1) :1135, 1997.
- [7] A. Tourin. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. PhD thesis, 1999.
- [8] A. Lagendijk and B.A. Van Tiggelen. Resonant multiple scattering of light. *Phys. Rep.*, 270(3) :143–215, 1996.
- [9] E. Akkermans and G. Montambaux. *Mesoscopic physics of electrons and photons*. Cambridge University Press, 2007.
- [10] J.H. Page, H.P. Schriemer, A.E. Bailey, and D.A. Weitz. Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound. *Phys. Rev. E*, 52(3) :3106, 1995.
- [11] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Oxford : Clarendon Press, 1959, 2nd ed., 1959.
- [12] J.X. Zhu, D.J. Pine, and D.A. Weitz. Internal reflection of diffusive light in random media. *Phys. Rev. A*, 44(6) :3948, 1991.
- [13] M.P. Van Albada and A. Lagendijk. Observation of weak localization of light in a random medium. *Phys. Rev. Lett.*, 55(24) :2692, 1985.
- [14] P.-E. Wolf and G. Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 55(24) :2696, 1985.
- [15] G. Bayer and T. Niederdränk. Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, 70(25) :3884, 1993.
- [16] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B.A. van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 79(19) :3637, 1997.
- [17] E. Larose, L. Margerin, B.A. Van Tiggelen, and M. Campillo. Weak localization of seismic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 93(4) :048501, 2004.
- [18] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5) :1492, 1958.
- [19] R.L. Weaver. Anderson localization of ultrasound. *Wave motion*, 12(2) :129–142, 1990.
- [20] A.A. Chabanov, M. Stoytchev, and A.Z. Genack. Statistical signatures of photon localization. *Nature*, 404(6780) :850–853, 2000.
- [21] R. Dalichaouch, J.P. Armstrong, S. Schultz, P.M. Platzman, and S.L. McCall. Microwave localization by two-dimensional random scattering. *Nature*, 356(6348) :53–55, 1991.

- [22] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect. Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder. *Nature*, 453(7197) :891–894, 2008.
- [23] H. Hu, A. Strybulevych, J.H. Page, S.E. Skipetrov, and B.A. van Tiggelen. Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network. *Nat. Phys.*, 4(12) :945–948, 2008.
- [24] I.M. Vellekoop and A.P. Mosk. Focusing coherent light through opaque strongly scattering media. *Opt. Lett.*, 32(16) :2309–2311, 2007.
- [25] I.M. Vellekoop, E.G. Van Putten, A. Lagendijk, and A.P. Mosk. Demixing light paths inside disordered metamaterials. *Opt. Express*, 16(1) :67–80, 2008.
- [26] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas, and F. Wu. Time-reversed acoustics. *Rep. Prog. Phys.*, 63(12) :1933, 2000.
- [27] M. Fink. Time-reversed acoustics. *SciAm*, 281(5) :91–97, 1999.
- [28] P. Roux, B. Roman, and M. Fink. Time-reversal in an ultrasonic waveguide. *Appl. Phys. Lett.*, 70(14) :1811–1813, 1997.
- [29] C. Draeger and M. Fink. One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2d-silicon cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 79(3) :407, 1997.
- [30] S. Yon, M. Tanter, and M. Fink. Sound focusing in rooms : The time-reversal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3) :1533–1543, 2003.
- [31] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink. Random multiple scattering of ultrasound. ii. is time reversal a self-averaging process? *Phys. Rev. E*, 64(3) :036606, 2001.
- [32] C. Prada and M. Fink. Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave motion*, 20(2) :151–163, 1994.
- [33] C. Prada, J.-L. Thomas, and M. Fink. The iterative time reversal process : Analysis of the convergence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97(1) :62–71, 1995.
- [34] M. Tanter, J.-L. Thomas, and M. Fink. Focusing and steering through absorbing and aberrating layers : application to ultrasonic propagation through the skull. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5) :2403–2410, 1998.
- [35] C. Prada, M. Tanter, and M. Fink. Flaw detection in solid with the dort method. In *Ultrasonics Symposium, 1997. Proceedings., 1997 IEEE*, volume 1, pages 679–683. IEEE, 1997.
- [36] C. Prada, J. de Rosny, D. Clorennec, J.-G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibrat, P. Billand, and T. Folégot. Detection and target echo enhancement in shallow water using the decomposition of the time reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(5) :3085–3085, 2007.
- [37] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard. Decomposition of the time reversal operator for electromagnetic scattering. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 13(5) :687–719, 1999.
- [38] S.M. Popoff, A. Aubry, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Exploiting the time-reversal operator for adaptive optics, selective focusing, and scattering pattern analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 107(26) :263901, 2011.
- [39] M. Tanter, J.-L. Thomas, and M. Fink. Time reversal and the inverse filter. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(1) :223–234, 2000.
- [40] M. Tanter, J.-F. Aubry, J. Gerber, J.-L. Thomas, and M. Fink. Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. i. basic principles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(1) :37–47, 2001.

## CHAPITRE 1. APPROCHE MATRICIELLE DE LA PROPAGATION EN MILIEUX COMPLEXES

---

- [41] M.L. Mehta. *Random Matrices*, volume 142. Academic press, 2004.
- [42] G.W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. An introduction to random matrices. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 118, 2009.
- [43] E.P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. *Ann. Math.*, 62(3) :548–564, 1955.
- [44] R. Sprik, A. Tourin, J. de Rosny, and M. Fink. Eigenvalue distributions of correlated multichannel transfer matrices in strongly scattering systems. *Phys. Rev. B*, 78(1) :012202, 2008.
- [45] A. Aubry and A. Derode. Singular value distribution of the propagation matrix in random scattering media. *Waves in Random and Complex Media*, 20(3) :333–363, 2010.
- [46] A. Aubry and A. Derode. Detection and imaging in a random medium : A matrix method to overcome multiple scattering and aberration. *Journal of Applied Physics*, 106(4) :044903, 2009.
- [47] A. Aubry and A. Derode. Random matrix theory applied to acoustic backscattering and imaging in complex media. *Phys. Rev. Lett.*, 102(8) :084301, 2009.
- [48] S.M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A.C. Boccaro, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics : an approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104(10) :100601, 2010.
- [49] Y. Choi, Timothy R. Hillman, W. Choi, N. Lue, R.R. Dasari, P.T.C. So, W. Choi, and Z. Yaqoob. Measurement of the time-resolved reflection matrix for enhancing light energy delivery into a scattering medium. *Phys. Rev. Lett.*, 111(24) :243901, 2013.
- [50] S. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccaro, and S. Gigan. Image transmission through an opaque material. *Nat. Commun.*, 1 :81, 2010.
- [51] Z. Shi and A.Z. Genack. Transmission eigenvalues and the bare conductance in the crossover to anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 108(4) :043901, 2012.
- [52] C.W.J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3) :731, 1997.
- [53] S. Rotter, P. Ambichl, and F. Libisch. Generating particlelike scattering states in wave transport. *Phys. Rev. Lett.*, 106(12) :120602, 2011.

---

## Canaux ouverts et fermés en milieux diffusants

---

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Transport de l'énergie à travers un milieu diffusant</b>	<b>31</b>
2.2.1	Matrice de diffusion ( <i>Scattering Matrix</i> )	32
2.2.2	Canaux propres de diffusion	33
2.2.3	Conductance, régimes de transport	33
2.2.4	Loi bimodale, canaux ouverts / fermés	34
<b>2.3</b>	<b>Système physique étudié</b>	<b>36</b>
2.3.1	Description et motivations	36
2.3.2	Géométrie du système	37
2.3.3	Méthodes expérimentales	37
<b>2.4</b>	<b>Mesure de la matrice <math>\mathbf{S}</math> en milieu diffusant</b>	<b>38</b>
2.4.1	Acquisition expérimentale de la matrice $\mathbf{S}$	39
2.4.2	Matrice $\mathbf{S}$ obtenue expérimentalement	40
2.4.3	Unitarité de la matrice $\mathbf{S}$	41
2.4.4	Origines et amplitudes des différentes sources de bruit expérimental	42
2.4.5	Correction des effets du bruit expérimental : normalisation de la matrice $\mathbf{S}$	44
<b>2.5</b>	<b>Réflexion et transmission totale d'une onde à travers un milieu diffusant</b>	<b>44</b>
2.5.1	Estimation de la conductance et du régime de transport	44
2.5.2	Estimation de la densité de probabilité des valeurs propres en transmission	44
2.5.3	Champ associé aux canaux de diffusion	46
2.5.4	Normalisation de la matrice $\mathbf{S}$ , comment retrouver les canaux ouverts malgré le bruit expérimental ?	49
<b>2.6</b>	<b>Conséquences du caractère bimodal de l'opérateur de propagation</b>	<b>52</b>
2.6.1	Focalisation à travers un milieu diffusant	52
2.6.2	Transfert d'information	53
<b>2.7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>55</b>
<b>2.A</b>	<b>Annexe</b>	<b>56</b>

## CHAPITRE 2. CANAUX OUVERTS ET FERMÉS EN MILIEUX DIFFUSANTS

---

2.A.1 Décomposition de la matrice $\mathbf{S}$ dans la base des modes propres du guide . . . . .	56
<b>Références bibliographiques</b> . . . . .	<b>60</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre traite du problème de l'optimisation de la transmission et de la réflexion d'une onde à travers un milieu diffusant. Comme nous l'avons décrit dans le chapitre précédent (partie 1.1.2, p. 13), le modèle diffusif prédit une transmission moyenne proportionnelle au rapport entre le libre parcours moyen de transport et l'épaisseur du milieu considéré (Eq. (1.29)). Cependant, comme vu au chapitre 1, le modèle diffusif ne prend pas en compte les phénomènes d'interférence qui peuvent résister au désordre. En 1984, Dorokhov [1] a notamment prédit un effet d'interférence spectaculaire entre les différents canaux de diffusion qu'empruntent une onde pour traverser un milieu désordonné. A partir de la théorie des matrices aléatoires, il a montré que la transmission à travers un milieu diffusant est le résultat d'un petit nombre de canaux ouverts associés à un coefficient de transmission  $T$  proche de l'unité. Cette prédiction est liée au comportement bimodal de la matrice de transmission dont les canaux propres sont soit presque totalement ouverts ( $T \sim 1$ ) ou fermés ( $T \sim 0$ ). Ce résultat surprenant n'a cependant jamais pu être observé directement du fait des conditions expérimentales drastiques qu'il sous-tend [2].

Nous nous proposons ici d'étudier la propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'onde désordonné afin de mettre en évidence le comportement bimodal de l'opérateur de propagation associé. Après avoir défini l'opérateur de diffusion (*Scattering-matrix*, notée  $\mathbf{S}$ ) et rappelé les conditions d'existence de son caractère bimodal, nous nous attacherons à motiver l'étude du système physique étudié. Nous montrerons alors comment la matrice  $\mathbf{S}$  peut être normalisée de façon à s'affranchir du bruit expérimental. Cette opération nous permettra de retrouver le comportement bimodal de la matrice de diffusion. Les techniques ultrasons-laser nous permettront ensuite de sonder les fonctions d'onde associées aux canaux ouverts et fermés au sein du milieu diffusant. Enfin, nous montrerons que l'accès aux canaux de propagation ouverts permet, plus généralement, de tirer profit de manière optimale de la complexité d'un milieu désordonné, que ce soit à des fins de focalisation ou de communication à travers ce dernier.

## 2.2 Transport de l'énergie à travers un milieu diffusant

La première partie de ce chapitre s'attache à la définition du cadre théorique ainsi qu'à la description des différents outils nécessaires à l'optimisation du transport en milieu diffusant. Nous commençons donc par décrire le formalisme de la matrice de diffusion, avant, dans un second temps, d'en décrire les différents éléments propres à travers la notion de canaux propres de diffusion. Dans une troisième partie, nous montrons que

## CHAPITRE 2. CANAUX OUVERTS ET FERMÉS EN MILIEUX DIFFUSANTS

---

la donnée des valeurs propres en transmission permet de définir la conductance afin de caractériser les différents régimes de transport. Enfin, nous rappelons dans une quatrième partie le caractère bimodal de l'opérateur de propagation théoriquement prévu en régime diffusif, tout en insistant sur le défi expérimental que représente l'accès aux canaux ouverts en transmission.

### 2.2.1 Matrice de diffusion (*Scattering Matrix*)

Comme souligné précédemment, bien avant qu'elle puisse être mesurée expérimentalement, la matrice de diffusion a fait l'objet de nombreuses études théoriques, notamment en physique du solide pour expliquer le transport des électrons à travers des conducteurs désordonnés [3]. Il s'agit de la théorie des matrices aléatoires appliquée au transport des ondes à travers les milieux diffusants.

Considérons un milieu désordonné bi-dimensionnel fermé, aux extrémités duquel il est possible de mesurer le champ entrant et le champ sortant via deux guides d'ondes parfaits [Fig. 2.1]. L'opérateur de propagation associé au milieu désordonné se décompose alors dans la base des  $N$  modes propres de chacun des guides d'onde situés respectivement à gauche et à droite du milieu. Dans cette base, une onde se propageant en direction du milieu ( $\mathbf{c}_e$ ) et une onde sortant du milieu ( $\mathbf{c}_s$ ) peuvent s'écrire sous une forme vectorielle :

$$\mathbf{c}_e \equiv \begin{bmatrix} a_1^+ & \cdots & a_N^+ & b_1^- & \cdots & b_N^- \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{c}_s \equiv \begin{bmatrix} a_1^- & \cdots & a_N^- & b_1^+ & \cdots & b_N^+ \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice de diffusion, notée  $\mathbf{S}$  (*Scattering matrix*), est une matrice de taille  $2N \times 2N$  reliant ces deux vecteurs selon la relation :

$$\mathbf{c}_s = \mathbf{S} \mathbf{c}_e. \quad (2.3)$$

Elle s'écrit en fonction des matrices de réflexion et transmission décrites précédemment sous la forme :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Dans cette représentation sous forme de matrice par blocs,  $\mathbf{r}$  (respectivement  $\mathbf{r}'$ ) représente la matrice de rétrodiffusion mesurée à gauche de l'échantillon (respectivement à droite) alors que  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}'$  représentent les matrices de transmission (de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche, respectivement).



FIGURE 2.1 – Milieu désordonné fermé (au centre) relié par deux guides d'ondes parfaits à gauche et à droite.



## 2.2. TRANSPORT DE L'ÉNERGIE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

### 2.2.2 Canaux propres de diffusion

La conservation de l'énergie entraîne l'unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$ . Cela impose aux quatre matrices hermitiennes  $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$ ,  $\mathbf{t}'\mathbf{t}'^\dagger$ ,  $1-\mathbf{r}\mathbf{r}^\dagger$  et  $1-\mathbf{r}'\mathbf{r}'^\dagger$  (où l'obèle  $\dagger$  est utilisé pour représenter l'adjoint de la matrice considérée) d'avoir le même spectre  $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ . Chacune de ces  $N$  valeurs propres de transmission est un nombre réel compris entre 0 et 1. La matrice de diffusion peut alors se décomposer de la manière suivante :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{1-\mathcal{T}} & \sqrt{\mathcal{T}} \\ \sqrt{\mathcal{T}} & \sqrt{1-\mathcal{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Dans cette décomposition dite *polaire*,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont deux matrices unitaires de dimension  $N \times N$  et  $\mathcal{T}$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux correspondent aux coefficients de transmission  $T_i$ . Les colonnes  $\mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{V}_i$  des matrices  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  correspondent aux *canaux propres de diffusion*, mesurés respectivement à gauche et à droite du milieu désordonné. Ils sont associés, en amplitude, à un coefficient de transmission  $\sqrt{T_i}$  et à un coefficient de réflexion  $\sqrt{1-T_i}$ .

Physiquement, cette représentation indique que si l'on injecte à gauche du milieu considéré l'onde correspondant au  $i$ -ème canal propre de diffusion  $\mathbf{U}_i$ , l'énergie sera transmise à travers le milieu vers le canal propre de diffusion correspondant à droite  $\mathbf{V}_i$ , avec une amplitude  $\sqrt{T_i}$ . La réflexion se fera, elle, avec une amplitude  $\sqrt{1-T_i}$  vers le canal propre de diffusion à gauche  ${}^t\mathbf{U}_i$  [Fig. 2.2].

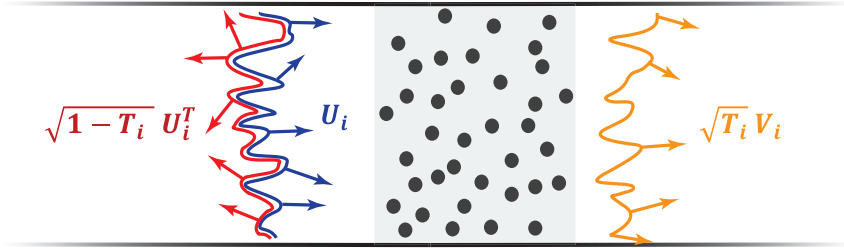


FIGURE 2.2 – Propagation d'une onde à travers le  $i$ -ème canal propre de diffusion à gauche du milieu désordonné,  $\mathbf{U}_i$ .

### 2.2.3 Conductance, régimes de transport

La connaissance des  $N$  valeurs propres de transmission permet de déterminer de nombreuses propriétés du transport des ondes dans le milieu. Le plus fondamental de ces paramètres est la conductance  $g$  définie comme la somme de ces valeurs propres (formule dite *de Landauer* [4, 5]) :

$$g = \sum_{i=1}^N T_i. \quad (2.6)$$

La valeur de  $g$  permet de déterminer la transmission totale ainsi que le régime de diffusion dans lequel se situe l'onde transmise.

↪ Si  $L < \ell^*$ , l'onde est en régime balistique (peu ou pas de diffusion). La conductance  $g$  est alors égale au nombre de canaux ( $g = N$ ), toutes les valeurs propres  $T_i$  sont égales à l'unité et les canaux sont tous ouverts (caractère unimodal de l'opérateur de propagation).

↪ Si  $\ell^* < L < N\ell^*$ , l'onde est en régime diffusant. La conductance  $g$  s'exprime alors simplement en fonction du ratio entre le libre parcours moyen et l'épaisseur du milieu désordonné,

$$g = N\ell^*/L. \quad (2.7)$$

On retrouve la loi d'Ohm, caractéristique du régime diffusif qui avait été démontrée dans le cas d'un milieu ouvert éclairé par une onde plane (partie 1.1.2, p. 13). Comme nous le verrons dans la suite (partie 2.2.4, p. 34), l'opérateur de propagation présente alors un caractère bimodal.

↪ Si  $L > N\ell^*$ , nous entrons dans le régime de localisation : la transmission est exponentiellement décroissante ( $g = \exp(-L/\ell_e) < 1$ ) et le caractère bimodal disparaît (tous les canaux sont fermés).

## 2.2.4 Loi bimodale, canaux ouverts / fermés

### Densité de probabilité des valeurs propres en transmission $T_i$

La distribution des valeurs propres en transmission dans ce type de configuration a été établie tout d'abord par Dorokhov en 1984 [1], puis par Mello, Pereyra et Kumar en 1988 [6]. Celle-ci repose sur l'équation DMPK (pour Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar), qui décrit le comportement des valeurs propres de transmission comme un mouvement brownien dans le cadre de l'hypothèse dite d'*ergodicité transverse*.

Cette approche prend la forme d'une théorie d'échelle unidimensionnelle pour les valeurs propres de transmission de la matrice  $\mathbf{S}$ . Le guide d'onde est envisagé comme une succession de tranches faiblement désordonnées. Dès lors qu'un grand nombre de ces tranches sont accolées, le théorème central limite assure qu'il est possible d'en retrouver les propriétés universelles indépendamment des propriétés de chacune des tranches.

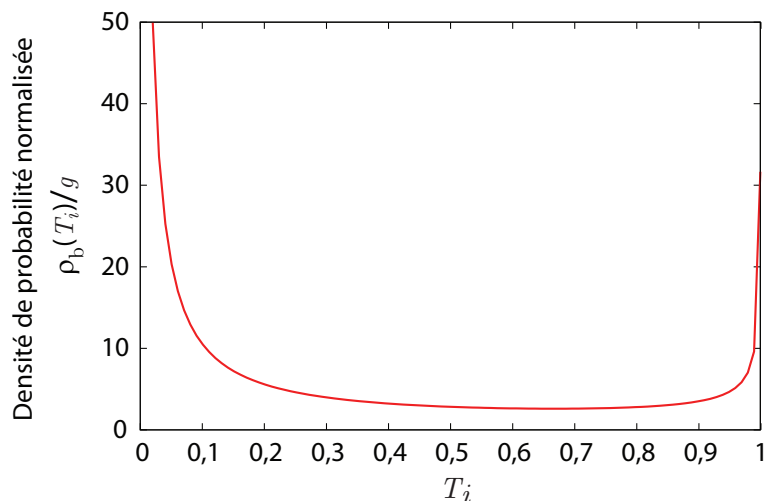


FIGURE 2.3 – Représentation de la loi bimodale en transmission normalisée par la conductance  $g$ , c.-à-d. distribution de la probabilité des valeurs propres de transmission  $T_i$ .

En régime diffusif, la distribution des valeurs propres en transmission suit la loi

## 2.2. TRANSPORT DE L'ÉNERGIE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

---

*bimodale* représentée par l'équation :

$$\rho_b(T_i) = \frac{N \cdot \ell^*}{2L} \cdot \frac{1}{T_i \sqrt{1 - T_i}} = \frac{g/2}{T_i \sqrt{1 - T_i}}. \quad (2.8)$$

Cette équation, dont la représentation graphique normalisée par la conductance est présentée sur la figure 2.3, implique que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{tt}^\dagger$  seront presque sûrement soit nulles (pour un nombre  $N - g$  d'entre elles), soit égales à l'unité (pour un nombre  $g$  d'entre elles). Les canaux de diffusion que pourra emprunter l'onde seront donc soit totalement ouverts (cas d'une valeur propre égale à l'unité) – auquel cas l'onde est entièrement transmise à travers le milieu désordonné – soit totalement fermés (cas d'une valeur propre nulle) – auquel cas l'onde est entièrement rétrodiffusée par le milieu désordonné.

### Effets d'un *Contrôle incomplet des canaux* [2]

Malgré le grand intérêt suscité par ses différentes conséquences présentées ci-dessus, la vérification expérimentale du caractère bimodal de l'opérateur de propagation tout comme l'accès expérimental aux canaux de propagation ouverts ont été contrariés. En effet, Goetschy et Stone [2] ont montré théoriquement qu'il était nécessaire d'exciter et de mesurer l'ensemble des modes du système considéré. Cette nécessité s'est révélée être un obstacle majeur pour les expérimentateurs. Lors des premières mesures de l'opérateur de propagation en acoustique [7, 8] puis en optique [9], la distribution des valeurs propres en transmission a pu être comparée à la loi de Marčenko–Pastur [10, 11] plutôt qu'avec la loi bimodale (Eq. (2.8)), caractérisant ainsi l'absence de corrélations entre les différents éléments de la matrice. La mesure de plus grandes sous-parties de la matrice  $\mathbf{S}$  a alors été entreprise en optique [12] ou encore au sein de guides d'onde, dans le domaine des micro-ondes [13], sans toutefois parvenir à accéder expérimentalement aux canaux ouverts.

### Mise en évidence indirecte du caractère bimodal de l'opérateur de propagation

Le caractère bimodal de l'opérateur de propagation a cependant pu être mis en évidence expérimentalement de façon indirecte à travers la diminution de la puissance du niveau de bruit *de grenaille*.

Le bruit de grenaille est lié au caractère discret des quanta d'énergie, qu'il s'agisse de photons ou d'électrons. Ainsi, en électronique, les variations du nombre de porteurs de charges collectés par unité de temps entraînent une variation de l'intensité mesurée autour de sa valeur moyenne. En l'absence de corrélations entre les porteurs de charge, la puissance du bruit résultant peut, pour un voltage  $V$  donné, être modélisée par une loi de Poisson,

$$P_{\text{Poisson}} = 2e|V|G, \quad (2.9)$$

où  $e$  représente la charge élémentaire et  $G$  la conductance, définie en électronique de façon légèrement différente de l'équation (2.6) comme  $G = \frac{e^2}{\hbar} \sum_i T_i$ ,  $\hbar$  étant la constante de Planck réduite.

La présence de corrélations entre les porteurs de charge entraîne une réduction de la puissance du bruit de grenaille à un niveau inférieur à celui décrit dans l'équation

(2.9). Beenaker *et al.* [14] ont ainsi montré que les effets d'interférence résultant des fortes corrélations induites par la présence de canaux ouverts réduisent la puissance du bruit de grenaille au tiers de sa valeur classique,

$$P_b = \frac{2}{3}e|V|G. \quad (2.10)$$

Cette prédiction a pu être vérifiée expérimentalement par Henny *et al.* [15] à la fin des années 90, donnant alors, bien qu'indirectement, une première vérification expérimentale du caractère bimodal de l'opérateur de propagation.

Plus récemment, Vellekoop *et al.* [16] ont également apporté une démonstration indirecte de cette prédiction en optique, à travers une augmentation de la transmission diffuse. Ce résultat repose sur une optimisation du front incident de façon à le coupler préférentiellement aux canaux ouverts existants au sein du milieu. Toutefois, leur dispositif expérimental n'offre qu'un contrôle partiel de l'illumination et ne permet donc pas d'exciter individuellement les canaux ouverts.

### 2.3 Système physique étudié

L'objectif de l'étude expérimentale présentée dans ce chapitre réside dans la démonstration directe du caractère bimodal de l'opérateur de propagation en milieu diffusant, puis dans l'accès aux fonctions d'ondes associées aux différents canaux de propagation. Dans cette partie, nous nous proposons de décrire successivement le système physique ainsi que les méthodes expérimentales développés pour y parvenir.

#### 2.3.1 Description et motivations

Nous étudions ici la propagation d'ondes de flexion à travers une plaque de Duralumin [Fig. 2.5]. Le désordre est introduit au sein de ce guide d'onde homogène sous la forme de trous débouchants distribués aléatoirement. Les ondes élastiques sont excitées et détectées au moyen de techniques ultrason-laser [17].

Comme souligné précédemment, le comportement bimodal de l'opérateur de propagation ne peut être vérifié qu'au sein d'un système fermé, pour lequel l'énergie est conservée d'une part, mais également aux bords duquel on accède à l'ensemble des canaux de diffusion (que ce soit en émission ou en réception). La géométrie de type guide d'onde choisie permet la mesure du champ de part et d'autre du milieu désordonné tout en évitant les pertes d'énergie liées à un milieu ouvert. Enfin, ce système présente également différents avantages expérimentaux. En effet, les techniques ultrason-laser permettent d'engendrer préférentiellement des ondes de flexion dans les plaques minces et de mesurer avec une grande résolution spatiale le déplacement vertical associé à la propagation de ces ondes, à l'aide d'un montage interférométrique.

Nous avons donc accès à un contrôle spatio-temporel du champ ultrasonore sur la totalité de la surface d'une plaque mince. Cette souplesse devrait nous permettre non seulement de mesurer l'ensemble de l'opérateur de propagation entre deux sections de la plaque situées de part et d'autre du milieu désordonné mais aussi de visualiser le champ associé aux différents canaux propres de diffusion du système.

### 2.3.2 Géométrie du système

La géométrie et les caractéristiques du système ont été choisies de façon à vérifier les hypothèses requises pour l'obtention d'un comportement bimodal pour la matrice de diffusion. Comme décrit précédemment, cette vérification expérimentale est délicate, aussi le choix des différents paramètres du système est essentiel.

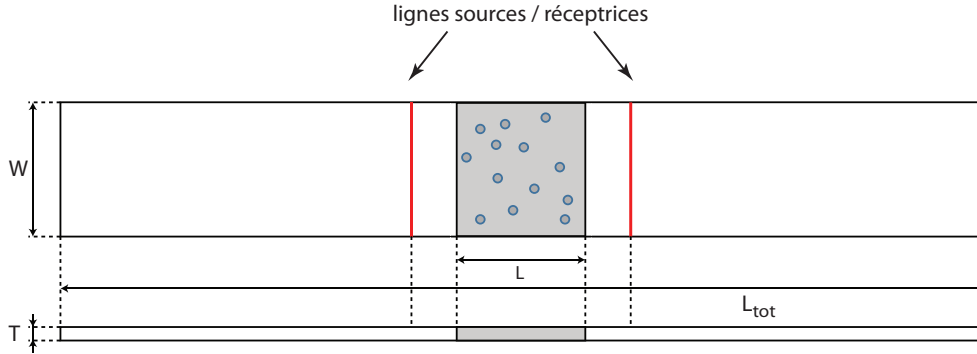


FIGURE 2.4 – Géométrie retenue pour le système étudié.

En se référant aux notations de la figure 2.4, les différents paramètres à fixer sont la longueur  $L_{tot}$ , la largeur  $W$  et l'épaisseur  $T$  du guide, le diamètre des trous  $d$ , l'épaisseur du milieu désordonné  $L$ . La fréquence centrale autour de laquelle nous travaillons est  $f = 0,35$  MHz, pour laquelle la longueur d'onde vaut  $\lambda = 3,5$  mm.

- ↪ L'épaisseur du guide  $T$  est fixée à 0,5 mm de façon à entrer dans le cadre de la théorie des plaques minces. On vérifie que les modes de flexion et de compression sont bien découplés.
- ↪ La largeur du guide détermine le nombre  $N$  de modes indépendants pouvant se propager dans le guide ( $N = \frac{W}{\lambda/2}$ ). On fixe  $W = 40$  mm afin d'avoir, dans la bande de fréquence étudiée ( $[0,32 - 0,37]$  MHz) un nombre  $N \sim 20$  modes de propagation dans la largeur.
- ↪ Le diamètre des trous doit être de l'ordre de la demi longueur d'onde afin d'optimiser leur section efficace de diffusion. Nous avons fixé  $d = 1,5$  mm.
- ↪ L'épaisseur et la concentration en trous du milieu désordonné sont fixées respectivement à  $L = 20$  mm et  $n = 11 \text{ cm}^{-2}$ . Nous verrons dans la suite que ces conditions nous permettent de nous situer en régime diffusant sur la bande de fréquence étudiée.
- ↪ La longueur totale du guide d'onde est quant à elle de 50 cm. Comme nous le verrons ultérieurement, une telle plaque permet l'enregistrement de signaux suffisamment longs ( $\sim 120 \mu\text{s}$ ) pour capter la quasi totalité de l'énergie diffusée par le milieu.

L'ensemble des paramètres est résumé dans le tableau 2.1.

### 2.3.3 Méthodes expérimentales

Comme nous l'avons souligné dans la sous-partie 2.2.4 (p. 34), les mécanismes de génération et de détection des ondes de flexion jouent un rôle déterminant dans notre étude. Nous présentons ici les méthodes expérimentales utilisées, permettant non seulement la mesure de l'ensemble de la matrice de diffusion, mais aussi celle du champ au sein du milieu désordonné.

Paramètres géométriques	Valeur retenue (mm)
T	0,5
W	40
d	1,5
$L$	20
$L_{\text{Tot}}$	500

Tableau 2.1 – Dimensions du système étudié expérimentalement.

### Génération d'ondes par effet thermoélastique

Les ondes sont ici engendrées par effet thermoélastique à l'aide d'un laser (Nd:YAG,  $\lambda = 1064$  nm). La surface de la plaque est irradiée au moyen d'impulsion laser de durée 20 ns. Une partie de l'énergie incidente est absorbée par le solide, puis convertie en chaleur par effet Joule. La zone éclairée par le laser joue donc le rôle de source thermique et engendre une déformation mécanique. Une telle source n'est censée produire que des ondes longitudinales, néanmoins, en pratique, la présence d'une interface permet leur conversion en ondes transverses.

Deux régimes sont à distinguer selon la quantité d'énergie lumineuse déposée sur la surface : le régime thermoélastique d'une part, pour lequel l'état de surface n'est pas modifié et le régime d'ablation d'autre part, pour lequel une partie de la matière est vaporisée, qui apparaît au delà d'une certaine puissance absorbée (15 MW/cm<sup>2</sup> pour le Duralumin). Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes placés dans le régime thermoélastique afin d'assurer la répétabilité de nos mesures.

### Technique de mesure ultrason-laser

La mesure des déplacements orthogonaux à la plaque se fait à l'aide d'un interféromètre hétérodyne de type Mach Zender développé au laboratoire par Daniel Royer [18], et commercialisé sous le nom de *sonde SH-130* par la société *Thalès laser*. Cet interféromètre mesure des déplacements de l'ordre de l'ångström et ce, sur une large bande de fréquence (l'électronique de détection réduit cette bande à 20 KHz - 20 MHz). Le déplacement normal mesuré se déduit du signal électrique temporel en sortie de l'interféromètre via un facteur de calibration (10 nm/V) constant sur la bande de travail (100 kHz - 400 kHz).

## 2.4 Mesure de la matrice $\mathbf{S}$ en milieu diffusant

Cette partie s'attache à décrire la mesure de la matrice de diffusion. Nous commençons par exposer les différentes opérations permettant son acquisition avant d'en analyser la forme obtenue expérimentalement. L'unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$  est ensuite questionnée pour vérifier l'hypothèse de conservation de l'énergie, puis pour quantifier le niveau de bruit dans nos mesures.

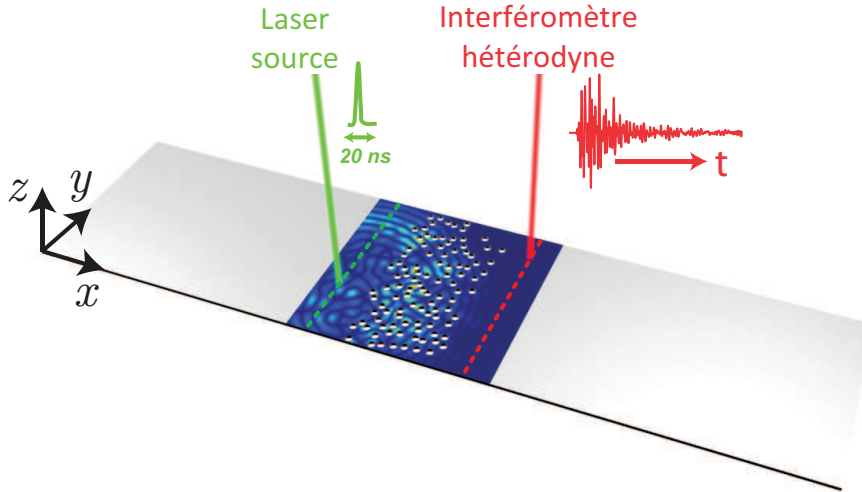


FIGURE 2.5 – Représentation du montage expérimental.

### 2.4.1 Acquisition expérimentale de la matrice $\mathbf{S}$

#### Acquisition dans l'espace réel

Le principe de l'acquisition point à point dans l'espace réel de la matrice  $\mathbf{S}$  est présenté sur la figure 2.1. La première étape consiste à mesurer l'ensemble des réponses impulsionnelles entre les différents points des lignes source et réceptrice, placées à 5 mm de la tranche diffusante. Afin de garantir un échantillonnage suffisant, le pas  $\Delta y$  entre chaque point source/récepteur est de 0,8 mm (*i.e.*  $\Delta y < \lambda/2$ ). Les lignes source et réceptrice sont définies successivement à gauche ou à droite du milieu désordonné de façon à mesurer chacun des blocs de la matrice de diffusion définis dans l'équation (2.4).

Dans un second temps, la matrice est exprimée dans la bande de fréquence  $[0,32 - 0,37]$  MHz à l'aide d'une transformée de Fourier temporelle sur une durée  $\Delta t = 120 \mu s$ . Cette intervalle de temps est choisi de façon à exclure les réflexions sur les extrémités du guide telles que représentées sur la figure 2.6. En effet, ces dernières brisent la conservation de l'énergie au sein du système. Afin de minimiser la perte d'information, la plaque utilisée doit être suffisamment longue pour que la quasi-totalité de l'énergie injectée ait quitté le milieu diffusant.

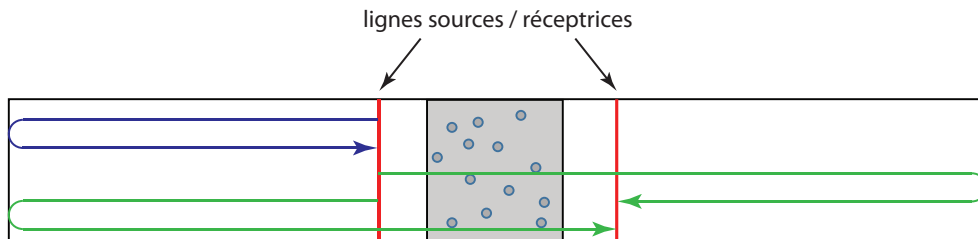


FIGURE 2.6 – Représentation des trajets les plus courts brisant la conservation de l'énergie. Le trajet représenté en bleu correspond au cas d'une mesure en réflexion, les trajets représentés en vert au cas d'une mesure en transmission.

### Expression de la matrice dans la base des modes propres du guide

Afin de confronter les mesures aux différentes prédictions théoriques, la matrice de diffusion doit être exprimée dans une base au sein de laquelle chacun des modes du système est associé à un flux d'énergie unitaire. Pour y parvenir, la matrice  $\mathbf{S}$  est décomposée à chaque fréquence dans la base des modes propres du guide, sous la forme d'une matrice  $\mathbf{S}'$ . La description des modes propres du guide et de l'opération de normalisation est donnée en annexe de ce chapitre [cf. annexe 2.A.1, p. 56].

### Suppression du front incident

À ce stade, la matrice  $\mathbf{S}'$  obtenue n'est pas à proprement parler la matrice de diffusion du système. En effet, elle est composée à la fois du champ diffusé par le milieu désordonné et du champ incident. Ce dernier étant identique pour chacun des points de mesure, la matrice  $\mathbf{S}'$  peut s'exprimer en fonction de la matrice de diffusion et d'une matrice diagonale correspondant au champ incident, selon l'équation,

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + A \exp(i \cdot \phi_i) \cdot \mathbf{I}_{2N}, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{I}_{2N}$  désigne la matrice identité de dimension  $2N$ .  $A$  et  $\phi_i$  représentent l'amplitude et la phase du champ incident. L'observation de la partie réelle de la matrice  $\mathbf{S}'$  exprimée dans l'espace des modes propres de la plaque [Fig. 2.7] permet de mettre en évidence le champ incident suivant la diagonale de la matrice  $\mathbf{S}'$ .

Il est possible de séparer chacune des composantes mises en évidence par l'équation (2.11) à l'aide de leurs propriétés statistiques. En effet, alors que le champ incident est constant, les éléments de la matrice  $\mathbf{S}$  ont une phase aléatoire et leur moyenne d'ensemble est donc nulle. Il est alors possible d'extraire la matrice  $\mathbf{S}$  de la matrice  $\mathbf{S}'$  en supprimant la contribution constante de l'onde incidente. La première étape consiste à diagonaliser la matrice  $\mathbf{S}'$ , afin d'en définir les vecteurs propres sous formes de colonnes de la matrice  $\mathbf{V}$  et les valeurs propres  $d_i$ , éléments de la matrice diagonale  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{S}' = \mathbf{VDV}^{-1}. \quad (2.12)$$

Les valeurs propres  $\Lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{S}$  se déduisent alors de celles de  $\mathbf{S}'$  en leur retranchant leur valeur moyenne, notée  $\bar{d}_i$ , de ces dernières,

$$s_i = d_i - \bar{d}_i. \quad (2.13)$$

La matrice de diffusion s'écrit alors,

$$\mathbf{S} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est la matrice diagonale composée des éléments  $s_i$ .

#### 2.4.2 Matrice $\mathbf{S}$ obtenue expérimentalement

La partie réelle de la matrice de diffusion mesurée à la fréquence  $f = 0,36$  MHz est présentée sur la figure 2.7(b). On observe que les matrices de réflexions  $\mathbf{r}_p$  et  $\mathbf{r}'_p$  ont une apparence aléatoire, témoignant ainsi de la redistribution de chaque mode incident dans une combinaison linéaire de la totalité des modes du guide. À l'inverse, on distingue la persistance d'un front balistique résiduel à travers une légère prédominance des diagonales sur les deux matrices de transmission  $\mathbf{t}_p$  et  $\mathbf{t}'_p$ . La matrice de diffusion présente également des corrélations de longue portée, responsables du comportement bimodal que nous mettrons en évidence par la suite.



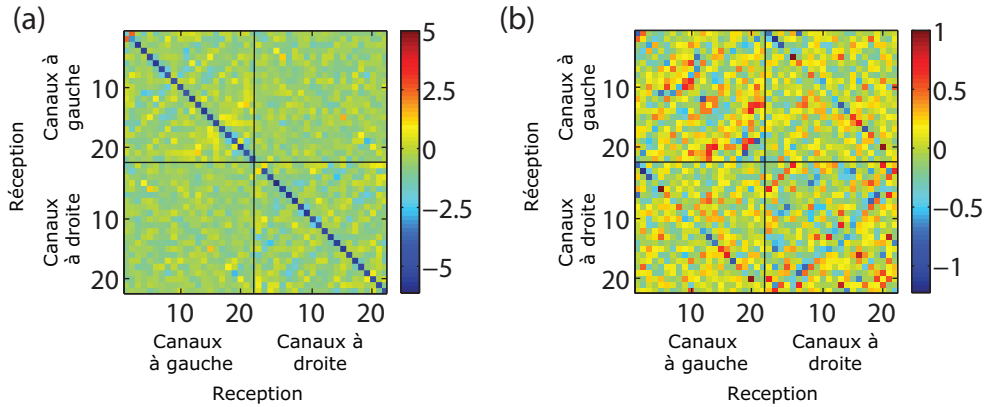


FIGURE 2.7 – Partie réelle des matrices (a)  $\mathbf{S}'$  et (b)  $\mathbf{S}$  mesurées à la fréquence  $f = 0,36$  MHz. Les lignes noires délimitent les quatre blocs décrits sur les équations (2.4) et (2.49).

### 2.4.3 Unitarité de la matrice $\mathbf{S}$

Comme souligné dans la sous-partie 2.2 (p. 31), la conservation de l'énergie au sein du système implique théoriquement l'unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$  associée, c.-à-d. que l'ensemble de ses valeurs propres soient distribuées sur le cercle unité. C'est cette condition que nous allons considérer afin de vérifier l'hypothèse de conservation de l'énergie au sein de notre système. Pour ce faire, les valeurs propres  $s_i$  de la matrice de diffusion mesurée à  $f = 0,36$  MHz sont représentées dans le plan complexe [Fig. 2.8]. Bien que leur dispersion autour du cercle unité remette en question la fermeture du système, il est possible de montrer que ni l'atténuation ni d'éventuelles conversions de modes ne sont responsables de cet effet.

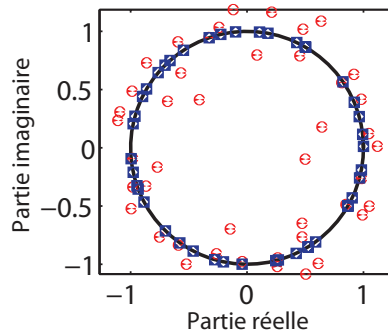


FIGURE 2.8 – Représentation dans le plan complexe des valeurs propres  $s_i$  (disques rouges) de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée et  $\hat{\mathbf{S}}$ , normalisée. Le cercle unité est représenté par la ligne noire continue.

Deux termes d'atténuation sont à considérer au sein du système : l'un lié à la dissipation des ondes élastiques au sein du matériau, l'autre associé au rayonnement des ondes élastiques dans l'air environnant. Concernant le premier terme, l'hypothèse de conservation de l'énergie est raisonnable pour des ondes se propageant dans le Duralumin, étant donné son coefficient d'atténuation particulièrement faible d'une part ( $\alpha_a \sim 1,7 \text{ dB}\cdot\text{m}^{-1}$  dans la bande de fréquence  $[0,1 - 0,5]$  MHz) et les distances de propagation – de l'ordre de la dizaine de centimètres – mises en jeu d'autre part. De

leur côté, les pertes radiatives liées à la conversion des ondes élastiques en ondes acoustiques dans l'air peuvent également être négligées ici ( $\alpha_r \sim 1 \text{ dB}\cdot\text{m}^{-1}$  à  $f = 0,36 \text{ MHz}$ ) compte tenu, là encore, des faibles distances de propagation mises en jeu.

Enfin, il est indispensable que les modes de flexion et de compression ne se couplent pas au fil de la propagation. En effet, étant donné que nous ne mesurons que les premiers, un tel couplage entraînerait une variation de la quantité d'énergie mesurée. Néanmoins, les modes de flexion et de compression étant respectivement associés à des déplacements symétriques et antisymétriques par rapport au plan médian de la plaque, l'invariance des diffuseurs dans la direction  $\mathbf{z}$  interdit théoriquement le couplage entre ces deux familles de modes [19].

#### 2.4.4 Origines et amplitudes des différentes sources de bruit expérimental

La non-unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$  mise en évidence sur la figure 2.8 s'explique en fait par le bruit expérimental. Dans cette partie, nous allons donc dans un premier temps estimer ce niveau de bruit avant, dans une seconde partie, d'en établir la nature et les différentes origines.

##### Quantification du bruit expérimental

Le rapport signal-à-bruit dans nos mesures a été estimé en confrontant nos mesures aux hypothèses de réciprocité théorique. En effet, le principe de réciprocité implique la stricte égalité  $r_{ij} = r_{ji}$  et  $r'_{ij} = r'_{ji}$  des éléments des opérateurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  mesurés en réflexion ainsi que l'égalité  $t_{ij} = t'_{ji}$  des éléments des opérateurs  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{t}'$  mesurés en transmission. Le bruit expérimental ayant pour effet d'empêcher cette stricte égalité, le rapport signal-à-bruit de nos mesures peut être estimé suivant l'expression :

$$SNR = -\frac{1}{4} \left[ 10 \log_{10} \times \left( \frac{\langle |r_{ij} - r_{ji}|^2 \rangle_{\{(i,j)|i \neq j\}}}{\langle |r_{ij}|^2 \rangle_{\{(i,j)|i \neq j\}}} \right) + 10 \log_{10} \times \left( \frac{\langle |r'_{ij} - r'_{ji}|^2 \rangle_{\{(i,j)|i \neq j\}}}{\langle |r'_{ij}|^2 \rangle_{\{(i,j)|i \neq j\}}} \right) + 2 \times 10 \log_{10} \left( \frac{\langle |t_{ij} - t'_{ji}|^2 \rangle_{\{(i,j)\}}}{\langle |t_{ij}|^2 \rangle_{\{(i,j)\}}} \right) \right], \quad (2.15)$$

dans laquelle les crochets  $\langle \dots \rangle$  représentent la moyenne d'ensemble sur les éléments en indice. En suivant cette méthode, le ratio signal-à-bruit expérimental est estimé à 8,5 dB, correspondant à des fluctuations d'intensité de l'ordre de 14 %.

##### Nature et origines du bruit expérimental

Afin d'étudier les différentes origines du bruit expérimental, celles-ci sont dans un premier temps mises en évidence sur une série de 100 réponses impulsionnelles mesurées pour le même couple de source / récepteur [Fig. 2.9(a)]. Nous avons fait ce choix de façon à correspondre aux conditions expérimentales, pour lesquelles chaque point est utilisé 100 fois comme source durant la mesure de l'ensemble de la matrice  $\mathbf{S}$ .

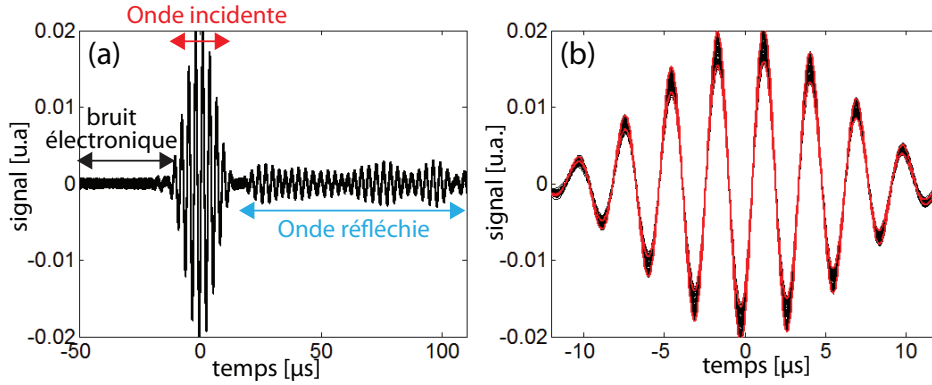


FIGURE 2.9 – (a) Série de 100 réponses impulsionnelles mesurées pour un même couple de source / récepteur. Les signaux présentés sont filtrés sur la bande de fréquence  $[0,3 - 0,4]$  MHz.

La figure 2.9(a) permet de mettre en évidence les différentes sources de bruit ainsi que leur nature. La première partie du signal (de  $-50 \mu\text{s}$  à  $-10 \mu\text{s}$ ) correspond au bruit électronique additif. La deuxième partie (de  $-10 \mu\text{s}$  à  $+10 \mu\text{s}$ ) représente le signal source ; un agrandissement de cette partie du signal est présenté sur la figure 2.9(b). Enfin, la troisième partie (de  $+10 \mu\text{s}$  à  $+120 \mu\text{s}$ ) est constituée des signaux réfléchis par la tranche de milieu désordonné. L’analyse de ces différentes parties du signal permet de mettre en évidence les différentes sources de bruit.

- ↪ La première source de bruit est issue des déformations de la surface de la plaque induites par le laser. En effet, afin d’obtenir un rapport signal-à-bruit suffisant, il est nécessaire de travailler dans un régime proche du régime d’ablation [17]. Le changement de l’état de surface après chaque tir – bien que très léger – entraîne des fluctuations de l’efficacité de la conversion thermoélastique mises en évidence sur la figure 2.9(b). Cet effet se manifeste comme un *bruit multiplicatif* dont l’intensité est de 1 %.
- ↪ La deuxième source de bruit provient des fluctuations de puissance du laser. Ces fluctuations ont pu être mesurées à l’aide d’un *puissance mètre* et correspondent également – sur les 20 heures que durent la mesure – à un bruit multiplicatif dont l’intensité est de 1,5 %.
- ↪ La troisième source de bruit est liée au bruit électronique additif mis en évidence sur la figure 2.9(a). Elle est responsable d’un bruit additif dont l’intensité est de 5 % en réflexion et de 10 % en transmission, l’intensité mesurée étant deux fois plus faible en transmission qu’en réflexion dans notre système. Le niveau de ce bruit peut-être réduit en faisant davantage de moyennes. Cependant, il aurait alors fallu davantage de tirs laser en chaque point, ce qui serait fait au détriment de la répétabilité de la conversion thermoélastique. La solution retenue consiste donc en un compromis entre le bruit électronique additif et le bruit multiplicatif lié aux variations de l’état de surface mis en évidence dans le point précédent.
- ↪ Enfin, la dernière source de bruit est liée aux aléas de calibration de l’interféromètre hétérodyne. Pour environ 4 % des points de mesure, la réflexion spéculaire de la lumière sur la plaque est affectée par sa rugosité ainsi que la courbure de la plaque proche de chacun de ses bords liée à l’usinage de celle-ci. Ce problème de calibration résulte, une fois la matrice  $\mathbf{S}$  projetée dans la base des modes propres du guide, en un bruit multiplicatif de l’ordre de 4 % en intensité.

### 2.4.5 Correction des effets du bruit expérimental : normalisation de la matrice $\mathbf{S}$

Afin de compenser les effets du bruit, une matrice virtuelle  $\hat{\mathbf{S}}$  est construite en utilisant les mêmes espaces propres que ceux de la matrice  $\mathbf{S}$  mais avec des valeurs propres normalisées [Fig. 2.8],

$$\hat{s}_i = s_i / |s_i|, \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

Ainsi, l'information liée à la propagation contenue dans la phase est conservée alors que l'amplitude est corrigée de façon à assurer la conservation de l'énergie. Les conséquences de cette normalisation seront discutées puis justifiées dans la sous-partie 2.5 (p. 44).

## 2.5 Réflexion et transmission totale d'une onde à travers un milieu diffusant

L'objectif de cette partie consiste à démontrer expérimentalement le caractère bimodal de l'opérateur de propagation en régime diffusant. Pour y parvenir, nous montrons qu'il est nécessaire de recourir à une opération de normalisation de la matrice de façon à s'affranchir du bruit expérimental. La souplesse des techniques ultrason-laser nous permet ensuite de révéler le champ associé aux canaux de propagations ouverts et fermés au sein du milieu diffusant. La structure de ces derniers peut alors être comparée aux récentes prédictions théoriques de Davy *et al.* [20].

### 2.5.1 Estimation de la conductance et du régime de transport

La conductance  $g$ , telle que définie dans la partie 2.2.3 (p. 33) est le paramètre de transport le plus fondamental. Elle peut être estimée en sommant les valeurs propres en transmission  $T$  et  $\hat{T}$  extraites respectivement des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$  (cf. Eq. (2.6)). On obtient ici, à  $f = 0,36$  MHz,  $g = \sum_i T_i \sim 8$  et  $\hat{g} = \sum_i \hat{T}_i \sim 8,1$ .

En régime diffusif, le rapport  $L/\ell^* \sim 2,75$  se déduit de la conductance et du nombre de canaux indépendants du système ( $N = 2W/\lambda = 22$ ) en suivant la loi d'Ohm (cf. Eq. (2.7)). Notre système ne se situe donc pas dans un régime totalement diffusif. Nous verrons toutefois que ce régime de transition donne lieu également à un comportement bimodal de l'opérateur de propagation.

### 2.5.2 Estimation de la densité de probabilité des valeurs propres en transmission

#### Longueur de corrélation fréquentielle, temps de Thouless

Sur la bande de fréquences  $[0,32 - 0,37]$  MHz, de largeur  $\Delta f$ , le nombre  $N_f$  de réalisations indépendantes de la matrice  $\mathbf{S}$  peut être estimé en calculant la longueur de corrélation fréquentielle  $\delta f_c$  associée à cette dernière. La longueur de corrélation fréquentielle est ici estimée en calculant le coefficient de corrélation  $C_f$ ,

$$C_f(\delta f) = \frac{\langle \mathbf{S}(f) | \mathbf{S}(f + \delta f) \rangle}{\langle \mathbf{S}(f) | \mathbf{S}(f) \rangle \langle \mathbf{S}(f + \delta f) | \mathbf{S}(f + \delta f) \rangle}, \quad (2.17)$$

où le produit scalaire matriciel est défini pour deux matrices de mêmes dimensions,  $\mathbf{M}_1$  et  $\mathbf{M}_2$ , comme

$$\langle \mathbf{M}_1 | \mathbf{M}_2 \rangle = \text{Tr} \left( \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^\dagger \right). \quad (2.18)$$

## 2.5. RÉFLEXION ET TRANSMISSION TOTALE D'UNE ONDE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

---

La largeur à mi-hauteur du coefficient de corrélation fréquentielle [Fig. 2.10] permet d'estimer une longueur de décorrélation fréquentielle  $\delta f_c = 17$  kHz, *i.e.*  $N_f = \Delta f / \delta f_c \sim 3$  matrices  $\mathbf{S}$  indépendantes.

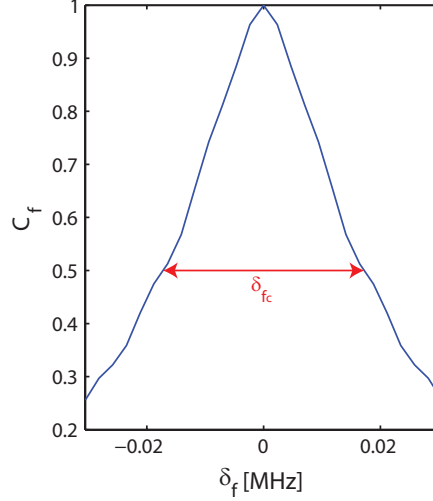


FIGURE 2.10 – Estimation du coefficient de corrélation  $C_f$  (cf. Eq. (2.17)) de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée expérimentalement. La largeur à mi-hauteur (double flèche rouge) permet d'estimer la longueur de corrélation fréquentielle  $\delta f_c = 17$  kHz.

La donnée de la longueur de corrélation fréquentielle permet également d'estimer le temps de Thouless,  $\tau_D = 1/\delta f$ . Étant donné que  $\tau_D \sim \Delta t/2$ , avec  $\Delta t$  la longueur des signaux temporels considérés [cf. sous-partie 2.4.1, p. 39], il est raisonnable de considérer que la quasi totalité de l'énergie injectée dans le milieu diffusant a bien quitté le milieu avant que les signaux ne soient tronqués.

### Distribution des valeurs propres de la matrice de transmission $tt^\dagger$

Les distributions  $\rho(T)$  et  $\rho(\hat{T})$  des valeurs propres  $T$  et  $\hat{T}$  sont estimées en moyennant les histogrammes des valeurs propres obtenues à chaque fréquence de la bande passante considérée ([0,32 – 0,37] MHz).

La distribution  $\rho(T)$  des valeurs propres issue de la matrice brute  $\mathbf{S}$  présente un accord correct avec la loi bimodale [Fig. 2.11(a)]. On constate notamment la présence d'un pic aux alentours de  $T = 0$ , correspondant aux canaux fermés ainsi qu'un pic de moindre amplitude autour de  $T = 1$ , correspondant aux canaux ouverts. Néanmoins, ce pic est accompagné par la présence de valeurs propres associées à des coefficients de transmission supérieurs à 1, et donc en contradiction avec l'hypothèse de conservation de l'énergie. L'existence de ces coefficients est liée à la non-unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée expérimentalement et mise en évidence sur la figure 2.8.

À l'inverse, après renormalisation de la matrice  $\mathbf{S}$ , l'ensemble des valeurs propres  $\hat{T}$  est repoussé sous l'unité. La distribution  $\rho(\hat{T})$  est alors en très bon accord avec la loi bimodale [Fig. 2.11(b)]. Ces résultats constituent la première démonstration expérimentale directe du caractère bimodal de l'opérateur de propagation en régime diffusif. Ils confirment le rôle essentiel de l'unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$ , notamment l'effet rédhitoire de la présence de bruit expérimental pour cette vérification.

Dans la suite, nous prouvons de deux façons différentes la possibilité offerte par l'opération de renormalisation de retrouver l'accès aux canaux ouverts déduits de  $\mathbf{S}$  et  $\hat{\mathbf{S}}$ . Dans un premier temps, cette démonstration est faite expérimentalement, en imageant le champ correspondant aux canaux ouverts. Dans un deuxième temps, ce résultat est confirmé numériquement, en simulant les effets du bruit expérimental.

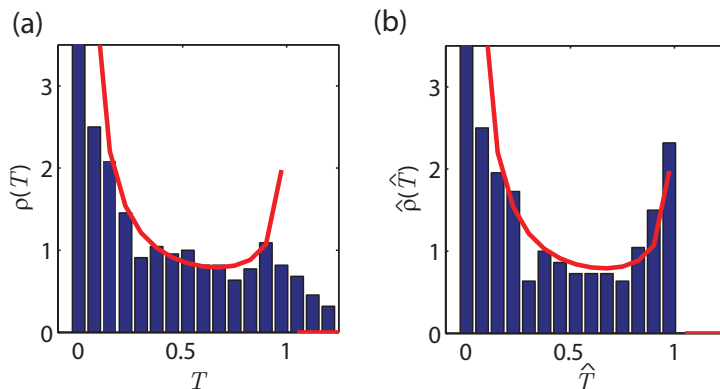


FIGURE 2.11 – Histogramme des valeurs propres en transmission, (a)  $\rho(T)$  et (b)  $\hat{\rho}(\hat{T})$ , moyennés sur l'ensemble de la bande de fréquence. Chacune des distributions est comparée à la loi bimodale  $\rho_b$  (Eq. (2.8)) [trait rouge continu].

### 2.5.3 Champ associé aux canaux de diffusion

Alors que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{tt}^\dagger$  correspondent aux coefficients de transmission de chaque canal propre, le vecteur propre associé indique lui la combinaison de modes propres incidents permettant d'exciter spécifiquement ce dernier. Il est donc possible de mesurer le champ associé à chacun des canaux propres du système.

#### Méthode expérimentale

Dans un premier temps, nous allons décrire la procédure expérimentale mise en place afin de mesurer le champ associé à un vecteur d'entrée donné  $\mathbf{u}$ . De façon similaire à ce qui avait été fait pour la mesure de la matrice  $\mathbf{S}$  [cf. sous-partie 2.4.1, p. 39], nous mesurons l'ensemble des réponses impulsionnelles entre les points de la ligne source et une grille de points recouvrant l'ensemble du milieu, espacés d'un pas  $\Delta x = 1$  mm. L'ensemble des réponses impulsionnelles forme une matrice de transmission  $\mathbf{k}$ , exprimée à la fréquence  $f = 0,36$  MHz à l'aide d'une transformée de Fourier temporelle.

#### Champ associé à une onde plane

Le champ correspondant à une onde plane incidente  $\phi_p$  est ensuite obtenu en multipliant à gauche la matrice  $\mathbf{k}$  – exprimée dans la base *point à point* – par le vecteur  $\mathbf{J} = [1 \ \dots \ 1]^T$  :

$$\phi_p = \mathbf{J} \times \mathbf{k}. \quad (2.19)$$

L'amplitude de la fonction d'onde  $\phi_p$  est présentée sur la figure 2.12(a). L'intensité moyennée le long de la section du guide (c.-à-d. l'axe  $y$ ) est quant à elle représentée sur la figure 2.12(b). On constate une décroissance quasi-linéaire du champ en fonction de la profondeur, en accord avec la loi d'Ohm prédite par la théorie de la diffusion [cf.

## 2.5. RÉFLEXION ET TRANSMISSION TOTALE D'UNE ONDE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

sous-partie 1.1.2, p. 13].

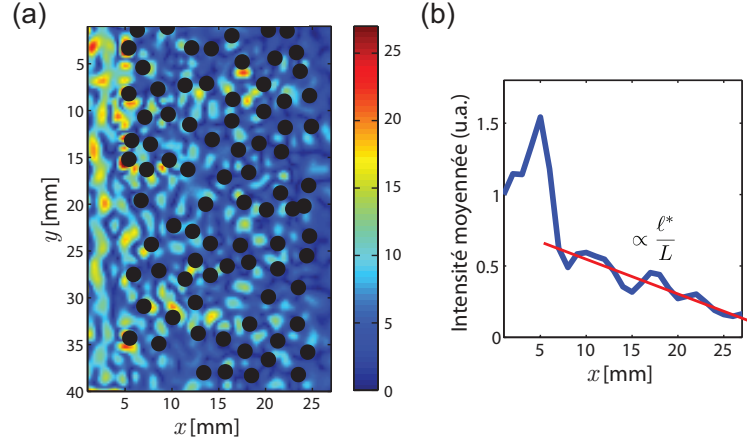


FIGURE 2.12 – (a) Valeur absolue du champ correspondant à une onde plane incidente sur le milieu désordonné à  $f = 0,36$  MHz. (b) Intensité moyennée sur la section du guide (axe  $y$ ) en fonction de la profondeur  $x$  du milieu désordonné. L'intensité est normalisée par l'intensité dans le plan des sources ( $x = 0$ ).

### Champ associé à un canal fermé : possibilité de rendre le milieu opaque énergétiquement

De façon à déterminer la fonction d'onde  $\phi_i$  correspondant à un vecteur propre  $\mathbf{u}_i$  de l'opérateur  $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$ , la matrice  $\mathbf{k}_m$  est préalablement calculée en décomposant les colonnes de la matrice  $\mathbf{k}$  dans la base des modes propres du guide. Le champ est alors obtenu en multipliant à gauche la matrice  $\mathbf{k}_m$  par le vecteur propre  $\mathbf{u}_i$  :

$$\phi_i = \mathbf{u}_i \times \mathbf{k}_m. \quad (2.20)$$

La figure 2.13(a) représente le champ associé à un canal fermé ( $T \sim 0$ ). Le champ incident est façonné de telle sorte que tous les chemins de diffusion interfèrent destructivement à droite du milieu. La seule solution pour l'onde est alors d'être réfléchi entièrement vers la gauche : le milieu est rendu parfaitement opaque. Au-delà d'un libre parcours moyen de transport ( $l^* \sim 7$  mm), l'intensité correspondante décroît très rapidement [Fig. 2.13(b)], en accord avec les prédictions numériques [12].

### Champ associé à un canal ouvert : possibilité de rendre le milieu transparent énergétiquement

Les champs associés à deux canaux ouverts déduits des matrices  $\mathbf{S}$  ( $T \sim 1$ ) et  $\hat{\mathbf{S}}$  ( $\hat{T} \sim 1$ ) sont ensuite obtenus en multipliant à gauche la matrice  $\mathbf{k}_m$  par les vecteurs propres correspondants (cf. Eq. (2.20)). Les interférences constructives entre les chemins de diffusion multiple à la sortie du milieu sont mises en évidence sur chacune des deux figures 2.14(a) et 2.14(c). Les profils d'intensité correspondants sont visibles sur les figures 2.14(b) et 2.14(d). Ils présentent dans chacun des cas une élévation de l'intensité au sein du milieu, caractéristique des canaux ouverts, sur laquelle nous reviendrons dans le paragraphe suivant. On observe toutefois que, pour le canal ouvert dérivé de la matrice  $\mathbf{S}$  bruitée, l'intensité mesurée à la sortie du milieu est plus faible

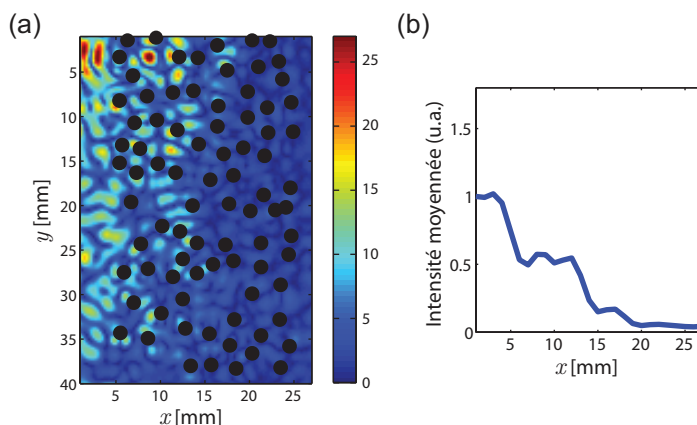


FIGURE 2.13 – (a) Valeur absolue du champ correspondant à un canal fermé au sein du milieu désordonné à  $f = 0,36$  MHz. (b) Intensité moyennée sur la section du guide (axe  $y$ ) en fonction de la profondeur  $x$  du milieu désordonné. L'intensité est normalisée par l'intensité dans le plan des sources ( $x = 0$ ).

que l'intensité en entrée. Le bruit expérimental présent dans la matrice  $\mathbf{S}$  empêche d'accéder totalement aux canaux ouverts. À l'inverse, l'intensité correspondant au canal ouvert dérivé de la matrice normalisée  $\hat{\mathbf{S}}$  permet d'affirmer que l'énergie est bien entièrement transmise à travers le milieu, illustrant ainsi la capacité à exciter les canaux ouverts grâce à l'opération de normalisation, et ce, malgré la présence de bruit expérimental.

### Structure universelle des canaux de transmission

L'existence de canaux propres, qu'ils soient associés à une transmission accrue ou, à l'inverse, à une transmission plus faible est le résultat des effets d'interférence. Leur structure spatiale est donc propre à la configuration du désordre correspondante. Toutefois, Davy *et al.* [20] ont montré récemment qu'il était possible d'en donner une structure universelle en moyennant sur les configurations du désordre pour un coefficient de transmission  $T$  donné. Cette étude offre un point de comparaison pour les profils d'intensité moyennée obtenus expérimentalement.

Pour le cas des canaux ouverts, les auteurs sont parvenus à une expression analytique du profil d'intensité moyen dans le milieu désordonné. Ce dernier s'obtient par la somme d'un terme constant, représentant la densité d'énergie du champ incident, avec un terme correspondant à la somme des probabilités de retour à la position  $x$  d'une infinité d'ondes émises par des sources virtuelles issues du premier terme. Le profil ainsi obtenu [Fig. 2.15(a)] présente une élévation de l'intensité au sein du milieu similaire à celle que nous avons observé expérimentalement pour le canal ouvert, comme l'illustre la figure 2.15(b).

Dans le cas de canaux associés à une transmission  $T < 1$  quelconque, le profil d'intensité est obtenu par une approche semi-analytique. L'interprétation physique est toutefois identique à celle proposée précédemment, mais en considérant les probabilités de retour d'ondes émises par des sources virtuelles dont la force décroît au fil de la progression au sein du milieu désordonné. Ce résultat permet notamment de retrouver la structure des canaux fermés [Fig. 2.15(a)] dont la décroissance est similaire à celle



## 2.5. RÉFLEXION ET TRANSMISSION TOTALE D'UNE ONDE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

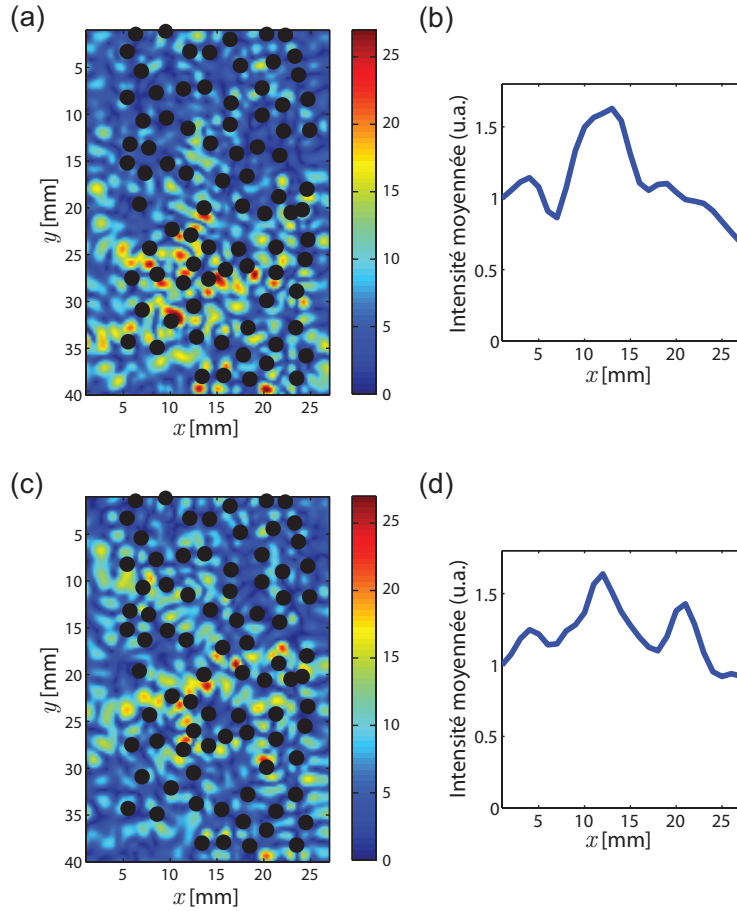


FIGURE 2.14 – Valeur absolue du champ correspondant à (a) un canal ouvert déduit de la matrice  $\mathbf{S}$  et (c) d'un canal ouvert déduit de la matrice normalisée  $\hat{\mathbf{S}}$  au sein du milieu désordonné à  $f = 0,36$  MHz. (b)-(d) Intensité moyennée sur la section du guide (axe  $y$ ) correspondante à chacun des deux canaux ouverts en fonction de la profondeur  $x$  du milieu désordonné. L'intensité est normalisée par l'intensité dans le plan des sources ( $x = 0$ ).

obtenue expérimentalement [Fig. 2.13(b)].

### 2.5.4 Normalisation de la matrice $\mathbf{S}$ , comment retrouver les canaux ouverts malgré le bruit expérimental ?

Dans cette partie nous allons, au moyen d'une simple simulation numérique, justifier l'opération de renormalisation de la matrice  $\mathbf{S}$  présentée dans la sous-partie 2.4.5 (p. 44) et montrer qu'elle permet de retrouver les canaux ouverts malgré la présence conjointe d'un bruit multiplicatif et d'un bruit additif.

Pour ce faire, nous avons simulé numériquement un ensemble de 1000 réalisations de matrices aléatoires unitaires  $\mathbf{S}_0$  de dimension  $2N \times 2N$  avec une conductance  $g$  similaire à celle mesurée expérimentalement ( $g \sim 8$ ). Comme attendu, la distribution moyenne des valeurs propres en transmission  $T_0$  suit la loi bimodale (cf. Eq. (2.8)). Dans un second temps, le bruit expérimental est simulé en tirant deux matrices aléatoires  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{N}'$ .  $\mathbf{N}$  rend compte du bruit multiplicatif : ses éléments sont des variables aléatoires

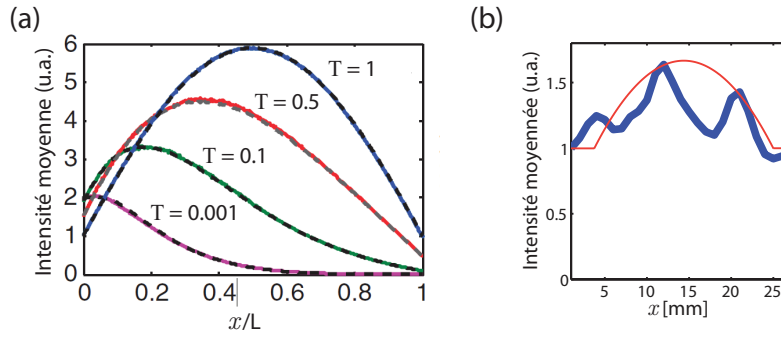


FIGURE 2.15 – Figures adaptées de [20]. (a) Moyennes d’ensemble de l’intensité moyennée sur la largeur du guide pour des canaux propres associés à une transmission  $T = 1$ ,  $T = 0,5$ ,  $T = 0,1$ ,  $T = 0,01$  obtenus pour 500 simulations en régime diffusif (traits pleins). Les courbes en pointillés sont obtenues semi-analytiquement. (b) Comparaison du profil spatial expérimental, obtenu sur une seule réalisation du désordre, avec le profil de densité d’énergie *universel*.

réelles de statistique gaussienne et à valeur moyenne nulle. La matrice  $\mathbf{N}'$  modélise quant à elle le bruit additif : ses éléments sont des variables aléatoires complexes, gaussiennes, de symétrie circulaire et à valeur moyenne nulle. Une matrice de diffusion *bruitée*  $\mathbf{S}$  peut alors être obtenue à l’aide des différentes matrices ainsi construites :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \cdot (\mathbf{I}_{2N} + \alpha_M \mathbf{N}) + \alpha_A \mathbf{N}', \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{I}_{2N}$ , est la matrice identité de dimension  $2N \times 2N$ . Les deux constantes  $\alpha_M$  et  $\alpha_A$  sont ajustées de façon à obtenir un rapport signal-à-bruit équivalent au bruit expérimental estimé dans la sous-partie 2.4.4 (p. 42). On notera que les résultats obtenus ne dépendent pas du ratio entre les bruits multiplicatif et additif.

La matrice  $\mathbf{S}$  ainsi construite (cf Eq. (2.21)) présente des propriétés statistiques similaires à celle mesurée expérimentalement. Une décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{t}$  est ensuite opérée,

$$\mathbf{t} = \mathbf{u} \sqrt{\mathcal{T}} \mathbf{v}^\dagger, \quad (2.22)$$

de façon à obtenir les matrices unitaires  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , de dimension  $N \times N$ , dont les colonnes  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{v}_i$ , correspondent aux canaux propres en transmission, respectivement en entrée et en sortie. La matrice  $\mathcal{T} = \text{diag}(T_1, \dots, T_N)$  est une matrice diagonale contenant les  $N$  valeurs propres en transmission de l’opérateur  $\mathbf{t} \mathbf{t}^\dagger$ . Leur distribution  $\rho(T)$  est ensuite estimée en moyennant les histogrammes obtenus sur l’ensemble des 1000 réalisations de  $\mathbf{S}$ . Le résultat est présenté sur la figure 2.16(a) et comparé à la distribution bimodale théorique. Comme pour les résultats expérimentaux présentés dans la sous-partie 2.5.2 (p. 44), le bruit détériore l’unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$  et, bien que le pic correspondant aux canaux fermés soit bien conservé, un ensemble de valeurs propres de transmission supérieures à 1 – et donc physiquement aberrantes – apparaissent.

Cependant, contrairement au cas expérimental, nous avons ici accès au *véritable* opérateur de transmission  $\mathbf{t}_0$ , extrait de la matrice non-bruitée  $\mathbf{S}_0$ . Il est ainsi possible d’en déduire le coefficient de transmission *effectif*,  $T'_i$ , associé au  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre en entrée  $\mathbf{u}_i$ .

$$T'_i = \mathbf{u}_i^\dagger \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0^\dagger \mathbf{u}_i \quad (2.23)$$

## 2.5. RÉFLEXION ET TRANSMISSION TOTALE D'UNE ONDE À TRAVERS UN MILIEU DIFFUSANT

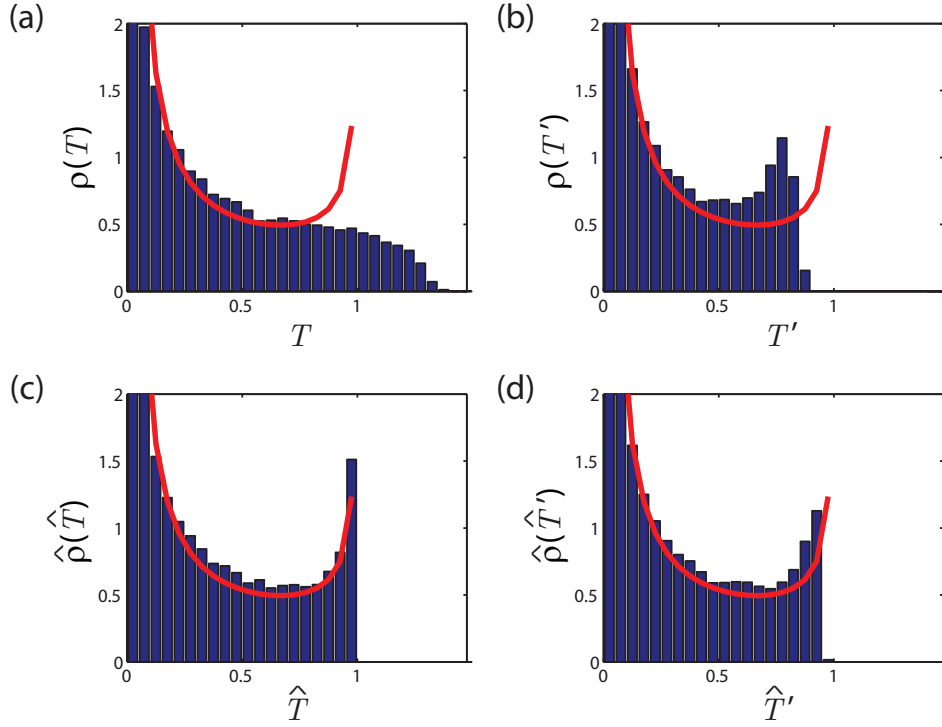


FIGURE 2.16 – Histogrammes, (a)  $\rho(T)$ , (b)  $\rho(T')$ , (c)  $\hat{\rho}(\hat{T})$  et (d)  $\hat{\rho}(\hat{T}')$ , obtenus en moyennant sur l'ensemble des matrices  $\mathbf{S}$  simulées pour un rapport signal-à-bruit de 8,5 dB, similaire à celui estimé expérimentalement.

La distribution de ce coefficient de transmission,  $\rho(T')$  peut elle aussi être estimée en moyennant les histogrammes obtenus sur l'ensemble des 1000 réalisations de  $\mathbf{S}$ . Le résultat, présenté sur la figure 2.16(b), est ensuite comparé à la loi bimodale. Bien que la distribution estimée conserve un comportement bimodal, le pic correspondant aux canaux ouverts est repoussé autour d'une valeur  $T' \sim 0,8$ . Cette observation confirme l'impossibilité d'accéder aux canaux entièrement ouverts dans la matrice  $\mathbf{S}$ . On note l'accord entre cette observation et le champ correspondant au canal ouvert déduit de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée expérimentalement, présenté sur la figure 2.14(a). Ce canal n'était en effet pas entièrement ouvert et une partie de l'énergie était réfléchi par le milieu diffusant [Fig. 2.14(b)].

Intéressons nous maintenant aux effets de l'opération de normalisation de la matrice  $\mathbf{S}$  proposée dans la sous-partie 2.4.5 (p. 44) et décrite par l'équation (2.16). Pour ce faire, les éléments propres de la matrice de transmission *corrigée*  $\hat{\mathbf{t}}$  – extraite de la matrice de diffusion normalisée  $\hat{\mathbf{S}}$  – sont obtenus par une décomposition en valeur singulière,

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{u}} \sqrt{\hat{\mathcal{T}}} \hat{\mathbf{v}}^\dagger. \quad (2.24)$$

Les colonnes  $\hat{\mathbf{u}}_i$  et  $\hat{\mathbf{v}}_i$  des deux matrices unitaires  $\hat{\mathbf{u}}$  et  $\hat{\mathbf{v}}$ , de dimension  $N \times N$ , permettent respectivement d'accéder aux vecteurs propres en entrée et en sortie. La matrice  $\hat{\mathcal{T}}$  contient quant à elle les  $N$  valeurs propres en transmission  $\hat{T}_i$  associées. La distribution des valeurs propres en transmission,  $\hat{\rho}(\hat{T})$  est estimée en moyennant les histogrammes obtenus à partir de l'ensemble des réalisations de la matrice  $\hat{\mathbf{S}}$ . La distribution estimée,  $\hat{\rho}(\hat{T})$  est en très bon accord avec la loi bimodale [Fig. 2.16(c)]. On

retrouve ainsi un comportement similaire à celui que nous avons observé expérimentalement en étudiant la matrice  $\hat{\mathbf{S}}$ , suite à l'opération de normalisation décrite dans la sous-partie 2.4.5 (p. 44).

Il serait toutefois encore possible de contester le véritable sens physique des valeurs propres  $\hat{T}$  obtenues après renormalisation. En effet, l'unitarité de la matrice ayant été forcée, celles-ci correspondent-elles à une réalité physique ? Il nous est possible de répondre à cette question en calculant les coefficients de transmissions *effectifs*,  $\hat{T}'_i$ , associé au  $i^{\text{ème}}$  canal propre en entrée  $\hat{\mathbf{u}}_i$ ,

$$\hat{T}'_i = \hat{\mathbf{u}}_i^\dagger \mathbf{t}_0 \mathbf{t}_0^\dagger \hat{\mathbf{u}}_i. \quad (2.25)$$

Comme précédemment, l'ensemble des réalisations de la matrice  $\mathbf{S}$  permet de calculer la distribution moyenne des coefficients de transmission *effectifs*,  $\hat{\rho}(\hat{T}')$ . La figure 2.16(d) illustre le bon accord de cette dernière avec la loi bimodale. La comparaison avec la figure 2.16(b) illustre la possibilité offerte par cette méthode de retrouver quasi entièrement les canaux ouverts malgré la présence de bruit. Le coefficient de transmission *effectif* maximal est ici de 97,5 %. On retrouve là encore une valeur en accord avec le champ associé au canal ouvert déduit de la matrice expérimentale normalisée  $\hat{\mathbf{S}}$  [Fig. 2.14(c)]. Expérimentalement, nous avons montré que la transmission associée à ce canal était quasi totale [Fig. 2.14(d)].

La figure 2.17 représente les coefficients de transmission *effectifs*  $T'$  et  $\hat{T}'$  en fonction des valeurs propres en transmission associées  $T$  et  $\hat{T}$ . De façon prévisible, les valeurs propres en transmission  $T$ , déduites de la matrice  $\mathbf{S}$  *bruitée* ne correspondent pas aux coefficients de transmission *effectifs*. À l'inverse, les valeurs propres en transmission  $\hat{T}$  déduites de la matrice normalisée  $\hat{\mathbf{S}}$  sont très fortement corrélées aux coefficients de transmission associés  $T'$ . En effet, le nuage de point associé (en rouge) est proche de la droite de pente 1 représentée par le trait noir continu. Cela illustre la nécessité de procéder à une normalisation de la matrice  $\mathbf{S}$  afin d'accéder aux canaux ouverts en présence de bruit. La valeur propre de transmission  $\hat{T}_i$  donne par ailleurs une bonne estimation du coefficient de transmission effectif  $T_i$  du canal associé (erreur de 7 %).

## 2.6 Conséquences du caractère bimodal de l'opérateur de propagation

Outre les conséquences immédiates en terme d'optimisation du transport de l'énergie à travers un milieu diffusant, l'accès à l'ensemble des canaux propres d'un milieu diffusant permet plus généralement de tirer le meilleur parti de ce dernier pour de nombreuses applications. Comme nous l'avons décrit précédemment, en électronique ou en optique, les corrélations induites par l'existence de canaux ouverts permettent une réduction du bruit de grenaille au tiers de son niveau classique (partie 2.2.4, p. 35). Dans cette partie, nous allons décrire deux autres conséquences pratiques du caractère bimodal de l'opérateur de propagation, à des fins de focalisation d'une part, puis en terme de transfert d'information.

### 2.6.1 Focalisation à travers un milieu diffusant

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre introductif (partie 1.3.3, p. 23), la focalisation d'une onde à travers un milieu diffusant est l'une des applications pionnières

## 2.6. CONSÉQUENCES DU CARACTÈRE BIMODAL DE L'OPÉRATEUR DE PROPAGATION

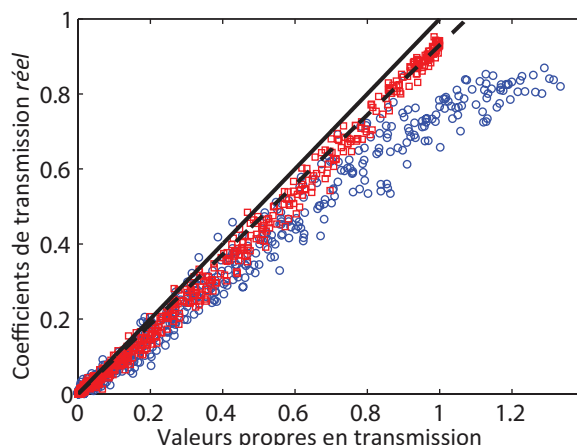


FIGURE 2.17 – Représentation des coefficients de transmission effectifs  $T'$  (cercles bleus) et  $\hat{T}'$  (carrés rouges) en fonction des valeurs propres en transmission associées  $T$  et  $\hat{T}$ , respectivement. Pour comparaison, la droite de pente 1 est représentée (trait noir continu). Le nuage de point correspondant au tracé de  $\hat{T}'$  en fonction de  $\hat{T}$  est ajusté par la courbe de pente 0,93 (trait noir pointillé)

du façonnage de front d'onde. Qu'elle soit opérée par retournement temporel, conjugaison de phase ou par optimisation du front incident, cette opération est optimisée en terme de contraste dès lors que tous les canaux ouverts sont excités. En effet, Davy *et al.* [21] ont montré qu'à une fréquence donnée, le contraste maximal entre l'intensité au point focal et celle mesurée en dehors dépendait uniquement du nombre de canaux contribuant effectivement au champ transmis. Ce paramètre,

$$N_{\text{eff}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N T_i\right)^2}{\sum_{i=1}^N T_i^2}, \quad (2.26)$$

prend sa valeur maximale  $N_{\text{eff}} = 3g/2$  dans le cas d'une distribution bimodale. Un contrôle partiel des canaux en transmission diminue le contraste de la tâche focale obtenue.

### 2.6.2 Transfert d'information

Du point de vue des télécommunications, le contrôle de l'ensemble des modes d'un système diffusif est déterminant pour maximiser le transfert d'information sans erreur à travers ce dernier. Ce problème est décrit par la capacité de Shannon  $C$  du canal considéré, défini comme étant le débit théorique maximal (en bits/s/Hz) auquel il est possible de transférer de l'information sans erreur pour un niveau de bruit donné.

Considérons le cas d'un guide d'onde multi-modes en régime diffusif. Ce dernier peut être vu comme un système d'information composé de  $N$  entrées et de  $N$  sorties (dont l'acronyme anglais est *M.I.M.O*, pour *Multiple Input, Multiple Output*). Pour un tel système, on peut exprimer le signal de sortie  $\psi^s$  correspondant au signal d'entrée  $\psi^e$  en fonction de l'opérateur de transmission  $\mathbf{t}$ ,

$$\psi^s = \mathbf{t}\psi^e + \psi^{(n)}, \quad (2.27)$$

où  $\psi^{(n)}$  est un bruit blanc gaussien externe de variance  $\sigma^2$ .

## CHAPITRE 2. CANAUX OUVERTS ET FERMÉS EN MILIEUX DIFFUSANTS

---

Considérons un signal d'entrée  $\psi^e$ , défini comme étant une variable aléatoire suivant la loi de probabilité  $p(\psi^e)$ . Etant donné cette dernière, la capacité de Shannon du système est calculée en optimisant l'information mutuelle  $\mathcal{I}$  entre les champs d'entrée  $\psi^e$  et de sortie  $\psi^s$ . Cette dernière peut s'écrire [22],

$$\mathcal{I} = \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\mathbf{t}\mathbf{Q}\mathbf{t}^\dagger}{\sigma} \right) \right], \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{I}_N$  est la matrice identité de dimension  $N$  et  $\mathbf{Q}$  est la matrice de covariance de l'entrée :  $\mathbf{Q} = E[\psi_i^e \psi_j^{e\dagger}]$ , où  $E[\dots]$  représente la moyenne sur l'ensemble des signaux  $\psi^e$  émis possibles [22].

La capacité de Shannon se calcule donc en optimisant l'information mutuelle par rapport à toutes les distributions  $p(\psi^e)$  de signal d'entrée  $\psi^e$  possibles, *i.e.*, par rapport à la matrice de covariance  $\mathbf{Q}$ ,

$$C = \max_{\mathbf{Q}} \left\langle \log_2 \left[ \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\mathbf{t}\mathbf{Q}\mathbf{t}^\dagger}{\sigma} \right) \right] \right\rangle. \quad (2.29)$$

Goetschy et Stone [23] ont montré que la matrice  $\mathbf{Q}$  maximisant la moyenne de l'intensité mutuelle est proportionnelle à l'identité. Soit, pour une puissance incidente  $P^{\text{in}}$ ,

$$\mathbf{Q} = P^{\text{in}} \mathbf{I}_N. \quad (2.30)$$

On peut alors écrire,

$$\mathcal{I} = \log_2 \prod_i \left( \mathbf{I}_N + \frac{T_i \langle T_i \rangle P^{\text{in}}}{\langle T_i \rangle \sigma} \right), \quad (2.31)$$

où on fait apparaître les différentes valeurs propres du système en transmission  $T_i$  et le rapport signal-à-bruit du signal en sortie,  $\text{RSB} = \langle T \rangle P^{\text{in}} / \sigma$ . On a alors,

$$\mathcal{I} = \sum_i \log_2 \left( \mathbf{I}_N + \text{RSB} \frac{T_i}{\langle T_i \rangle} \right). \quad (2.32)$$

On calcule alors la capacité de Shannon  $C$  comme la moyenne sur  $\mathcal{I}$  :

$$C = N \int dT \log_2 (1 + \text{RSB} T) \tilde{\rho}(T), \quad (2.33)$$

où  $\tilde{\rho}(T)$  est la densité de probabilité normalisée des valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{t}\mathbf{t}^\dagger$ .

Dans le cas d'un contrôle total des canaux du milieu, la densité de probabilité des valeurs propres en transmission suit la loi bimodale  $\rho_b(T)$  (cf. Eq. (2.8)). La capacité de Shannon s'écrit alors,

$$C_b = \frac{g}{2 \ln 2} \ln^2 \left( \sqrt{1 + \frac{N \cdot \text{RSB}}{g}} + \sqrt{\frac{N \cdot \text{RSB}}{g}} \right). \quad (2.34)$$

On a donc, aux corrections logarithmiques près, un débit maximal de l'ordre du nombre de canaux ouverts ( $C_b \sim g$ ).

À l'inverse, dans le cas où l'on ne mesure qu'une faible partie de l'opérateur de propagation, la densité de probabilité des valeurs propres en transmission converge

vers la loi de Marčenko–Pastur [7–9]. Pour un nombre  $M < g$  de canaux contrôlés, on obtient,

$$C_q = M \cdot \left( \log_2(1 + 4 \text{RSB}) - 2 - \frac{1}{\ln 2} + \frac{\sqrt{1 + 4\text{SNR}} - 1}{2 \ln 2} \text{SNR} \right). \quad (2.35)$$

En régime diffusif, bien que la capacité par canal soit réduite par les corrélations induites par la présence de canaux ouverts, la capacité de Shannon est d’autant supérieure qu’une plus grande sous-partie des canaux du système est contrôlée,

$$C_q \sim M \ll C_b \sim g. \quad (2.36)$$

L’accès à l’ensemble des canaux ouverts est donc décisif en vue de maximiser le transfert d’information à travers un milieu diffusif.

## 2.7 Conclusion et perspectives

Ce chapitre a pour objet l’optimisation du transfert d’énergie et d’information à travers un milieu diffusant à partir de l’étude de la statistique de l’opérateur de propagation des ondes en milieux désordonnés. L’étude de la propagation d’ondes de flexion à travers un guide d’onde percé de trous aléatoirement distribués nous a ainsi notamment permis de vérifier expérimentalement l’existence de canaux de propagation entièrement ouverts et fermés au sein d’un milieu diffusant. La souplesse des techniques ultrasons-laser nous a ensuite permis de mesurer le champ associé à ces canaux afin d’illustrer le mécanisme par lequel les effets d’interférence parviennent à mettre en défaut le modèle diffusif.

Au-delà de ces résultats, ce travail débouche sur un certain nombre de perspectives, tant fondamentales que pratiques. Du point de vue des applications, la génération physique des différents canaux propres constituerait une nouvelle avancée. Cette excitation spécifique repose sur un contrôle spatio-temporel de la ligne émettrice grâce, notamment, à l’utilisation d’un modulateur spatial de lumière [24]. Du point de vue fondamental, nous souhaiterions poursuivre cette étude dans le régime de localisation *forte* d’Anderson. La décroissance exponentielle de la conductance s’y accompagne d’un phénomène de *crystallisation* des valeurs propres [3]. Cette prédiction a été faite en considérant la variable  $x_n$ , définie à partir des valeurs propres en transmission  $T_n = 1/\cosh^2(x_n)$ . Dans la limite  $L/(N\ell^*) \rightarrow \infty$ , la densité de probabilité des  $x_n$  prend la forme d’un arrangement cristallin d’intervalle  $\delta x = L/(N\ell^*)$ .

Enfin, le système physique ainsi que les méthodes expérimentales développées dans ce chapitre offrent eux aussi de nombreuses perspectives. Bien que cette étude soit basée sur une analyse parfaitement monochromatique, les signaux enregistrés sont porteurs de toute l’information temporelle disponible sur le milieu considéré. De récents travaux [25, 26] ont montré qu’il était possible d’en tirer profit grâce à la matrice des *temps de vol*, que ce soit à des fins pratiques ou fondamentales. Le chapitre suivant est un pas dans cette direction. L’objectif que nous y poursuivons réside en effet dans la détermination de canaux de propagation suivant lesquels l’onde peut conserver une cohérence à la fois spatiale et temporelle.

## 2.A Annexe

### 2.A.1 Décomposition de la matrice $\mathbf{S}$ dans la base des modes propres du guide

#### Modes propres du guide d'onde parfait

La matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  est définie dans une base de mode associée à un flux d'énergie unitaire dans la direction orthogonale à la section du guide. De façon à assurer cette condition, la matrice de diffusion doit donc être décomposée dans la base des modes propres des guides d'onde qui alimentent l'entrée et la sortie du système étudié. Nous allons donc déterminer ici la forme spatiale de ces modes propres ainsi que leur relation de dispersion.

Pour cette étude, nous avons fait le choix d'une plaque dite *mince*, c'est-à-dire que l'on considèrera l'épaisseur  $T$  de la plaque bien inférieure aux autres longueurs caractéristiques du problème que sont la longueur d'onde  $\lambda$  et la largeur du guide d'onde  $W$ . Les modes propres seront donc déterminés dans le cadre de la théorie simplificatrice des *plaques minces* [27, 28], plutôt que de résoudre directement les équations de l'élastodynamique. Cette théorie permet de prendre en compte l'épaisseur de la plaque sans toutefois entrer dans la complexité d'un calcul d'élasticité à trois dimensions. Dans ce cadre, il est possible de découpler les équations de l'élastodynamique en faisant apparaître deux familles de modes :

- les modes de compression dont la polarisation est dans le plan de propagation (suivant  $x,y$ ).
- les modes de flexion dont la polarisation est orthogonale au plan de propagation (suivant  $z$ ).

Expérimentalement, nous ne mesurerons que les déplacements normaux à la plaque. Nous n'aurons donc accès qu'aux modes de flexion. C'est pourquoi notre étude se restreint ici à ces seuls modes.

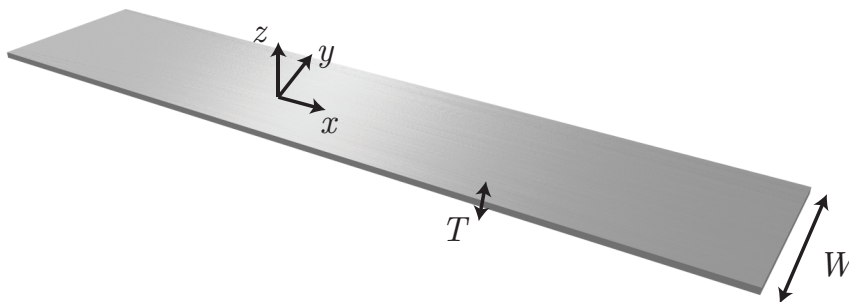


FIGURE 2.18 – Représentation de la plaque mince considérée.

Considérons une plaque d'épaisseur  $T \ll \lambda$  dans le plan  $(x,y)$  [Fig. 2.18]. Cette plaque est constituée dans un matériau caractérisé par une masse volumique  $\rho$ , un coefficient de Poisson  $\nu$  et un module d'Young  $E$ . Dans la limite  $T \ll W$ , le déplacement polarisé dans la direction  $z$  peut alors être considéré comme constant suivant l'épaisseur. De même, l'annulation des contraintes suivant la direction  $z$  sur les deux surfaces de la plaque peut s'étendre à la totalité de la profondeur de la plaque.



L'équation du mouvement de flexion de la plaque  $w(x,y,t)$  s'écrit alors [27, 28] :

$$\rho T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla_{\perp}^4 w = 0 \quad (2.37)$$

où  $\nabla_{\perp}^4$  représente le bi-laplacien et  $D$  le module de rigidité en flexion,

$$D = \frac{ET^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.38)$$

Puisque cette équation est du quatrième degré, deux types de modes de flexion sont obtenues à chaque pulsation  $\omega$  :

- les modes pairs, de la forme  $w^{(p)}(y)e^{ikx}$ , présentant une symétrie dans la direction  $y$  correspondant à la largeur du guide.
- les modes impairs, de la forme  $w^{(i)}(y)e^{ikx}$ , présentant une antisymétrie dans la direction  $y$  correspondant à la largeur du guide.

Les solutions paires et impaires de cette équation d'onde s'écrivent respectivement [28] :

$$w^{(p)}(y) = A \left[ \cosh\left(\frac{\chi_m W}{2}\right) \cosh(\chi_p y) - \frac{k^2 \nu - \chi_p^2}{k^2 \nu - \chi_m^2} \cosh\left(\frac{\chi_m W}{2}\right) \cosh(\chi_m y) \right] \quad (2.39)$$

et

$$w^{(i)}(y) = A \left[ \sinh\left(\frac{\chi_m W}{2}\right) \sinh(\chi_p y) - \frac{k^2 \nu - \chi_p^2}{k^2 \nu - \chi_m^2} \sinh\left(\frac{\chi_m W}{2}\right) \sinh(\chi_m y) \right], \quad (2.40)$$

avec  $\chi_p = \sqrt{k^2 + K^2}$ ,  $\chi_m = \sqrt{k^2 - K^2}$ ,  $K^2 = \omega \sqrt{\rho W/D}$  et où  $A$  est une constante de normalisation telle que  $\int_{-W/2}^{W/2} dy |w^{(p,i)}(y)|^2 = 1$

Les courbes de dispersions  $\omega_n(k)$  des différents modes sont obtenues via la résolution numérique d'une équation transcendante donnée par les conditions aux limites en  $y = \pm W/2$  [27]. On obtient alors pour les modes pairs :

$$\begin{aligned} & \left[ K^2 + (1-\nu)k^2 \right]^2 \chi_m \tanh(\chi_m W/2) \\ & - \left[ K^2 - (1-\nu)k^2 \right]^2 \chi_p \tanh(\chi_p W/2) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

De la même façon, on obtient pour les modes impairs :

$$\begin{aligned} & \left[ K^2 + (1-\nu)k^2 \right]^2 \chi_m \coth(\chi_m W/2) \\ & - \left[ K^2 - (1-\nu)k^2 \right]^2 \chi_p \coth(\chi_p W/2) = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Les deux figures de dispersion correspondant aux quatre premiers modes de composantes paires et impaires sont représentées respectivement sur les figures (2.19(a)) et (2.19(b)).

La dépendance spatiale dans la section du guide (axe  $y$ ) de chacun des modes pairs et impairs s'obtient alors en réinjectant chacune des solutions des équations (2.41) et (2.42) respectivement. Elle est représentée sur les figures 2.20(a) et 2.20(b) pour les

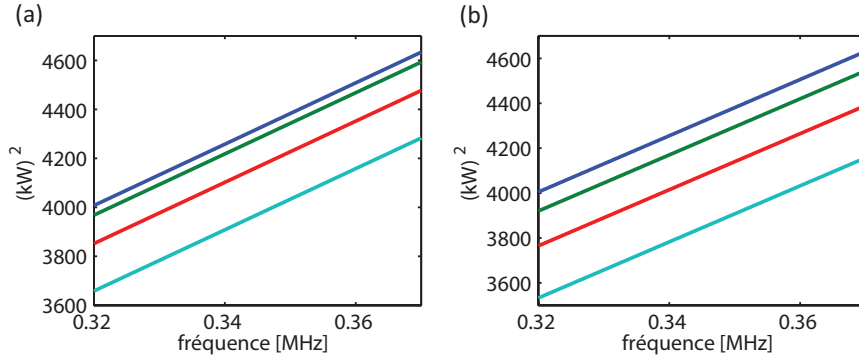


FIGURE 2.19 – Courbes de dispersion des quatre premiers modes de flexions de composantes paires (a) et impaires (b). Le nombre d’onde  $k$  est adimensionné par l’épaisseur du guide  $W$ .

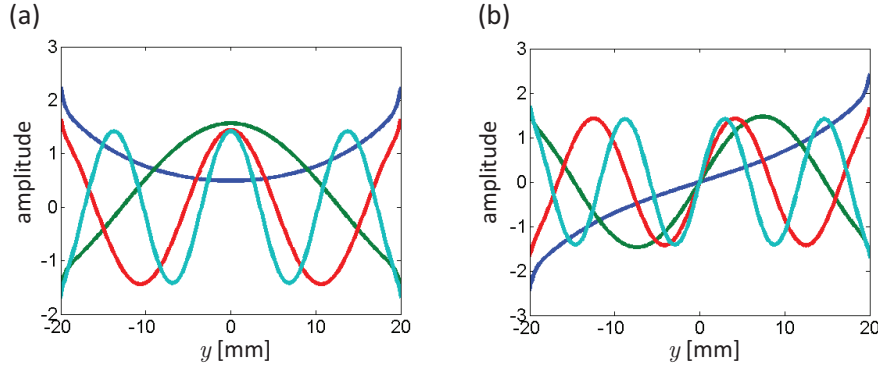


FIGURE 2.20 – Dépendance spatiale dans la section du guide (axe  $y$ ) des quatre premiers modes de flexions de composantes paires (a) et impaires (b) à la fréquence  $f = 0.36$  MHz

quatre premiers modes pairs et impairs mis en évidence dans la figure 2.19.

Enfin, comme nous le verrons par la suite, il est essentiel de déterminer l’expression du flux d’énergie porté par chacun des différents modes de flexion du guide dans la section de la plaque. Cross et Lifshitz ont montré [27] qu’il pouvait se mettre, dans le cas d’une plaque mince homogène, sous la forme

$$\phi = kW I(\nu), \quad (2.43)$$

dans laquelle  $I(\nu)$  est une constante dépendant du coefficient de Poisson. Ainsi, il est possible de s’assurer que chacun des modes  $\{w_i^{(p,i)}\}$  porte le même flux d’énergie dans la direction  $\mathbf{x}$  en les renormalisant par la racine carrée des nombres d’onde  $\{k_i^{(p,i)}\}$  associés.

### Décomposition de $\mathbf{S}$ dans la base des modes propres du guide

La matrice  $\mathbf{S}$ , dont l’acquisition dans l’espace réel est décrite dans la sous-partie 2.4.1 (p. 39) est ensuite décomposée dans la base des modes propres du guide de façon à renormaliser le flux associé à chacun des modes. Pour ce faire, la matrice de passage  $\mathbf{p}$  entre les deux bases est composée des différentes valeurs présent par les  $N$  modes

propres du guide aux  $M$  positions  $y_i$  auxquelles le champ est mesuré. L'opération de renormalisation du flux associé à chacun des modes est opérée en normalisant chacun d'entre eux par la racine carré de son nombre d'onde (cf. Eq. (2.43)).  $\mathbf{p}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{w_1^{(p)}(y_1)}{\sqrt{k_1^{(p)}}} & \dots & \frac{w_1^{(p)}(y_M)}{\sqrt{k_1^{(p)}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{w_{N/2}^{(p)}(y_1)}{\sqrt{k_{N/2}^{(p)}}} & \dots & \frac{w_{N/2}^{(p)}(y_M)}{\sqrt{k_{N/2}^{(p)}}} \\ \frac{w_1^{(i)}(y_1)}{\sqrt{k_1^{(i)}}} & \dots & \frac{w_1^{(i)}(y_M)}{\sqrt{k_1^{(i)}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{w_{N/2}^{(i)}(y_1)}{\sqrt{k_{N/2}^{(i)}}} & \dots & \frac{w_{N/2}^{(i)}(y_M)}{\sqrt{k_{N/2}^{(i)}}} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Chacune des matrices de réflexion/transmission peut être exprimée dans la base des canaux propres du guide  $(\mathbf{r}_c, \mathbf{t}_c, \mathbf{r}'_c, \mathbf{t}'_c)$  à partir des différentes matrices mesurées point à point dans l'espace réel  $(\mathbf{r}_p, \mathbf{t}_p, \mathbf{r}'_p, \mathbf{t}'_p)$  à l'aide des opérations matricielles

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_p \times \mathbf{p}^T \quad (2.45)$$

$$\mathbf{r}'_c = \mathbf{p} \times \mathbf{r}'_p \times \mathbf{p}^T \quad (2.46)$$

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{p} \times \mathbf{t}_p \times \mathbf{p}^T \quad (2.47)$$

$$\mathbf{t}'_c = \mathbf{p} \times \mathbf{t}'_p \times \mathbf{p}^T \quad (2.48)$$

La matrice  $\mathbf{S}'$  peut alors être exprimée dans la base des modes propres du guide,

$$\mathbf{S}' = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_c & \mathbf{t}'_c \\ \mathbf{t}_c & \mathbf{r}'_c \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

## Références bibliographiques

- [1] O.N. Dorokhov. On the coexistence of localized and extended electronic states in the metallic phase. *Solid State Commun.*, 51(6) :381–384, 1984.
- [2] A. Goetschy and A. D. Stone. Filtering random matrices : The effect of incomplete channel control in multiple scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :063901, Aug 2013.
- [3] C.W.J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3) :731, 1997.
- [4] R. Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM J. Res. Dev.*, 1(3) :223–231, 1957.
- [5] D. S. Fisher and P.A. Lee. Relation between conductivity and transmission matrix. *Physical Review B*, 23(12) :6851, 1981.
- [6] P.A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors. *Ann. Phys.*, 181(2) :290–317, 1988.
- [7] R. Sprik, A. Tourin, J. de Rosny, and M. Fink. Eigenvalue distributions of correlated multichannel transfer matrices in strongly scattering systems. *Phys. Rev. B*, 78(1) :012202, 2008.
- [8] A. Aubry and A. Derode. Random matrix theory applied to acoustic backscattering and imaging in complex media. *Phys. Rev. Lett.*, 102(8) :084301, 2009.
- [9] S.M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics : an approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104(10) :100601, 2010.
- [10] V.A. Marčenko and L.A. Pastur. Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mat. Sb.*, 1(4) :457–483, 1967.
- [11] A.M. Tulino and S. Verdu. Random matrix theory and wireless communications. *Found. Trends Commun. Inf. Theory*, 1(1) :1–182, 2004.
- [12] M. Kim, Y. Choi, C. Yoon, W. Choi, J. Kim, Q.H. Park, and W. Choi. Maximal energy transport through disordered media with the implementation of transmission eigenchannels. *Nature Photon.*, 6(9) :581–585, 2012.
- [13] Z. Shi and A.Z. Genack. Transmission eigenvalues and the bare conductance in the crossover to anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 108(4) :043901, 2012.
- [14] C.W.J. Beenakker and M. Büttiker. Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors. *Phys. Rev. B*, 46(3) :1889, 1992.
- [15] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, and C. Schönenberger. 1/3-shot-noise suppression in diffusive nanowires. *Phys. Rev. B*, 59(4) :2871, 1999.
- [16] I.M. Vellekoop and A.P. Mosk. Universal optimal transmission of light through disordered materials. *Phys. Rev. Lett.*, 101(12), sep 2008.
- [17] S. Krishnaswami. chapter Theory and applications of laser-ultrasonic techniques, pages 435–494. CRC Press, Boca Raton, FL, 2004.
- [18] D. Royer. Génération et détection optiques d’ondes élastiques. *Techniques de l’ingénieur. Electronique*, 6(E4415) :E4415–1, 1996.
- [19] O. Diligent, T. Grahn, A. Boström, P. Cawley, and M.J. Lowe. The low-frequency reflection and scattering of the s0 lamb mode from a circular through-thickness hole in a plate : Finite element, analytical and experimental studies. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(6) :2589–2601, 2002.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

---

- [20] M. Davy, Z. Shi, J. Park, C. Tian, and A.Z. Genack. Universal structure of transmission eigenchannels inside opaque media. *Nat. Commun.*, 6 :6893, 2015.
- [21] M. Davy, Z. Shi, and A.Z. Genack. Focusing through random media : Eigenchannel participation number and intensity correlation. *Phys. Rev. B*, 85(3) :035105, 2012.
- [22] S.E. Skipetrov. Information transfer through disordered media by diffuse waves. *Phys. Rev. E*, 67(3) :036621, 2003.
- [23] A. Goetschy and A. D. Stone. Information capacity of a disordered multimode waveguide. *Travaux non publiés*.
- [24] C. Grünsteidl, I. A Veres, J. Roither, P. Burgholzer, T.W. Murray, and T. Berer. Spatial and temporal frequency domain laser-ultrasound applied in the direct measurement of dispersion relations of surface acoustic waves. *Applied Physics Letters*, 102(1) :011103, 2013.
- [25] S. Rotter, P. Ambichl, and F. Libisch. Generating particlelike scattering states in wave transport. *Phys. Rev. Lett.*, 106(12) :120602, 2011.
- [26] R. Pierrat, P. Ambichl, S. Gigan, A. Haber, R. Carminati, and S. Rotter. Invariance property of wave scattering through disordered media. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 111(50) :17765–17770, 2014.
- [27] M.C. Cross and R. Lifshitz. Elastic wave transmission at an abrupt junction in a thin plate with application to heat transport and vibrations in mesoscopic systems. *Phys. Rev. B*, 64(8) :085324, 2001.
- [28] D.H. Santamore and M.C. Cross. Surface scattering analysis of phonon transport in the quantum limit using an elastic model. *Phys. Rev. B*, 66(14) :144302, 2002.

## CHAPITRE 2. CANAUX OUVERTS ET FERMÉS EN MILIEUX DIFFUSANTS

---

---

Canaux cohérents en milieux réverbérants

---

Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>Construction de canaux <i>particulaires</i> dans des milieux complexes</b>	<b>66</b>
3.2.1	Matrice de diffusion associée à une cavité	66
3.2.2	Loi bimodale, canaux ouverts / fermés	67
3.2.3	Canaux <i>particulaires</i> au sein d'une cavité	68
<b>3.3</b>	<b>Canaux <i>particulaires</i> dans une cavité régulière</b>	<b>70</b>
3.3.1	Description de l'étude expérimentale	70
3.3.2	Etude de l'opérateur de diffusion associé à la cavité régulière	71
3.3.3	Canaux <i>particulaires</i> associés à la cavité régulière	74
<b>3.4</b>	<b>Canaux <i>particulaires</i> dans un milieu multi-cibles</b>	<b>80</b>
3.4.1	Description de l'étude expérimentale	80
3.4.2	Canaux <i>particulaires</i> en transmission	80
3.4.3	Canaux <i>particulaires</i> en réflexion	84
<b>3.5</b>	<b>Discussion</b>	<b>86</b>
3.5.1	Comparaison des canaux <i>particulaires</i> avec les <i>modes principaux</i> des fibres optiques multimodes	87
3.5.2	Mise en perspective	87
3.5.3	Applications pratiques	88
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>89</b>
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>90</b>

---

### CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

---



### 3.1 Introduction

La propagation d'un paquet d'onde au sein d'un milieu complexe s'accompagne d'une dispersion à la fois spatiale et temporelle de ce dernier comme nous l'avons illustré dans le premier chapitre [cf. sous-partie 1.1.2, p. 15]. Toutefois, bien que complexe, le champ résultant de la propagation au sein de tels milieux n'en demeure pas moins déterministe. Comme montré lors du chapitre précédent, un contrôle cohérent du front d'onde incident permet de manipuler les interférences entre tous les chemins de diffusion que peut emprunter l'onde diffuse. Toutefois, ces phénomènes sont intrinsèquement limités à des bandes de fréquences très étroites. L'objectif de ce chapitre consiste à examiner l'existence de canaux ouverts ou fermés sur une large bande passante. En d'autres termes, est-il possible de trouver des chemins de diffusion le long desquels un paquet d'onde pourra se propager tout en maintenant sa cohérence temporelle. Comme nous allons le voir, cet objectif peut être atteint en faisant emprunter à l'onde des chemins de diffusion dont la trajectoire suit celle d'une particule. Ces canaux *particulaires*, mis en évidence théoriquement par Rotter *et al.* [1], n'impliquent pas de phénomène d'interférence entre des chemins de diffusion distincts. Ils ne souffrent donc pas de la sensibilité fréquentielle des canaux de diffusion ouverts ou fermés conventionnels. Dans les milieux diffusants, l'existence de canaux *particulaires* est peu probable. Dans ce chapitre, nous avons donc traité le cas de milieux réverbérants mettant en jeu des réflexions principalement spéculaires : une cavité régulière et un guide d'onde constitué de quelques diffuseurs.

Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons tout d'abord que le comportement bimodal de l'opérateur de propagation reste valable en cavité. Nous décrivons ensuite comment une combinaison de canaux ouverts ou fermés peut conduire à des canaux *particulaires* [1]. Ces derniers ont la propriété d'être états propres de la matrice de Wigner-Smith dite *des temps de vol*. Cette propriété sera utilisée pour les extraire de la matrice de diffusion mesurée expérimentalement. La première démonstration expérimentale de canaux cohérents spatialement est effectuée à l'aide d'une cavité taillée dans une plaque mince équivalente à celle utilisée au chapitre 2. La souplesse expérimentale de notre système nous permet ensuite d'étendre les prédictions de Rotter *et al.* [1]. La robustesse spectrale des canaux *particulaires* est mise en évidence, avant que leur démonstration ne soit étendue au domaine temporel. Dans un second temps, le cas d'un milieu multi-cibles est abordé. Nous mettons en évidence des canaux *particulaires* passant à travers ou rebondissant sur les cibles du milieu. Les canaux propres de la matrice de Wigner-Smith permettent également, en réflexion, de focaliser sélectivement sur chacune des cibles. Cette discrimination est basée sur le temps de vol des échos se réfléchissant sur chacune des cibles. Enfin, nous concluons ce chapitre par une mise en

perspective, en comparant nos résultats à des travaux récents en optique fibrée d'une part, puis en proposant des applications pratiques aux canaux cohérents.

## 3.2 Construction de canaux *particulaires* dans des milieux complexes

Dans cette partie, nous illustrons comment l'information contenue dans la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  permet la construction de canaux *particulaires* au sein de milieux complexes. Dans un premier temps, nous décrivons le formalisme de la matrice  $\mathbf{S}$  associée à une cavité avant, dans un second temps, de décliner les prédictions théoriques obtenues dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires, notamment le caractère bimodal de l'opérateur de propagation associé, c'est-à-dire des canaux totalement ouverts ou fermés dans leur grande majorité. Enfin, après avoir décrit l'opérateur de Wigner-Smith, nous exposons la démarche mise en place numériquement par Rotter *et al.* [1] de façon à discriminer les canaux *particulaires* parmi les états propres de la matrice de Wigner-Smith.

### 3.2.1 Matrice de diffusion associée à une cavité

Comme présenté dans la sous-partie 2.2.1 (p. 32), le formalisme de la matrice de diffusion (*Scattering Matrix*, notée  $\mathbf{S}$ ) et son traitement par la théorie des matrices aléatoires [2] trouvent de nombreuses applications dans le cadre des milieux diffusants. De la même façon, cet outil apparaît tout à fait adapté au cas des cavités chaotiques pour lesquelles les éléments de l'opérateur de propagation peuvent également être modélisés par des variables aléatoires. Il a ainsi été largement étudié, notamment dans le cadre du transport d'électrons au sein de boîtes quantiques (en anglais, *quantum dots*) [3, 4].

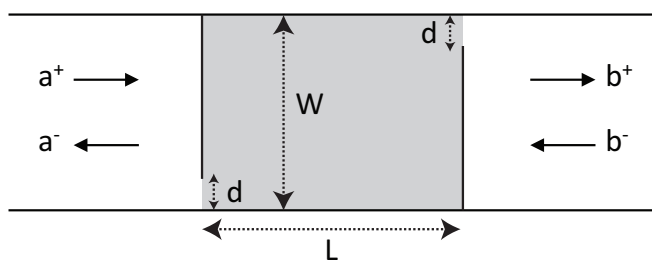


FIGURE 3.1 – Cavité fermée (au centre) reliée par deux guides d'ondes parfaits à gauche et à droite.

La figure 3.1 représente un exemple de cavité à laquelle sont reliés deux guides d'ondes dans lesquels il est possible de décomposer le champ sur une base de  $N$  modes propres. La matrice de diffusion est alors définie comme dans l'équation (2.4). La matrice  $\mathbf{S}$  ayant les mêmes contraintes qu'en milieu désordonné, c'est-à-dire qu'elle vérifie les principes de réciprocité et de conservation de l'énergie, il est possible d'en faire une décomposition polaire (Eq. (2.5)). Ainsi, les concepts de canaux propres de diffusion et de valeurs propres en transmission associés restent pertinents [cf. sous-partie 2.2.2, p. 33].

### 3.2.2 Loi bimodale, canaux ouverts / fermés

#### Densité de probabilité associée à une cavité chaotique

Contrairement au cas des milieux désordonnés, la distribution des valeurs propres en transmission est ici indépendante de la taille du système. Elle repose uniquement sur les hypothèses d'unitarité (c.-à-d. de conservation de l'énergie), de symétrie par renversement du temps ainsi que sur l'équiprobabilité de l'ensemble des événements de diffusion, constitutives de l'*ensemble circulaire*, introduit par Dyson [5]. En considérant la matrice  $\mathbf{S}$  comme le résultat d'un tirage aléatoire au sein de l'ensemble circulaire, Jalabert *et al.* [4] ont montré que la distribution des valeurs propres en transmission suit une *loi bimodale* représentée par l'équation :

$$\rho_b(T_i) = \frac{1}{\pi\sqrt{T_i(1-T_i)}}. \quad (3.1)$$

Cette distribution, représentée graphiquement sur la figure 3.2, implique là encore que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{tt}^\dagger$  seront presque sûrement soit nulles, soit égales à l'unité. En conséquence, les canaux de diffusion seront donc soit totalement ouverts, soit totalement fermés. Toutefois, le caractère chaotique du système entraîne l'équiprobabilité pour une onde ayant pénétré le système de le quitter par chacune des sorties possibles, en conséquence, la transmission moyenne et la réflexion moyenne sont égales ( $\langle T \rangle = \langle R \rangle = N/2$ ), d'où une densité de probabilité symétrique.

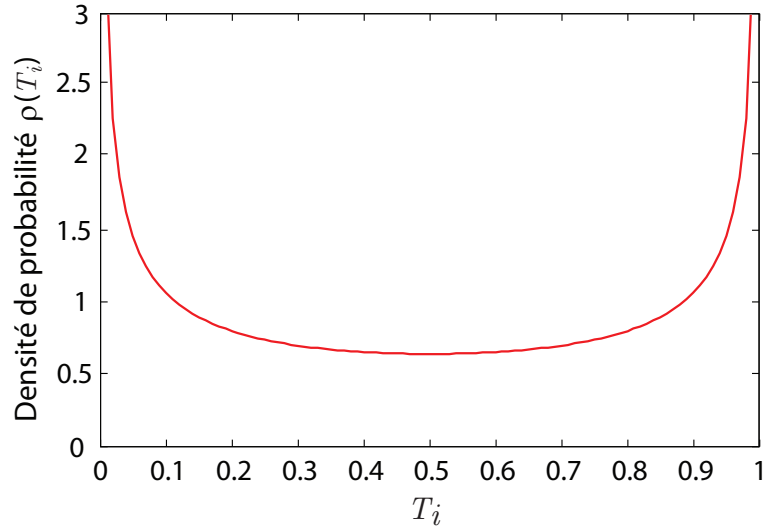


FIGURE 3.2 – Représentation de la loi bimodale (Eq. (3.1)) en transmission pour une cavité chaotique, c.-à-d. distribution de la probabilité des valeurs propres de transmission  $T_i$ .

#### Densité de probabilité associée à une cavité régulière

Considérons le système physique dont les paramètres géométriques sont fixés sur la figure 3.1, constitué d'une cavité fermée de largeur  $W$  et de longueur  $L$ , reliée à deux guides d'ondes parfaits à gauche et à droite par une entrée de largeur  $d$ . La cavité ainsi définie étant régulière, les prédictions de la théorie des matrices aléatoires ne sont *a priori* pas applicables. Toutefois, Aigner *et al.* [6] puis Rotter *et al.* [7] ont montré numériquement que le comportement de l'opérateur de propagation pouvait être décrit

par la théorie des matrices aléatoires dans la limite  $d \rightarrow 0$ . La densité de probabilité des valeurs propres associées suit alors la loi bimodale  $\rho_b$  décrite par l'équation (3.1).

### 3.2.3 Canaux *particulaires* au sein d'une cavité

La propagation d'ondes dans une cavité bidimensionnelle a pu être simulée par Stefan Rotter et ses collaborateurs [1] en utilisant la méthode des fonctions de Green récursives [8]. Il leur a ainsi été possible de mesurer la matrice  $\mathbf{S}$  associée à cette cavité reliée à deux guides d'onde comprenant chacun  $N = 75$  modes. La figure 3.3 représente la fonction d'onde associée à un canal ouvert de ce système. Ce dernier met en jeu de nombreux chemins de diffusion, d'où la dispersion spatiale de la fonction d'onde associée.

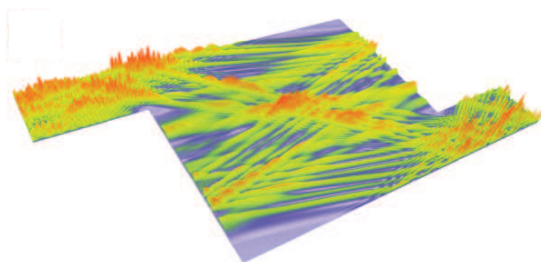


FIGURE 3.3 – Figure issue de [1]. Représentation de l'intensité du champ correspondant à un canal ouvert de la cavité reliée à deux guides d'ondes admettant  $N = 75$  modes propres.

Face à ce constat, Stefan Rotter *et al.* [1] ont récemment montré qu'il est possible de construire, à l'aide de combinaisons de canaux ouverts, des canaux *particulaires* pour lesquels, tout en étant entièrement transmise à travers le milieu, l'onde reste focalisée sur une trajectoire classique durant la totalité du processus de diffusion. Ces combinaisons sont obtenues parmi les états propres de la matrice de Wigner-Smith.

### Opérateur de Wigner-Smith

Le concept de *temps de retard* (en anglais, *delay time*) dans les processus de diffusion a été initialement développé au tournant des années 40–50 par Bohm [9] ainsi que par ses étudiants de l'époque, Wigner et Eisenbud [10, 11]. Leurs travaux ont ensuite été généralisés en 1959 par Smith [12] au cas multi-canaux à l'aide de l'opérateur de Wigner-Smith, noté  $\mathbf{Q}$  et défini par :

$$\mathbf{Q} = -\frac{i}{2\pi} \mathbf{S}^\dagger \partial_f \mathbf{S}, \quad (3.2)$$

où  $\partial_f$  représente l'opérateur de dérivation par rapport à la fréquence  $f$ .

Les éléments propres de l'opérateur de Wigner-Smith permettent de caractériser la durée d'évènements de diffusion au sein d'un milieu. L'opérateur  $\mathbf{Q}$  étant hermitien, l'ensemble de ses vecteurs propres, notés  $\mathbf{q}_i$ , forme une base orthogonale complète. Ces derniers se décomposent sur l'ensemble constitué par les deux bases de  $N$  modes propres du guide à gauche et à droite du milieu,  $\mathbf{q}_i = [\mathbf{q}_{i,G}, \mathbf{q}_{i,D}]$ . Chacun des canaux temporels correspond donc à l'injection simultanée, à droite et à gauche du système, des vecteurs propres  $\mathbf{q}_{i,G}$  et  $\mathbf{q}_{i,D}$ , respectivement. La valeur propre associée,  $\tau_i$ , représente

### 3.2. CONSTRUCTION DE CANAUX *PARTICULAIRES* DANS DES MILIEUX COMPLEXES

---

alors le temps de groupe associé, c'est-à-dire la durée passée au sein du système par un paquet d'onde résultant de l'excitation du vecteur propre  $\mathbf{q}_i$  sur une longueur de corrélation fréquentielle.

#### Construction des canaux propres *particulaires*

La possibilité de générer des états cohérents à partir de la matrice de Wigner-Smith repose sur l'existence d'une base d'états propres de l'opérateur  $\mathbf{Q}$  situés dans le sous-espace propre des canaux ouverts du système. En effet, alors que dans le cas général, les états propres de l'opérateur de Wigner-Smith correspondent à une injection simultanée des deux cotés du système, cette restriction est levée dans le sous-espace propre des canaux ouverts pour lesquels l'injection et la sortie du système se limitent à l'une des entrées. Les états propres obtenus combinent alors les deux propriétés essentielles que nous recherchons : ils sont entièrement transmis à travers le système tout en étant associés à un temps de groupe défini.

Dans la suite de leur étude numérique, Stefan Rotter *et al.* ont déterminé l'opérateur de Wigner à partir de la matrice  $\mathbf{S}$ , accédant ainsi numériquement aux canaux *particulaires*. Les résultats, présentés dans la figure 3.4, illustrent les caractéristiques de ces derniers. L'énergie incidente est non seulement entièrement transmise à travers la cavité mais la fonction d'onde reste collimatée le long d'une trajectoire suivant des réflexions spéculaires dans la cavité.

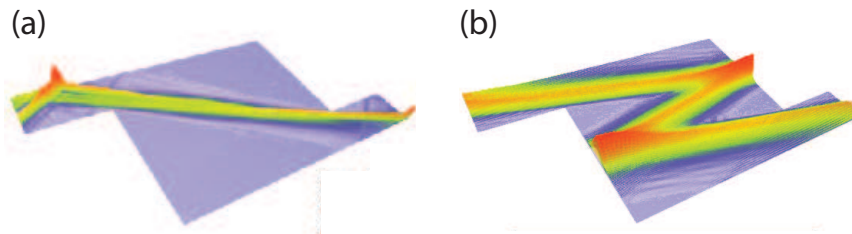


FIGURE 3.4 – Figures issues de [1]. Valeur absolue du champ correspondant à deux canaux *particulaires* obtenus pour un système composé de  $N = 75$  modes en entrée et en sortie.

#### Objectifs de l'étude expérimentale

Toutefois, puisqu'elle implique un accès aux canaux ouverts, la construction de ces canaux *particulaires* se heurte aux difficultés expérimentales décrites dans le chapitre 2 [cf. sous-partie 2.2.4, p. 35] pour le cas des canaux ouverts en régime diffusif. Ces derniers n'ont donc pas pu être observés expérimentalement ; le premier objectif de ce chapitre réside dans leur mise en évidence expérimentale. Dans un deuxième temps, les caractéristiques de notre système – notamment la mesure résolue en phase et en amplitude du champ sur l'ensemble de la plaque – nous permettent de dépasser le cadre de ces prédictions. Nous montrons ainsi que les caractéristiques de ces états propres leur confèrent une grande robustesse spectrale, laquelle est ensuite mise à profit pour observer ces canaux *particulaires* dans le domaine temporel. Une seconde partie de notre travail consiste ensuite à étendre cette approche aux canaux *particulaires* obtenus

en réflexion. Cette étude nous permet notamment de développer une méthode novatrice pour la détection et la focalisation dans un milieu multi-cibles.

### 3.3 Canaux *particulaires* dans une cavité régulière

#### 3.3.1 Description de l'étude expérimentale

Dans cette partie, nous montrons comment une modification adaptée du système physique présenté dans le chapitre 2 doit nous permettre d'accéder expérimentalement aux canaux *particulaires* décrits précédemment.

##### Système physique

Dans la première partie de notre étude expérimentale, nous considérons la propagation d'ondes de flexion à travers une plaque de Duralumin dans laquelle a été taillée une cavité [Fig. 3.5]. Comme dans le chapitre précédent, les ondes élastiques sont générées puis détectées au moyen de techniques ultrason-laser.

La possibilité de déterminer des canaux *particulaires* repose sur une mesure complète de l'opérateur de diffusion  $\mathbf{S}$  associé au milieu. Les motivations pour ce système sont donc identiques à celles décrites dans le chapitre précédent [cf. sous-partie 2.3.1, p. 36], à savoir la conservation de l'énergie au sein du système et la possibilité d'exciter et de mesurer l'ensemble des modes. À cela s'ajoute la possibilité offerte en acoustique d'avoir une mesure résolue en temps du champ, à la fois en phase et en amplitude. Il est donc non seulement possible d'accéder à la mesure de la matrice  $\mathbf{S}$  et donc de déduire l'opérateur de Wigner-Smith  $\mathbf{Q}$  sur l'ensemble de la bande passante, mais aussi d'étudier la dépendance spectrale puis temporelle des différents états propres.

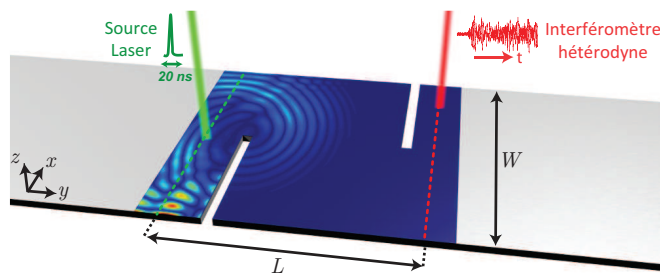


FIGURE 3.5 – Représentation de la cavité régulière étudiée. La matrice  $\mathbf{S}$  est mesurée au sein de chacun des deux systèmes par un dispositif ultrason-laser tel que décrit dans le chapitre 2 (cf. sous-partie 2.4, p. 38).

La géométrie et les caractéristiques du système sont là encore largement inspirées du système étudié dans le chapitre précédent. Ainsi, le matériau et les dimensions de la plaque (la longueur totale  $L_{tot} = 500$  mm, la largeur  $W = 40$  mm et l'épaisseur  $T = 0.5$  mm) sont inchangées, tout comme la bande de fréquence étudiée ( $f \in [0,23 - 0,37]$  MHz, soit  $\lambda \sim 3,5$  mm), de façon à satisfaire les propriétés de conservation de l'énergie ainsi que la forme des modes décrits dans l'annexe 2.A.1 (p. 56). La cavité régulière est conçue grâce à deux barrières de dimensions  $d = 20$  mm dans la largeur du guide et  $L_2 = 3$  mm dans la longueur du guide, situées à une distance

### 3.3. CANAUX PARTICULAIRES DANS UNE CAVITÉ RÉGULIÈRE

$L_1 = 5$  mm des deux tableaux de sources / récepteurs [Fig. 3.6]. L'épaisseur du système considéré est de  $L = 45$  mm.

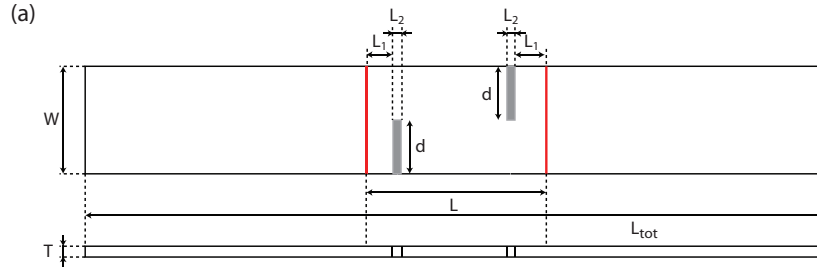


FIGURE 3.6 – Géométries retenues pour l'étude de la cavité régulière.

#### Méthodes expérimentales

**Génération, détection et montage expérimental** Étant donnée les points communs entre les systèmes physiques étudiés, les méthodes expérimentales sont similaires à celles décrites dans le chapitre précédent [cf. partie 2.3.3, p. 37]. La génération des ondes se fait donc par effet thermoélastique à l'aide d'un laser Nd :YAG émettant des impulsions d'une durée de 20 ns et d'énergie 2,5 mJ. La détection est assurée par un interféromètre hétérodyne, sensible à la composante orthogonale du déplacement. Le montage expérimental [Fig. 3.5(a)] est quant à lui en tout point identique à celui utilisé dans le chapitre 2.

**Acquisition de la matrice  $\mathbf{S}$**  L'acquisition de la matrice  $\mathbf{S}$  se fait dans l'espace réel, comme présenté dans la sous-partie 2.4.1 (p. 39). Dans un premier temps, l'ensemble des réponses impulsionnelles entre les deux tableaux de  $M$  points représentés en rouge sur la figure 3.6 est mesuré avec un pas  $\Delta y = 0,8$  mm suffisant pour accéder à l'ensemble des modes propres du guide ( $\Delta y < \lambda/2$ ). La matrice  $\mathbf{S}$  est ensuite exprimée dans la bande de fréquences de 0,23 à 0,37 MHz ( $\Delta f = 0,14$  MHz) par une transformée de Fourier temporelle sur des signaux de longueur  $\Delta t = 120 \mu s$ , tronqués de façon à exclure les signaux réfléchis aux extrémités de la plaque. Enfin, la matrice de diffusion est exprimée à chaque fréquence dans la base des modes propres du guide décrits dans la sous-partie 2.A.1 (p. 56).

#### 3.3.2 Etude de l'opérateur de diffusion associé à la cavité régulière

Dans cette partie, nous illustrons expérimentalement comment il est possible d'étendre cette approche au cas d'une cavité régulière. Après avoir décrit la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée expérimentalement, nous montrons comment l'étude de la statistique des valeurs propres en transmission permet de retrouver le caractère bimodal de l'opérateur de propagation associé à la cavité régulière. Dans une seconde partie, nous étudions plus précisément les canaux ouverts ainsi mis en évidence. Nous nous attachons notamment à mettre en évidence la dispersion spatiale puis temporelle des paquets d'ondes au cours de leur propagation.

#### Matrice de diffusion acquise expérimentalement

La partie réelle de la matrice de diffusion mesurée à la fréquence  $f = 0,30$  MHz est présentée dans la base des  $N = 22$  modes propres du guide sur la figure 3.7(a).

## CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

Sur chacune des matrices de transmission / réflexion, la majeure partie de l'énergie est distribuée sur la diagonale principale ainsi que sur les deux sous-diagonales. Ces dernières rendent compte de la conversion entre modes pairs et impairs de fréquences spatiales similaires. La prédominance de ces éléments sur les matrices de réflexion et de transmission est liée au front balistique d'une part et aux réflexions spéculaires sur les parois de la cavité d'autre part.

La figure 3.7(b) représente la valeur absolue de la matrice de diffusion exprimée dans le domaine de Fourier spatial, de façon à mettre en exergue la composante angulaire des modes en entrée et en sortie du système. Sur chacune des deux matrices de réflexion, les éléments de l'antidiagonale principale dominent du fait des réflexions spéculaires sur chacune des parois à l'entrée et la sortie de la cavité. Sur les matrices de transmission, certains éléments de la diagonale et de l'antidiagonale principales ressortent pour différentes gammes angulaires, illustrant la contribution de chemins sur lesquels l'onde subit respectivement un nombre pair et impair de réflexions spéculaires.

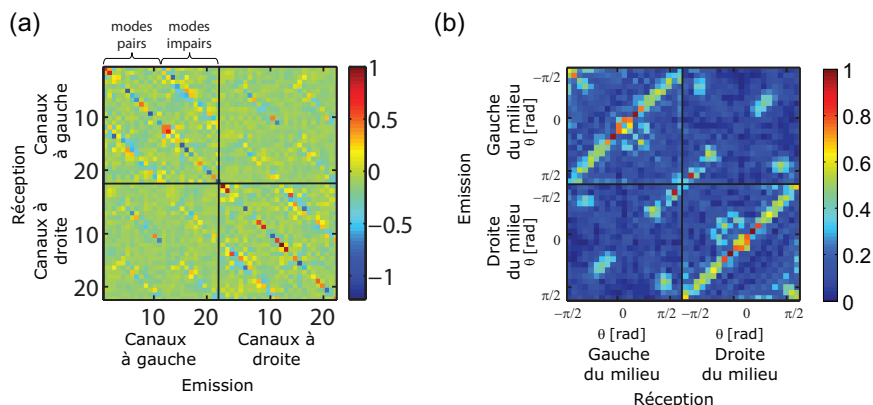


FIGURE 3.7 – (a) Partie réelle de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée à la matrice  $f = 0,30$  MHz exprimée dans la base des modes propres du guide.(b) Amplitude de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée à la matrice  $f = 0,30$  MHz exprimée dans le domaine de Fourier spatial. Sur chacune des deux figures, les lignes noires délimitent les quatre blocs décrits par les équations (2.4) et (2.49).

### Statistiques des valeurs propres en transmission

Dans un premier temps, la distribution  $\rho(T)$  des valeurs propres en transmission  $T$  est estimée en moyennant les histogrammes des valeurs propres obtenues sur la bande de fréquence considérée. La figure 3.8 représente la comparaison entre la distribution mesurée dans la cavité régulière et la loi bimodale prédite dans le cas d'une cavité chaotique. Bien que le système considéré soit situé loin du régime chaotique, l'opérateur de propagation présente un caractère bimodal en bon accord avec les prédictions de la théorie des matrices aléatoires, confirmant ainsi les résultats numériques précédemment présentés dans le paragraphe 3.2.2 (p. 67).

### Etude des canaux ouverts associés à la cavité régulière

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, alors que les valeurs propres de l'opérateur  $\mathbf{tt}^\dagger$  nous renseignent sur l'efficacité de la transmission associée à chacun des canaux de diffusion, le vecteur propre associé indique lui la combinaison de modes



### 3.3. CANAUX PARTICULAIRES DANS UNE CAVITÉ RÉGULIÈRE

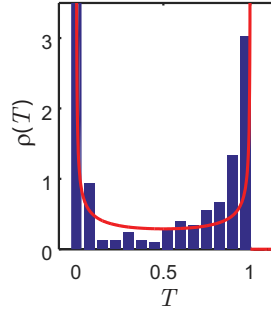


FIGURE 3.8 – Histogramme des valeurs propres en transmission  $\rho(T)$  moyenné sur l'ensemble de la bande de fréquence. La distribution est comparée à la loi bimodale  $\rho_b$  (Eq. (3.1)) [trait rouge continu].

propres incidents permettant d'exciter spécifiquement ce dernier. Grâce à la résolution spatiale et temporelle de nos mesures expérimentales, nous allons pouvoir maintenant étudier le comportement spatio-temporel des fonctions d'onde associées à ces canaux ouverts.

**Dispersion spatiale** Dans un premier temps, la dispersion spatiale des canaux de diffusion est analysée. À cette fin, la fonction d'onde monochromatique associée aux deux premiers canaux ouverts ( $T \sim 1$ ) est mesurée à la fréquence  $f_0 = 0,30$  MHz en suivant la méthode décrite dans la sous-partie 2.5.3 (p. 46) [Fig. 3.9]. Bien que le front incident soit effectivement façonné de manière à ce que toute l'énergie incidente soit transmise par la cavité, l'onde n'emprunte pas une trajectoire particulière et le champ à l'intérieur de la cavité présente un aspect aléatoire, notamment sur la figure 3.9(a).

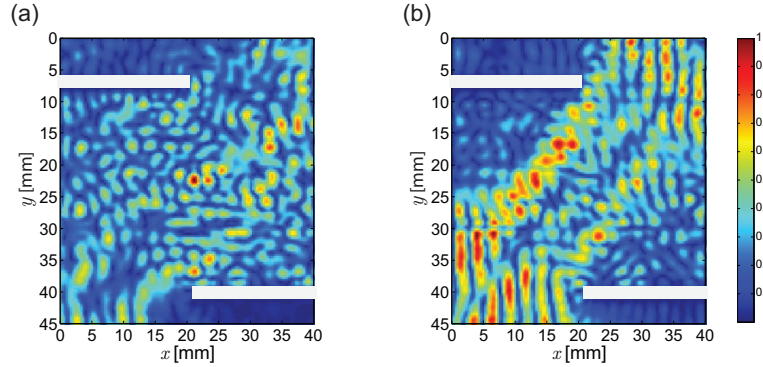


FIGURE 3.9 – (a)-(b) Amplitude du champ associé aux deux premiers canaux ouverts à la fréquence  $f = 0,30$  MHz au sein de la cavité régulière.

**Dispersion temporelle** Dans un second temps, la dispersion temporelle est mise en évidence à partir de la trace temporelle des canaux propres. De façon à les déterminer, nous commençons par extraire la matrice de transmission  $\mathbf{t}(f_0)$  (associée à une injection à gauche du milieu) de la matrice  $\mathbf{S}(f_0)$  mesurée à la fréquence centrale  $f_0$ . Les vecteurs propres associés  $\mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{v}_i$  sont alors déterminés par une décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de transmission à la fréquence  $f_0$ ,

$$\mathbf{t}(f_0) = \sum_i \sqrt{T_i(f_0)} \mathbf{u}_i(f_0) \mathbf{v}_i(f_0), \quad (3.3)$$

## CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

où  $T_i$  est le coefficient de transmission en intensité associé au  $i^{\text{ème}}$  canal de diffusion. Chacun des coefficients de transmission en amplitude à la fréquence  $f$ ,  $t_i(f)$ , peut alors être déduit sur l'ensemble de la bande de fréquence à partir des différentes matrices de transmission  $\mathbf{t}(f)$ ,

$$t_i(f) = \mathbf{u}_i^\dagger(f_0)\mathbf{t}(f)\mathbf{v}_i(f_0). \quad (3.4)$$

Une transformée de Fourier inverse permet alors de retrouver  $t_i(\tau)$ , la trace temporelle du  $i^{\text{ème}}$  canal de diffusion.

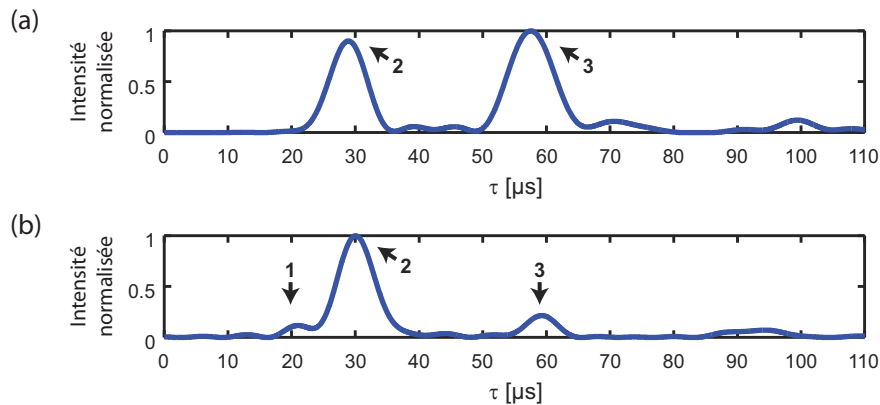


FIGURE 3.10 – (a)-(b) Trace temporelle des deux premiers canaux propres (présentés sur la figure 3.9), déduites de l'ensemble de matrices  $\mathbf{t}(f)$  mesurées sur la bande de fréquence considérée ( $[0,23 - 0,37]$  MHz). Sur chacun des tracés, les trois principaux échos sont numérotés de 1 à 3.

Les traces temporelles associées aux deux canaux ouverts de la figure 3.9 confirment l'observation faite dans la sous-partie précédente [cf. Figs. 3.10(a)-(b)]. La dispersion spatiale des canaux propres s'accompagne logiquement d'une dispersion temporelle du paquet d'onde associé. Chacune des traces temporelles présente une succession d'échos associés à trois temps de vols principaux. Comme nous le verrons plus tard, chaque écho peut être associé à un trajet de diffusion pouvant être isolé à l'aide de la matrice de Wigner-Smith  $\mathbf{Q}$ .

### 3.3.3 Canaux *particulaires* associés à la cavité régulière

Dans cette partie, nous déterminons les canaux *particulaires* associés à la cavité régulière. Dans un premier temps nous décrivons la méthode systématique à partir de laquelle ils sont déterminés expérimentalement. Dans un second temps, nous mettons en évidence leur cohérence spatiale et temporelle. Enfin, nous montrons comment leur robustesse spectrale en fait des candidats de choix pour la construction de paquets d'ondes faiblement dispersifs dans le domaine temporel.

#### Détermination des canaux *particulaires*

Comme nous l'avons décrit dans la sous-partie 3.2.3 (p. 69), les canaux *particulaires* sont déterminés à partir de la matrice de Wigner-Smith notée  $\mathbf{Q}$ . Cette dernière est déduite de la matrice  $\mathbf{S}$  expérimentale suivant l'équation (3.2). La dérivée fréquentielle de la matrice  $\mathbf{S}$  à la fréquence  $f = f_0$  est estimée par un calcul de différence finie centrée,

$$\partial_f \mathbf{S}(f_0) = \frac{\mathbf{S}(f_0 + \delta f) - \mathbf{S}(f_0 - \delta f)}{2\delta f}, \quad (3.5)$$

### 3.3. CANAUX PARTICULAIRES DANS UNE CAVITÉ RÉGULIÈRE

avec  $\delta f = 3$  kHz. Les canaux *particulaires* sont alors définis comme étant à la fois états propres de  $\mathbf{Q}$  et situés dans le sous espace propre des canaux ouverts du guide. Ils combinent alors les propriétés caractéristiques de ces deux ensembles d'états propres : tout en étant associés à des temps de groupe bien définis, ils permettent une transmission de la totalité de l'énergie à travers la cavité.

Comme décrit par Rotter *et al.* [1], ces critères peuvent être traduits de façon à définir une procédure systématique permettant la détermination de chacun des canaux *particulaires*. Dans un premier temps, les différents états propres de la matrice de Wigner-Smith sont déterminés par sa diagonalisation,

$$\mathbf{Q}(f_0) = \sum_m \tau_m \mathbf{q}_m^e(f_0) [\mathbf{q}_m^e(f_0)]^\dagger. \quad (3.6)$$

Les vecteurs propres de  $\mathbf{Q}(f_0)$ ,  $\mathbf{q}_m^e(f_0)$ , sont alors des vecteurs de dimension  $2N$ , décomposables comme

$$\mathbf{q}_m^e(f_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{m,G}^e(f_0) \\ \mathbf{q}_{m,D}^e(f_0) \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{q}_{m,G}^e(f_0)$  et  $\mathbf{q}_{m,D}^e(f_0)$  contiennent les coefficients de  $\mathbf{q}_m^e(f_0)$  dans la base des  $N$  modes propres du guide d'onde situés à gauche et à droite, respectivement. Parmi l'ensemble des états propres de  $\mathbf{Q}$ , les canaux *particulaires* doivent remplir la condition :

$$\|\mathbf{q}_{m,G}^e(f_0)\|^2 \gg \|\mathbf{q}_{m,D}^e(f_0)\|^2 \approx 0. \quad (3.8)$$

Alors que les états propres de la matrice de Wigner-Smith sont en général associés à une injection simultanée à droite et à gauche de la cavité, cette condition permet de sélectionner les états pour lesquels l'injection se fait uniquement depuis la gauche. Ils correspondent alors à des canaux entièrement transmis. De plus, ces canaux *particulaires* peuvent être réduits sous la forme d'un vecteur de dimension  $N$ ,  $\mathbf{q}_{m,G}^e(f_0)$ . Par ailleurs, le vecteur correspondant au champ à la sortie de la cavité,  $\mathbf{q}_{m,D}^s(f_0)$ , et le coefficient de transmission  $t_m^{(g)}(f_0)$  associés au  $m$ -ème état propre se déduisent comme,

$$\mathbf{t}(f_0) \mathbf{q}_{m,G}^e(f_0) = t_m^{(g)}(f_0) \mathbf{q}_{m,D}^s(f_0). \quad (3.9)$$

#### Canaux *particulaires* associés à la cavité régulière

L'application de la procédure décrite dans le paragraphe précédent nous permet de déterminer trois canaux *particulaires* associés à chacun des échos mis en évidence sur la figure 3.10.

**Dispersion spatiale** La fonction d'onde associée à chacun de ces canaux est présentée sur la figure 3.11 à la fréquence  $f_0 = 0,30$  MHz. Ces fonctions d'onde confirment le caractère *particulaire* des états propres obtenus expérimentalement. En effet, alors que le premier état propre (Fig. 3.11 (a)) correspond au trajet direct entre l'entrée et la sortie du système, les deux suivants (Fig. 3.11 (b)-(c)) présentent des trajectoires plus complexes comprenant respectivement deux et quatre réflexions sur les différentes parois de la cavité. On note également que les *temps de retard* associés correspondent aux temps que mettrait une particule se déplaçant à la vitesse de groupe  $v_g \sim 2,6$  mm/ $\mu$ s des ondes de flexion en suivant chacune des trois trajectoires. Enfin, les coefficients de transmission  $|t_m|$  associés à chacune des trajectoires valent respectivement 0,90, 0,95 et 0,85, validant ainsi la transmission quasi-totale des canaux *particulaires*.

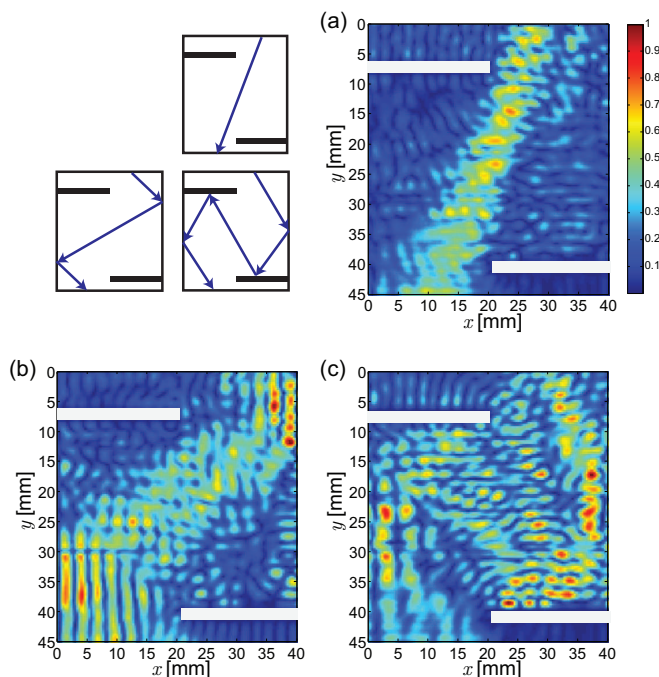


FIGURE 3.11 – (a)-(c) Amplitude du champ associé aux trois canaux *particulaires* obtenus à partir de la matrice de Wigner-Smith mesurée dans la cavité régulière à  $f_0 = 0,30$  MHz. Les *temps de retard* correspondants, (a),  $\tau_m = 20 \mu\text{s}$ , (b),  $\tau_m = 30 \mu\text{s}$  et (c),  $\tau_m = 59 \mu\text{s}$  sont en parfaite concordance avec la longueur des trajectoires classiques représentées dans l’insert situé en haut à gauche.

**Dispersion temporelle** De manière similaire à ce que nous avons présenté pour les modes propres de la matrice  $\mathbf{S}$  [cf. sous-partie 3.3.2, p. 73], il est possible d’obtenir  $t_m^{(q)}(f)$ , la trace temporelle associée à chacun de ces canaux *particulaires*. Celle-ci se déduit des vecteurs propres  $\mathbf{q}_{m,G}^e(f_0)$  et  $\mathbf{q}_{m,D}^s(f_0)$ , correspondant respectivement aux champ entrant et sortant à gauche et à droite du milieu considéré (cf. Eq. (3.9)) ainsi que de l’ensemble des matrices de transmission  $\mathbf{t}(f)$  mesurées sur la bande de fréquence considérée, selon la formule,

$$t_m^{(q)}(f) = \left[ \mathbf{q}_{m,D}^s(f_0) \right]^\dagger \mathbf{t}(f) \mathbf{q}_{m,G}^e(f_0). \quad (3.10)$$

La trace temporelle,  $t_m^{(q)}(\tau)$ , est ensuite obtenue par une transformée de Fourier discrète inverse.

Le résultat, présenté sur la figure 3.12, confirme les observations faites dans le paragraphe précédent. Contrairement aux canaux ouverts en transmission, chaque canal *particulaire* n’est associé qu’à un seul écho arrivant à l’instant  $\tau = \tau_m$ . De plus, il est possible de faire correspondre chacun des trois échos présents sur la trace temporelle des canaux de diffusion à un trajet *particulaire* [Fig. 3.12]. Le premier canal ouvert [Fig. 3.9(a)] est ainsi principalement une combinaison des deux trajets de diffusion présentés sur les figures 3.12 (b)-(c) alors que le second canal ouvert [Fig. 3.9(a)] est lui une combinaison des trois trajets présentés sur la figure 3.12. On arriverait à la même conclusion en analysant la décomposition vectorielle de chacun des canaux ouverts dans la base formée par les canaux *particulaires*.

### 3.3. CANAUX PARTICULAIRES DANS UNE CAVITÉ RÉGULIÈRE

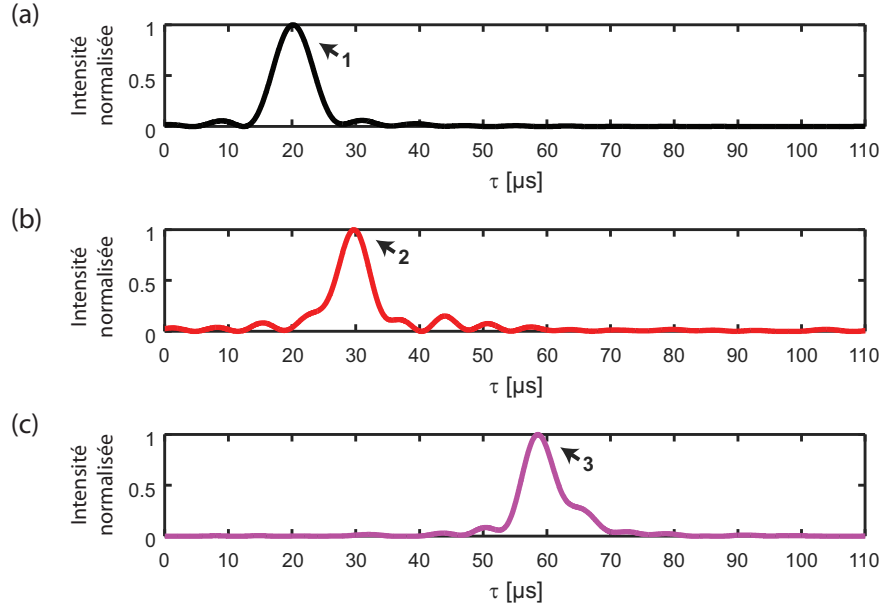


FIGURE 3.12 – (a)-(c) Trace temporelle des trois canaux *particulaires* (présentés sur la figure 3.11), déduites de l'ensemble de matrice  $\mathbf{t}(f)$  mesurées sur la bande de fréquence considérée ( $[0.23 - 0.37]$  MHz). Sur chacun des tracés, la numérotation des différents échos de 1 à 3 renvoie à la numérotation similaire faite sur la figure 3.10.

#### Stabilité fréquentielle des canaux *particulaires*

Les figures 3.13 (a)-(c) représentent les coefficients de transmission  $t_m^{(q)}(f)$  obtenus pour chacun des canaux *particulaires* présentés précédemment. L'évolution fréquentielle de  $t_m^{(q)}(f)$  nous permet de définir les domaines de stabilité fréquentielle des différents états propres : le premier état propre reste stable sur l'ensemble de la bande  $f = 0,2 - 0,6$  MHz, le deuxième sur la bande  $f = 0,3 - 0,6$  MHz et le troisième sur la bande  $f = 0,2 - 0,4$  MHz. Afin d'être plus quantitatif, nous avons ensuite estimé la fonction de corrélation spectrale de chaque état, définie comme,

$$C_m(\delta f) = t_m^{(q)}(f_0) t_m^{(q)*}(f_0 + \delta f), \quad (3.11)$$

où  $f_0$  est la fréquence centrale associée. Les résultats sont représentés sur les figures 3.13 (d)-(f) et comparés à la fonction de corrélation spectrale moyenne des coefficients de la matrice de transmission  $t_{ij}(f)$ , définie comme,

$$C(\delta f) = \langle t_{ij}(f) t_{ij}^*(f + \delta f) \rangle, \quad (3.12)$$

où le symbole  $\langle \cdot \rangle$  correspond à la moyenne sur l'ensemble de la bande de fréquence considérée. La largeur à mi-hauteur de  $C_m(\delta f)$  permet de retrouver la largeur de corrélation spectrale correspondante à chacun des trois canaux *particulaires*. On trouve pour les trois premiers états propres  $\delta f_m = 0,16$  MHz [Fig. 3.13(a)],  $\delta f_m = 0,17$  MHz [Fig. 3.13(b)] et  $\delta f_m = 0,12$  MHz [Fig. 3.13(c)]. La comparaison de ces trois valeurs avec la largeur de corrélation des coefficients de la matrice de transmission,  $\delta f_c = 0,02$  MHz, indique que les largeurs de corrélation spectrale des canaux *particulaires* sont respectivement 8, 8,5 et 6 fois plus grande que  $\delta f_c$ . Cette comparaison met en lumière la stabilité fréquentielle des canaux *particulaires*.

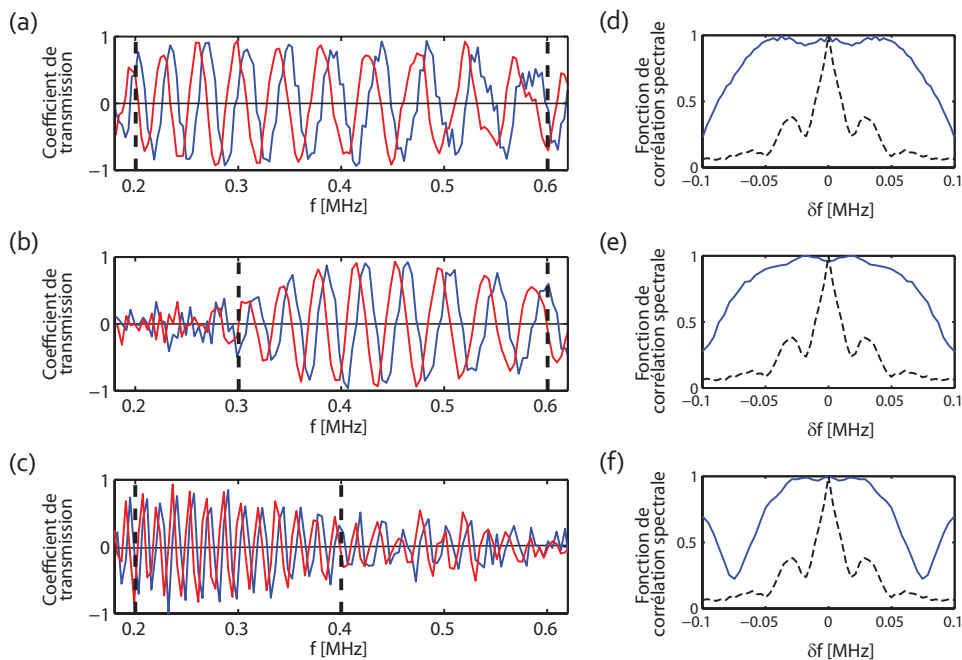


FIGURE 3.13 – (a)-(c) Dépendance fréquentielle des coefficients de transmission  $t_m^{(q)}$  de chacun des trois états *particulaires* présentés sur les figures 3.9 (a)-(c) (ligne bleu : partie réelle, ligne rouge : partie imaginaire). Les lignes verticales pointillées délimitent les bandes passantes de chacun des canaux. (d)-(f) Coefficient de corrélation spectrale  $|C_m(\delta f)|$  (ligne bleue) des coefficients de transmission  $t_m^{(q)}$  présentés dans les figures 3.13 (a)-(c), respectivement. Chacun des coefficients de corrélation spectrale est calculé en considérant la fréquence centrale  $f_0$  correspondante. Chacune des courbes est comparée à la fonction de corrélation des éléments de la matrice de transmission  $C(\delta f)$  (traits noirs pointillés).

### Paquets d’ondes se propageant le long de canaux *particulaires*

La stabilité spectrale des canaux *particulaires* en fait des candidats de choix pour la construction de paquets d’ondes très faiblement dispersifs dans le domaine temporel. Afin de le vérifier, les fonctions d’onde spatio-temporelles associées ont été mesurées.

La démarche suivie pour représenter l’évolution du champ spatio-temporel associé à un état propre donné est proche de celle présentée dans la sous-partie 2.5.3 (p. 46). Dans un premier temps, nous mesurons l’ensemble des réponses impulsionnelles entre les points de la ligne source et une grille de points recouvrant l’ensemble du milieu, espacés d’un pas  $\Delta x = 1,3$  mm. L’ensemble des réponses impulsionnelles forme une matrice de transmission  $\mathbf{k}(\tau) = [k_{ij}(\tau)]$ . Cette matrice est ensuite exprimée sur l’ensemble de la bande de fréquence considérée à l’aide d’une transformée de Fourier discrète (TFD) de  $\mathbf{k}(\tau)$ . Les lignes de la matrice  $\mathbf{k}(f)$  ainsi obtenue sont ensuite décomposées dans l’espace des modes propres du guide. Le champ monochromatique  $\Psi(f) = [\Psi_j(f)]$  correspondant à l’état propre associé au vecteur  $\mathbf{q}_{m,D}^e(f_0)$  est obtenu par multiplication de ce dernier avec la matrice  $\mathbf{k}(f)$ . Enfin, le champ spatio-temporel  $\Psi(\tau) = [\Psi_j(\tau)]$  est obtenu par une TFD inverse sur la bande de fréquence choisie. Préalablement, les matrices  $\mathbf{k}(f)$  sont apodisées par une fenêtre de Hann afin de limiter les lobes secondaires dans le domaine temporel.

### 3.3. CANAUX PARTICULAIRES DANS UNE CAVITÉ RÉGULIÈRE

La propagation spatio-temporelle des paquets d'ondes *particulaires* construits peut-être observée sur trois films joints à la référence [13]. Les bandes de fréquence considérées pour la construction des paquets d'onde sont déterminées à partir de la figure 3.13. Les figures 3.14 – 3.16 représentent, à des temps successifs, chacun des paquets d'ondes associés au canaux *particulaires* des figures 3.11 (a)–(c). De façon remarquable, dans chacun des cas, la cohérence spatio-temporelle du paquet d'onde est conservée tout au long de sa propagation à travers le système, malgré les événements de diffusions subis dans la cavité.

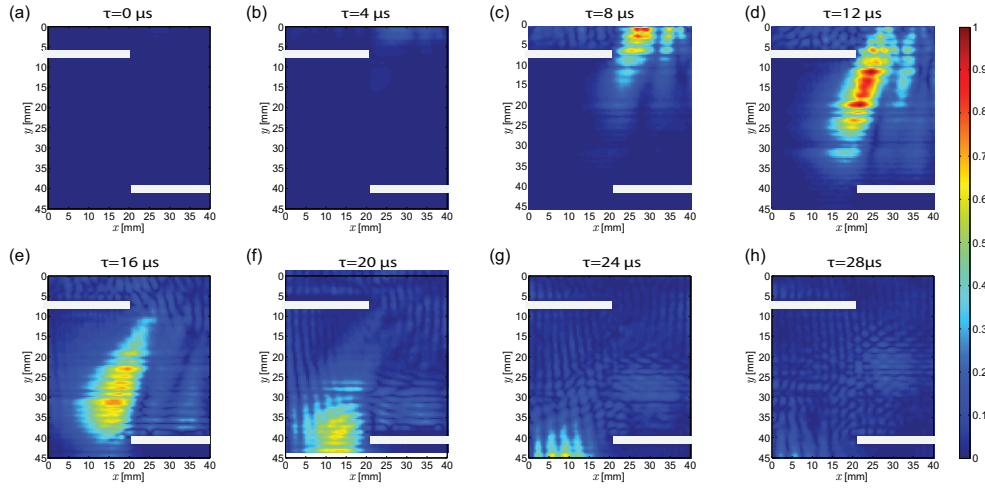


FIGURE 3.14 – (a)-(h) Représentation à différents instants de l'amplitude du champ spatio-temporel  $[0,2 - 0,6]$  MHz à partir du canal *particulaire* présenté sur la figure 3.11(a).

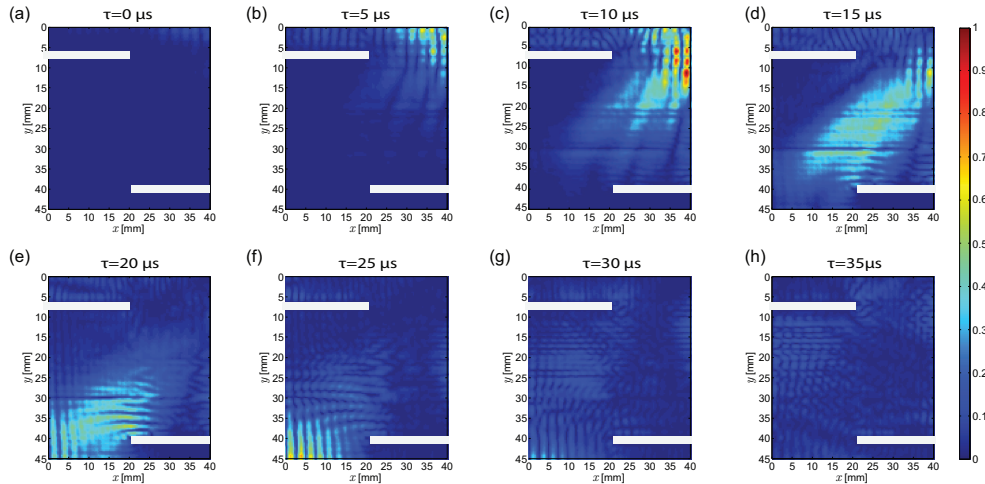


FIGURE 3.15 – (a)-(h) Représentation à différents instants de l'amplitude du champ spatio-temporel construit sur la bande de fréquence  $[0,3 - 0,6]$  MHz à partir du canal *particulaire* présenté sur la figure 3.11(b).

Cette première partie nous a permis d'apporter une démonstration expérimentale des canaux *particulaires* transmis à travers une cavité régulière. L'étude des fonctions d'ondes spatio-temporelles associées à ces états propres nous a ensuite permis de mettre

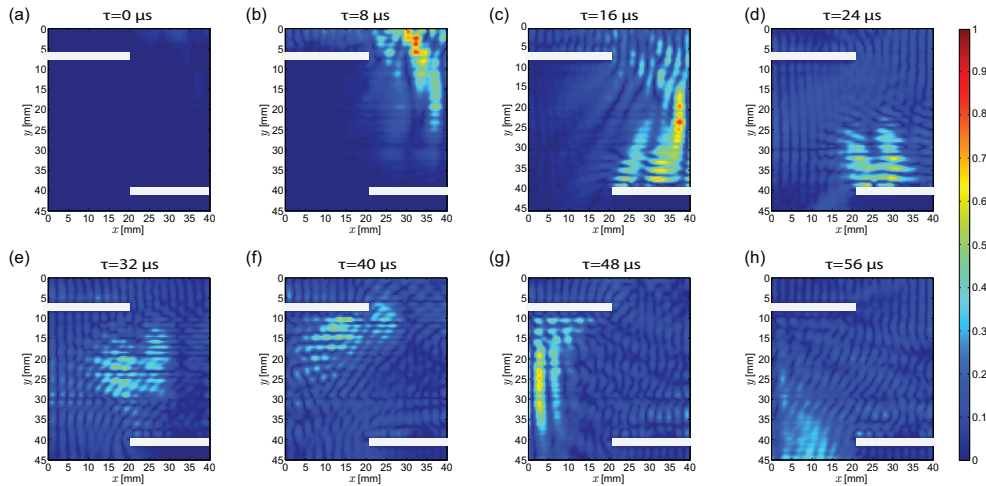


FIGURE 3.16 – (a)-(h) Représentation à différents instants de l’amplitude du champ spatio-temporel construit sur la bande de fréquence  $[0,2 - 0,4]$  MHz à partir du canal *particulière* présenté sur la figure 3.11(c).

en évidence la cohérence spatiale et temporelle de ces derniers, le long de trajectoires suivant des réflexions spéculaires dans la cavité. Avant de discuter des applications potentielles de ces canaux *particulaires*, nous nous proposons d’en poursuivre l’étude à travers le cas d’un milieu multi-cibles.

### 3.4 Canaux *particulaires* dans un milieu multi-cibles

Cette partie présente l’extension de l’étude précédente au cas d’un milieu multi-cibles. Nous montrons ainsi comment l’étude de canaux *particulaires* en transmission permet d’exciter sélectivement des chemins par lesquels l’onde se fraie un chemin à travers le désordre. Dans un second temps, les canaux propres de la matrice de Wigner-Smith sont utilisés en réflexion, de façon à focaliser sélectivement sur chacune des cibles.

#### 3.4.1 Description de l’étude expérimentale

La seconde partie de notre étude expérimentale porte sur la propagation d’ondes de flexion à travers un milieu multi-cibles d’épaisseur  $L = 52$  mm, constitué dans une plaque de Duralumin en y perçant quelques trous de diamètres largement supérieurs à la longueur d’onde  $\lambda$  [Fig. 3.17].

L’acquisition de la matrice de diffusion se fait en suivant les méthodes d’acquisition et le traitement des données utilisés pour la cavité régulière [cf. sous-partie 3.3.1, p. 71].

#### 3.4.2 Canaux *particulaires* en transmission

##### Canaux ouverts

La figure 3.18(a) représente la partie réelle de la matrice de diffusion mesurée à la fréquence  $f = 0,30$  MHz dans le milieu multi-cibles présenté sur la figure 3.17. Malgré le faible désordre, la matrice  $\mathbf{S}$  prend une apparence aléatoire avec toutefois la présence d’un front balistique résiduel sur la diagonale principale de chacune des matrices de transmission. Il est ensuite possible, comme nous l’avons fait pour la cavité régulière,



### 3.4. CANAUX PARTICULAIRES DANS UN MILIEU MULTI-CIBLES

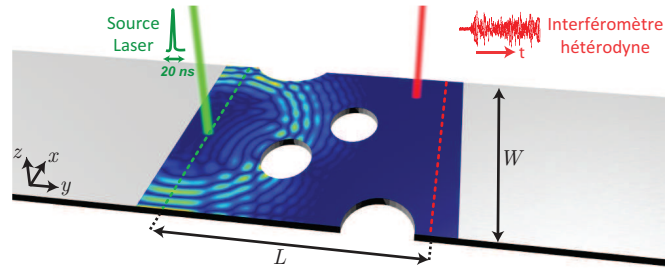


FIGURE 3.17 – Représentation du milieu multi-cibles étudié. La matrice  $\mathbf{S}$  est mesurée au sein de chacun des deux systèmes par un dispositif ultrason-laser tel que décrit dans le chapitre 2 (cf. sous-partie 2.4, p. 38).

d'estimer la distribution  $\rho(T)$  des valeurs propres en transmission  $T$  en moyennant les histogrammes des valeurs propres obtenues sur la bande de fréquence considérée. De nouveau, l'opérateur de propagation présente un caractère bimodal [Fig. 3.18(b)]; la plupart des coefficients de transmissions sont alors soit proches de 0 (canaux fermés) soit proches de 1 (canaux ouverts).

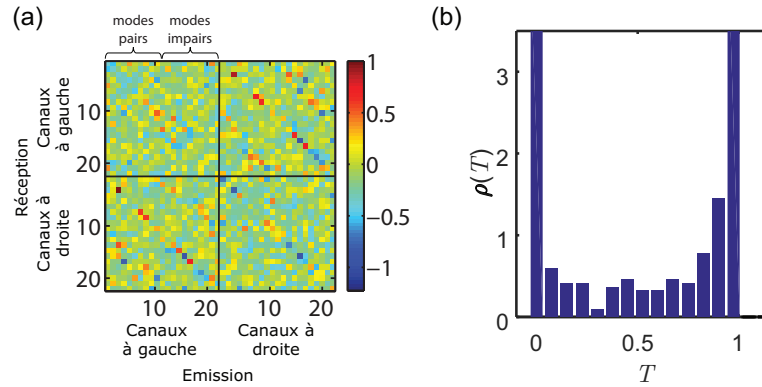


FIGURE 3.18 – (a) Partie réelle de la matrice  $\mathbf{S}$  associée au milieu multi-cibles, mesurée à la matrice  $f_0 = 0,30$  MHz et exprimée dans la base des modes propres du guide. (b) Histogramme des valeurs propres en transmission  $\rho(T)$  moyenné sur l'ensemble de la bande de fréquence considérée.

La fonction d'onde associée aux deux premiers canaux ouverts obtenue à la fréquence  $f_0 = 0,30$  MHz est présentée sur la figure 3.19(a). De façon similaire à ce qui avait été observé pour la cavité, les canaux ouverts en transmission sont une combinaison de multiples séquences de diffusion. Ainsi, bien que l'énergie incidente soit entièrement transmise à travers le milieu, l'onde y subit une forte dispersion spatio-temporelle.

#### Canaux *particulaires* en transmission

Pour trier les différents chemins de diffusion contribuant à l'onde transmise par le milieu, les canaux *particulaires* sont maintenant examinés en suivant la démarche décrite au paragraphe 3.3.3 (p. 74).

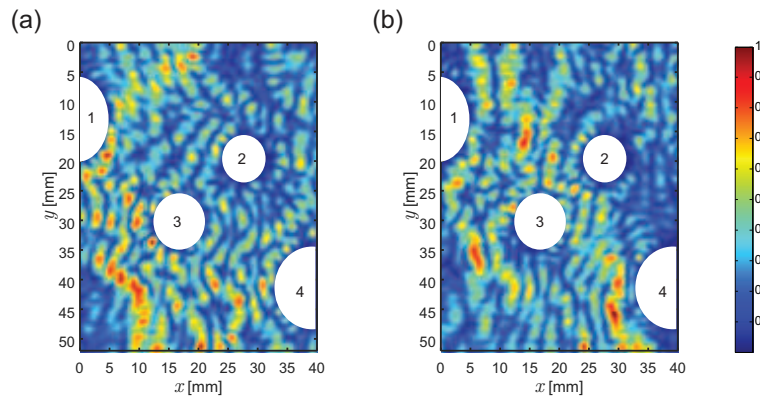


FIGURE 3.19 – (a)-(b) Amplitude du champ associé aux deux premiers canaux ouverts en transmission à la fréquence  $f = 0,30$  MHz au sein du milieu multi-cibles.

**Champ associé aux états propres *particulaires*** La matrice de Wigner-Smith  $\mathbf{Q}$  est ainsi dérivée de la matrice de diffusion  $\mathbf{S}$  autour de la fréquence  $f_0 = 0,30$  MHz. Sa diagonalisation permet d'extraire deux états propres associés à une transmission totale. Les fonctions d'onde correspondantes sont présentées sur la figure 3.20. Alors que le premier de ces deux états propres présente les caractéristiques d'un canal *particulaire* [Fig. 3.20(a)], le second mêle deux séquences de diffusion [Fig. 3.20(b)]. Les chemins étant de même longueur, ils sont associés au même temps de groupe : les états propres correspondants sont donc dégénérés.

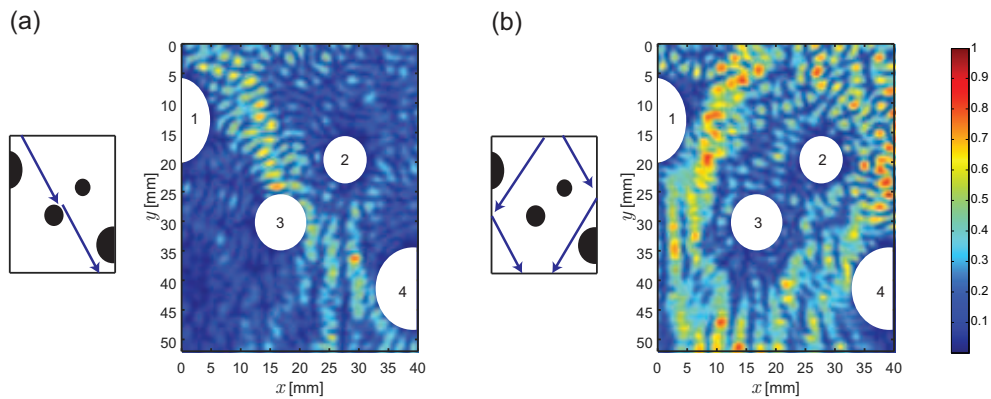


FIGURE 3.20 – Amplitude du champ associé aux deux états propres de la matrice de Wigner-Smith mesurée dans le milieu multi-cibles à  $f_0 = 0,30$  MHz. (a) État propre donnant lieu à un canal *particulaire* ( $\tau_m = 29 \mu\text{s}$ ,  $|t_m| = 0,84$ ). (b) État propre *dégénéré* mettant en jeu deux canaux *particulaires* ( $\tau_m = 26 \mu\text{s}$ ,  $|t_m| = 0,91$ ). Les *temps de retard* sont en parfaite correspondance avec les trajectoires classiques représentés dans les inserts situés à gauche de chaque figure.

**Levée de la dégénérescence des états propres *particulaires*** La dégénérescence mise en évidence dans le paragraphe précédent peut toutefois être levée en considérant un sous-espace de la matrice  $\mathbf{S}$  [14].

Dans l'exemple considéré [Fig. 3.20(b)], les deux trajets peuvent être discriminés en considérant leurs angles d'incidence. À cette fin, deux sous-matrices  $\mathbf{S}'$  sont construites

### 3.4. CANAUX PARTICULAIRES DANS UN MILIEU MULTI-CIBLES

à partir de la matrice  $\mathbf{S}$  en ne gardant alternativement que les angles d'incidence positifs ou négatifs. Cette sous-matrice peut ensuite être utilisée pour calculer une matrice de Wigner-Smith réduite  $\mathbf{Q}'$ ,

$$\mathbf{Q}' = -\frac{i}{2\pi} \mathbf{S}'^{-1} \partial_f \mathbf{S}'. \quad (3.13)$$

On notera que l'opération de conjugaison hermitienne de l'équation (3.2) est remplacée par une inversion de  $\mathbf{S}'$  du fait de sa non-unitarité. En fonction du choix fait sur le signe de l'angle d'incidence, la matrice de Wigner-Smith réduite  $\mathbf{Q}'$  permet de séparer les deux canaux *particulaires* représentés respectivement sur les figures 3.21(a) et 3.21(b). On retrouve bien, mais séparés cette fois, les deux trajectoires *particulaires* qui étaient mêlées dans l'état propre initial [Fig. 3.20(b)].

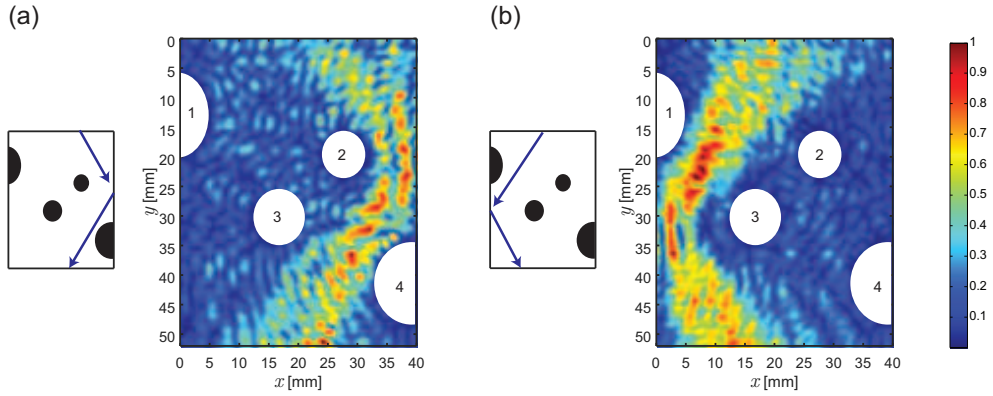


FIGURE 3.21 – (a)-(b) Amplitude du champ associé aux deux canaux *particulaires* obtenus en levant la dégénérescence de l'état propre présenté dans la sous-figure 3.20(b). Leurs coefficients de transmission  $|t_m|$  valent respectivement (a) 0,94 et (b) 0,98.

**Stabilité fréquentielle et cohérence temporelle** La stabilité fréquentielle des canaux propres présentés sur la figure 3.21 est maintenant examinée. L'évolution fréquentielle de leur coefficient de transmission  $t_m^{(q)}$  est représentée sur les figures 3.22(a) et 3.22(b). Chaque canal reste stable sur une large gamme de fréquence, *i.e.*  $f = 0,2 - 0,4$  MHz et  $f = 0,2 - 0,5$  MHz, respectivement. Afin d'être plus quantitatifs, leur fonction de corrélation spectrale respectives sont estimées et présentées sur les figures 3.22(c) et 3.22(d). Leur largeur de corrélation fréquentielle est de  $\delta f_m = 0,13$  MHz et  $\delta f_m = 0,12$  MHz, respectivement. Pour comparaison, la largeur de corrélation des éléments de la matrice de transmission calculée sur l'ensemble de la bande vaut  $\delta f_c = 0,025$  MHz.

Cette augmentation d'un rapport 5 de la largeur de corrélation fréquentielle illustre à nouveau la stabilité spectrale des canaux *particulaires*. Cette stabilité est la signature de leur cohérence dans le domaine temporel. On peut le vérifier à partir des données expérimentales en calculant leurs fonctions d'onde spatio-temporelles construites sur les bandes de fréquences mises en évidence sur les figures 3.22 (a)-(b). La propagation spatio-temporelle des paquets d'ondes *particulaires* construits peut-être observée sur deux films joints à la référence [13]. Les figures 3.14 – 3.16 représentent quant à elles, à des temps successifs, chacun des paquets d'ondes associés au canaux *particulaires* des figures 3.21 (a)-(b). Comme pour le cas de la cavité régulière, leur cohérence spatiale et temporelle est bien maintenue tout au long de leur propagation à travers le milieu.

## CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

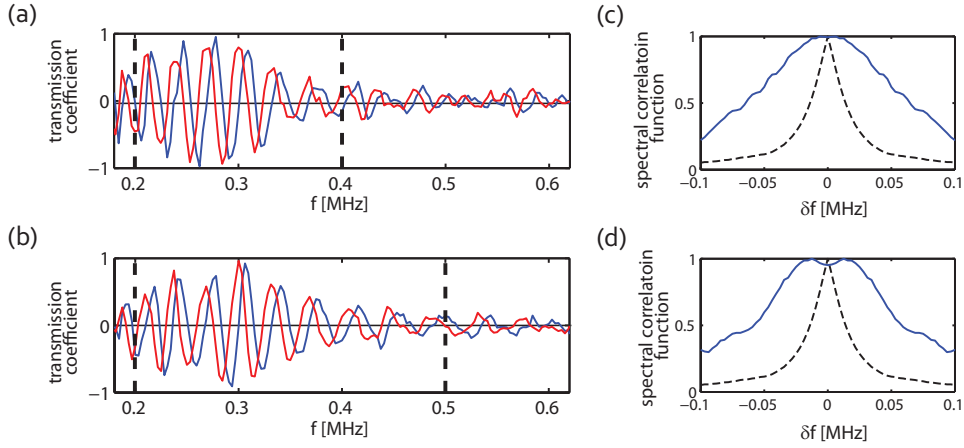


FIGURE 3.22 – (a)-(b) Dépendance fréquentielle des coefficients de transmission  $t_m^{(q)}$  de chacun des canaux *particulaires* présentés sur les Figs. 3.21 (a)-(b) (ligne bleu : partie réelle, ligne rouge : partie imaginaire). Les lignes verticales pointillées délimitent leurs bandes passantes respectives. (c)-(d) Coefficient de corrélation spectrale  $|C_m(\delta f)|$  (ligne bleue) des coefficients de transmission  $t_m^{(q)}$  présentés dans les figures 3.22 (a)-(b), respectivement. Chacun des coefficients de corrélation spectrale est calculé en considérant la fréquence centrale  $f_0$  correspondante (cf. Eq. (3.11)). Chacune des courbes est comparée à la fonction de corrélation des éléments de la matrice de transmission  $C(\delta f)$  (cf. Eq. (3.12)) (traits noirs pointillés).

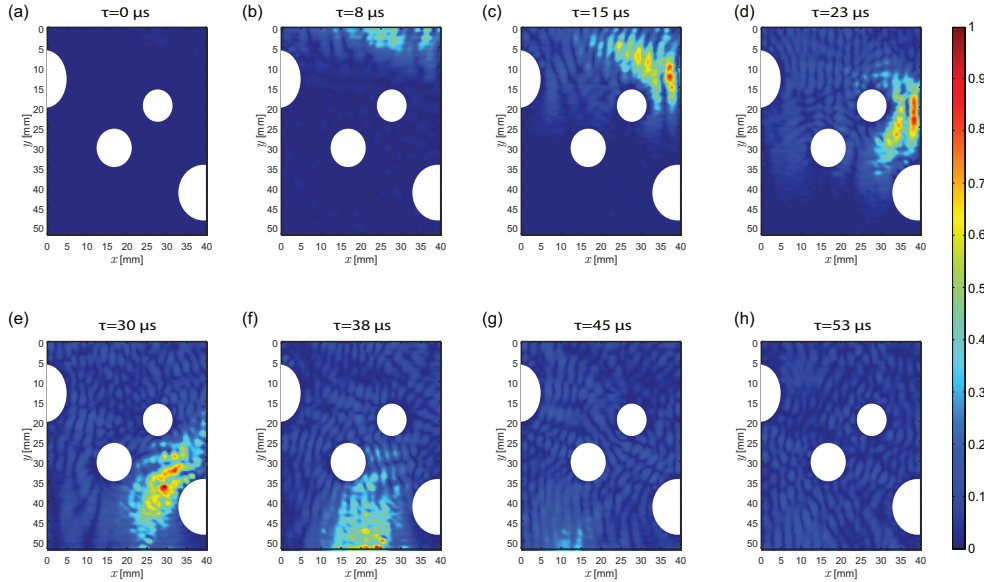


FIGURE 3.23 – (a)-(h) Représentation à différents instants de l'amplitude du champ spatio-temporel construit sur la bande de fréquence  $[0,2 - 0,4]$  MHz à partir du canal *particulière* présenté sur la figure 3.21(a).

### 3.4.3 Canaux *particulaires* en réflexion

Alors que l'étude des canaux de diffusion en transmission est intéressante à des fins de focalisation ou de communication à travers un milieu complexe, les canaux de diffusion en réflexion ont été principalement étudiés pour l'imagerie [15, 16] et la

### 3.4. CANAUX PARTICULAIRES DANS UN MILIEU MULTI-CIBLES

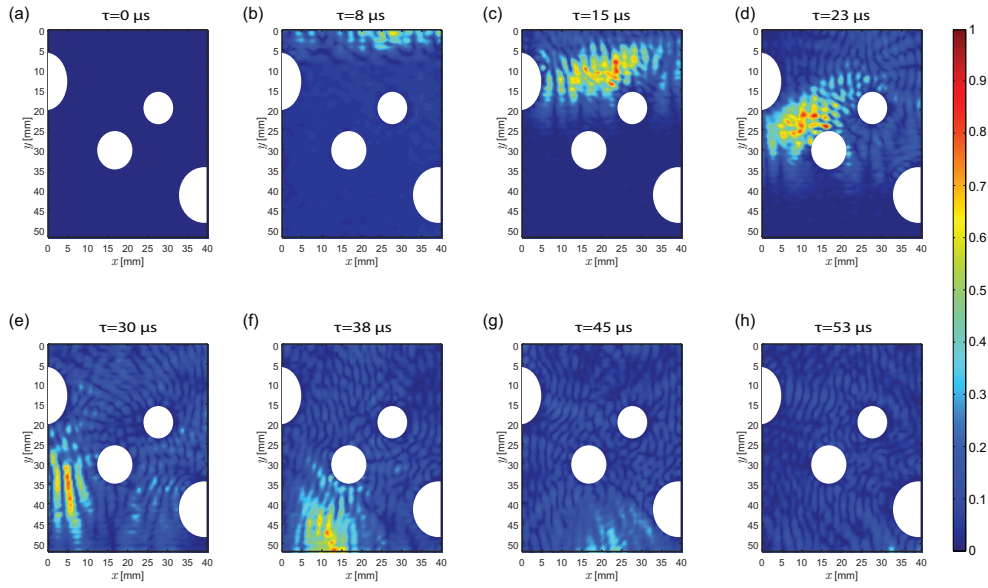


FIGURE 3.24 – (a)-(h) Représentation à différents instants de l’amplitude du champ spatio-temporel construit sur la bande de fréquence  $[0,2 - 0,5]$  MHz à partir du canal *particulaire* présenté sur la figure 3.21(b).

focalisation sélective [17, 18] dans les milieux multi-cibles. Nous allons ici démontré l’intérêt que peut avoir la matrice de Wigner-Smith pour cette dernière application.

#### Etats propres de la matrice de réflexion

Les états propres de la matrice de réflexion ont été étudiée dans le cadre de travaux passés sur le retournement temporel itératif. Cette approche, appelée méthode DORT (acronyme français pour *décomposition de l’opérateur de retournement temporel*), est une technique de référence pour la détection et l’imagerie en milieu multi-cibles. Mathématiquement, les invariants par retournement du temps peuvent se déduire d’une décomposition en valeurs singulières de l’opérateur de propagation mesuré en réflexion  $\mathbf{r}$  et sont donc équivalents aux canaux de diffusion présentés dans la sous-partie 2.2.2 (p. 33).

Dans un milieu constitué de quelques cibles, il est en principe possible d’établir une correspondance entre chacune des cibles et un état propre de la matrice  $\mathbf{r}$  : les vecteurs propres correspondants aux canaux fermés permettent la focalisation sélective sur les différents diffuseurs alors que la valeur singulière associée nous renseigne sur la réflectivité de ce dernier. Toutefois, cette correspondance entre états propres et diffuseurs n’existe que dans le régime de diffusion simple et dans l’hypothèse où les différents diffuseurs sont associés à des réflectivités suffisamment différentes.

L’étude de la matrice de diffusion associée au milieu multi-cibles met en lumière les limites de la méthode DORT (cf. Figs. 3.25 (a)-(b)). En effet, les différentes cibles ayant des réflectivités similaires, les canaux fermés sont associés à plusieurs diffuseurs à la fois, empêchant la focalisation sélective sur chacun d’entre eux. Ainsi, alors que le champ associé au premier canal fermé [Fig. 3.25(a)] se réfléchit à la fois sur les diffuseurs 1 et 2, le champ associé au second canal [Fig. 3.25(b)] combine une réflexion sur les diffuseurs 2, 3 et 4.

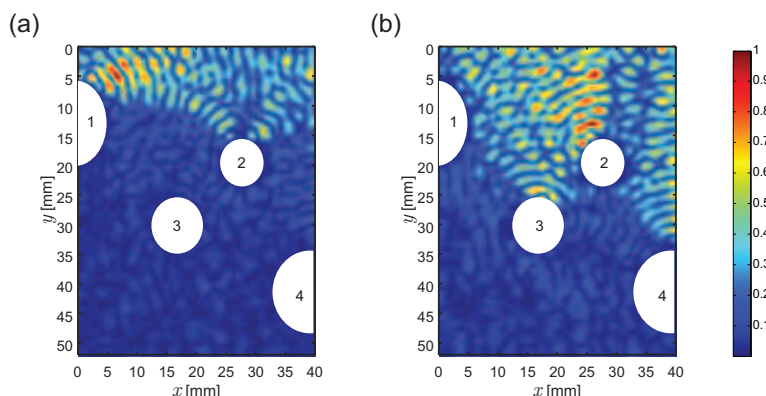


FIGURE 3.25 – (a)-(b) Amplitude du champ associé à deux canaux fermés ( $T_i \sim 0$ ) déduits de la matrice  $\mathbf{S}$  mesurée à  $f = 0,30$  MHz.

### Etats propres de la matrice de Wigner-Smith en réflexion

Jusqu'ici, nous avons défini les canaux *particulaires* comme étant des états propres de la matrice de Wigner-Smith tout en appartenant au sous-espace propre des canaux ouverts. Il est possible de reprendre une approche équivalente en considérant l'intersection des états propres de la matrice de Wigner-Smith avec le sous-espace propre des canaux fermés. On obtient alors des canaux *particulaires* réfléchis associés à un temps de groupe donné.

Ces caractéristiques en font des candidats de choix dans le développement d'une méthode complémentaire à la méthode DORT. En effet, alors que les différents diffuseurs du guide d'onde désordonné considéré ne sont pas séparables sur des critères de *réflectivité*, ils le sont sur des critères de *temps de vol*. Les figures 3.26(a) et 3.26(b) représente les champs correspondants aux deux premiers états propres réfléchis de la matrice de Wigner-Smith. Chacun des deux états est associé à une réflexion sélective sur un diffuseur donné (2 et 3, respectivement). De plus, les *temps de retard* associés correspondent à la profondeur  $y_i$  de chacun des diffuseurs selon la relation  $\tau_i = 2y_i/v_g$ .

L'utilisation de la matrice de Wigner-Smith offre donc un outil complémentaire à la méthode DORT en séparant les diffuseurs sur le critère des temps de vol associés aux échos réfléchis plutôt que de les discriminer sur leur réflectivité. De plus, contrairement à la méthode DORT, cette séparation basée sur les *temps de retard* permet également de s'affranchir des chemins multiples diffusés, ces derniers étant associés à des *temps de vol* plus longs.

## 3.5 Discussion

Le travail décrit dans ce chapitre est la première mise en œuvre expérimentale des canaux *particulaires*. Nous nous proposons donc de profiter de cette dernière partie pour mettre ces travaux en perspective. Dans un premier temps, nous comparons nos résultats aux *modes principaux*, étudiés récemment dans le domaine de l'optique des fibres. Dans une seconde partie nous montrons comment ces résultats peuvent être étendus et généralisés à d'autres domaines de la physique des ondes ainsi qu'à des géométries plus complexes. Enfin, nous décrivons plusieurs applications potentielles de ce concept.

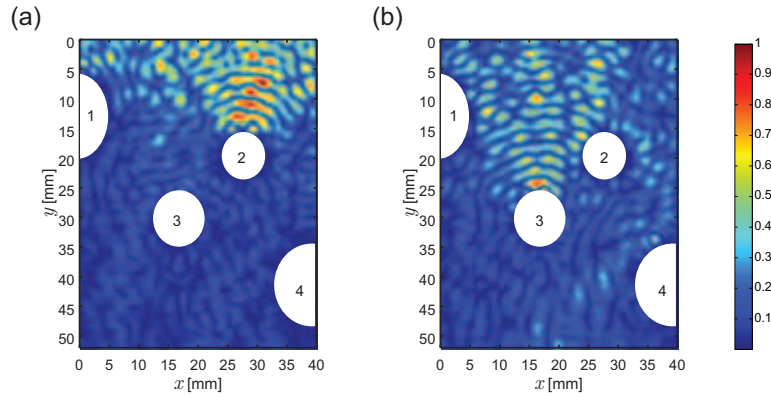


FIGURE 3.26 – (a) État propre de l’opérateur de Wigner-Smith permettant de focaliser sélectivement sur le diffuseur n° 2 (*temps de retard* :  $\tau_m = 11 \mu\text{s}$ , coefficient de réflexion  $|r_m| = 0,94$ ). (b) Etat propre de l’opérateur de Wigner-Smith permettant de focaliser sélectivement sur le diffuseur n° 3 (*temps de retard* :  $\tau_m = 30 \mu\text{s}$ , coefficient de réflexion  $|r_m| = 0,88$ )

### 3.5.1 Comparaison des canaux *particulaires* avec les *modes principaux* des fibres optiques multimodes

Au cours des dernières années, Carpenter *et al.* [19] ainsi que Xiong *et al.* [20] ont étudié l’opérateur de *temps de groupe*,  $i/(2\pi)\mathbf{t}^{-1}\partial_t\mathbf{t}$  dans des fibres optiques multimodes. Les états propres de cet opérateur sont connus dans ce domaine sous le nom de *modes principaux* [21, 22]. Les caractéristiques de ces derniers sont résumées sur la figure 3.27 : si l’on envoie une impulsion créée à partir d’un mode principal dont la largeur de bande est suffisamment étroite, cette dernière sera collectée sans dispersion temporelle à la sortie du milieu de propagation et ce, malgré une forte dispersion à la fois spatiale et temporelle durant sa propagation. C’est là une différence majeure avec les canaux *particulaires* décrits dans ce chapitre qui, de leur côté, maintiennent une cohérence temporelle tout au long de la propagation. Cette différence entraîne une plus grande robustesse spectrale des canaux *particulaires* et se traduit par la possibilité de construire des paquets d’onde plus résolus temporellement et focalisés spatialement.

### 3.5.2 Mise en perspective

Les travaux décrits dans ce chapitre font figure de preuve de concept expérimentale et devraient pouvoir être étendus non seulement à d’autres domaines de la physique des ondes mais aussi à des géométries plus complexes. En effet, s’il nous a fallu recourir à une mesure résolue en temps de l’ensemble du champ dans les différents milieux afin de mettre en lumière les propriétés dispersives de ces canaux *particulaires*, une simple mesure de la matrice  $\mathbf{S}$  (ou d’une sous-partie de celle-ci) à deux fréquences voisines suffit à déterminer la matrice de Wigner-Smith et donc à déterminer les canaux *particulaires* (cf. Eq. (3.2)). Or, comme nous l’avons décrit dans la sous-partie 1.3.3 (p. 23), de telles mesures sont possibles, que ce soit en acoustique [23, 24], en optique [25], ou encore dans le domaine des micro-ondes [26]. La génération de ces canaux *particulaires* est quant à elle possible pour les ondes acoustiques et électromagnétiques [27] grâce au contrôle cohérent du front d’onde rendu possible par les technologies multi-éléments. En optique, de récents progrès ont également permis un contrôle spatial et temporel précis du champ incident [27].

## CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

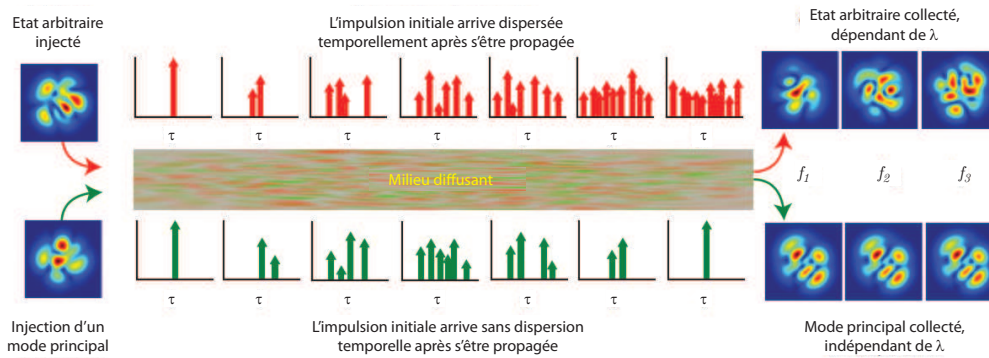


FIGURE 3.27 – Figure adaptée de [19]. Comparaison de la propagation à travers un milieu diffusant d’un état arbitraire et d’un mode principal. Pour l’état arbitraire, la diffusion subie dans le milieu de propagation entraîne une dispersion spatiale de l’impulsion initiale. De plus, les figures de tavelures mesurée en sortie sont très dépendantes de la fréquence  $f$ . À l’inverse, pour le mode principal, l’impulsion initiale, bien que dispersée temporellement à l’intérieur du milieu est collectée sous la forme d’une simple impulsion en sortie. De plus, la figure de tavelure collectée en sortie est invariante au premier ordre en  $f$ .

Cette preuve de concept se limite également à un système pour lequel le faible nombre de modes en entrée du système ( $N = 22$ ) et la longueur d’onde, comparable aux dimensions du système rendent non-triviale l’existence de canaux *particulaires* en raison de la grande part prise par les effets d’interférences et de diffraction. L’application de ces concepts au cas de l’optique pour lequel il est possible de se placer dans la limite de l’optique géométrique, en considérant une longueur d’onde bien inférieure aux dimensions du système, devrait permettre d’étudier l’existence de canaux *particulaires* associés à des configurations de géométries plus complexes.

### 3.5.3 Applications pratiques

Outre les applications à la détection de cibles décrites dans la sous-partie 3.4.3 (p. 84), les propriétés de dispersion des canaux *particulaires* trouvent de nombreuses applications à la fois pratiques et théoriques. D’un point de vue pratique, les trajectoires collimatées de ces états propres ont un intérêt pour la sécurisation de communications acoustiques ou électromagnétiques. En effet, contrairement au cas classique pour lesquels la dispersion spatiale rend possible l’interception du signal, la construction d’un canal *particulaire* permet de contenir ce dernier sur des trajets précis tout en diminuant la puissance d’émission nécessaire. Enfin, bien que l’existence de canaux *particulaires* soit fortement compromise dans les milieux diffusants, les états propres de la matrice de Wigner y demeurent particulièrement intéressants. En effet, la possibilité de maîtriser le temps de résidence de l’onde dans le milieu en propageant les états associés aux plus grands *temps de retard* est particulièrement intéressante pour de nombreuses applications telles que le stockage d’énergie, l’absorption cohérente [28] ou encore la conception de lasers aléatoires [29, 30]. Ces applications pratiques sont d’autant plus facilement envisageable que la construction de canaux *particulaires* est peu sensible à l’unitarité de la matrice  $\mathbf{S}$ . Cette souplesse est intéressante en vue d’une mise en œuvre dans des domaines pour lesquels on n’accède expérimentalement qu’à une sous-partie de la matrice de diffusion. Il est également possible d’utiliser ces opérateurs à



des fins plus fondamentales ; la trace de l'opérateur de Wigner-Smith nous renseigne par exemple sur la densité d'états du milieu étudié [31].

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre présente une première mise en œuvre expérimentale de canaux *particulaires*. De façon intéressante, nous avons ainsi pu mettre en évidence la cohérence spatiale et temporelle des paquets d'onde se propageant le long de ces canaux. Ces propriétés en font des candidats de choix pour de nombreuses applications et ce, dans divers domaines de la physique des ondes. En transmission, ils permettent par exemple la mise en place d'un transfert mieux contrôlé et sécurisé de l'information alors qu'en réflexion, ils devraient mener au développement d'un nouvel outil pour l'imagerie dans les milieux multi-cibles.

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons montré comment la complexité du milieu de propagation pouvait être mise à profit afin d'optimiser le transport des ondes à travers ce dernier. À partir d'un contrôle cohérent du front d'onde, il nous a ainsi été possible de rendre un milieu diffusant transparent du point de vue énergétique. L'extension de ces travaux au domaine temporel nous a ensuite permis de rendre différents types de milieux complexes transparents du point de vue ondulatoire. Cette possibilité repose sur la construction de paquets d'ondes capables de maintenir leur cohérence à la fois temporellement et spatialement durant leur propagation à travers ces derniers.

Dans la seconde partie de nos travaux, nous nous proposons de suivre une stratégie alternative afin de camoufler ou rendre transparente une partie du milieu de propagation. En effet, le contrôle de la propagation des ondes peut également s'exercer en concevant soit-même le milieu de propagation. Dès lors, les concepts de réflexion et de réfraction négatives – notamment à travers leurs analogies avec les concepts de retournement temporel – peuvent permettre d'annuler la diffraction d'une onde à travers un milieu de propagation. L'objectif de la seconde partie sera donc d'arriver à cette fin en concevant des plaques capables de tirer profit des propriétés de dispersion complexes des ondes élastiques guidées.

## Références bibliographiques

- [1] S. Rotter, P. Ambichl, and F. Libisch. Generating particlelike scattering states in wave transport. *Phys. Rev. Lett.*, 106(12) :120602, 2011.
- [2] C.W.J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3) :731, 1997.
- [3] H.U. Baranger and P.A. Mello. Mesoscopic transport through chaotic cavities : A random s-matrix theory approach. *Phys. Rev. Lett.*, 73(1) :142–145, 1994.
- [4] R.A. Jalabert, J.-L. Pichard, and C.W.J. Beenakker. Universal quantum signatures of chaos in ballistic transport. *EPL*, 27(4) :255–260, 1994.
- [5] F.J. Dyson. A class of matrix ensembles. *J. Math. Phys.*, 13(1) :90–97, 1972.
- [6] F. Aigner, S. Rotter, and J. Burgdörfer. Shot noise in the chaotic-to-regular crossover regime. *Phys. Rev. Lett.*, 94(21) :216801, 2005.
- [7] S. Rotter, F. Aigner, and J. Burgdörfer. Statistics of transmission eigenvalues in two-dimensional quantum cavities : Ballistic versus stochastic scattering. *Phys. Rev. B*, 75(12) :125312, 2007.
- [8] S. Rotter, B. Weingartner, N. Rohringer, and J. Burgdörfer. Ballistic quantum transport at high energies and high magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 68(16) :165302, 2003.
- [9] D. Bohm. *Quantum theory*. Courier Corporation, 1951.
- [10] E.P. Wigner. Lower limit for the energy derivative of the scattering phase shift. *Phys. Rev.*, 98(1) :145, 1955.
- [11] L. Eisingbud. PhD thesis, Princeton University, 1948.
- [12] F.T. Smith. Lifetime matrix in collision theory. *Phys. Rev.*, 118(1) :349–356, 1960.
- [13] B. Gérardin, J. Laurent, P. Ambichl, C. Prada, S. Rotter, and A. Aubry. Particlelike wave packets in complex scattering systems. *Phys. Rev. B*, 94 :014209, Jul 2016.
- [14] A. Brandstötter. Master’s thesis, Institute for Theoretical Physics - Vienna University of Technology, 2016.
- [15] N. Mordant, C. Prada, and M. Fink. Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the d.o.r.t. method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(5) :2634, 1999.
- [16] C. Prada, J. de Rosny, D. Clorennec, J.-G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Bernière, S. Hibrat, P. Billand, and T. Folégot. Detection and target echo enhancement in shallow water using the decomposition of the time reversal operator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 121(5) :3085–3085, 2007.
- [17] C. Prada and M. Fink. Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave motion*, 20(2) :151–163, 1994.
- [18] S.M. Popoff, A. Aubry, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Exploiting the time-reversal operator for adaptive optics, selective focusing, and scattering pattern analysis. *Phys. Rev. Lett.*, 107(26) :263901, 2011.
- [19] J. Carpenter, B.J. Eggleton, and J. Schröder. Observation of eisenbud–wigner–smith states as principal modes in multimode fibre. *Nature Photon.*, 9(11) :751–757, 2015.
- [20] W. Xiong, P. Ambichl, Y. Bromberg, B. Redding, S. Rotter, and H. Cao. Spatiotemporal control of light transmission through a multimode fiber with strong mode coupling. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :053901, Jul 2016.

- [21] S. Fan and J.M. Kahn. Principal modes in multimode waveguides. *Opt. Lett.*, 30(2) :135–137, 2005.
- [22] A.A. Juarez, C.A. Bunge, S. Warm, and K. Petermann. Perspectives of principal mode transmission in mode-division-multiplex operation. *Opt. Express*, 20(13) :13810–13824, 2012.
- [23] R. Srik, A. Tourin, J. de Rosny, and M. Fink. Eigenvalue distributions of correlated multichannel transfer matrices in strongly scattering systems. *Phys. Rev. B*, 78(1) :012202, 2008.
- [24] A. Aubry and A. Derode. Random matrix theory applied to acoustic backscattering and imaging in complex media. *Phys. Rev. Lett.*, 102(8) :084301, 2009.
- [25] S.M. Popoff, G. Lerosey, R. Carminati, M. Fink, A.C. Boccarda, and S. Gigan. Measuring the transmission matrix in optics : an approach to the study and control of light propagation in disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 104(10) :100601, 2010.
- [26] Z. Shi and A. Z. Genack. Transmission eigenvalues and the bare conductance in the crossover to anderson localization. *Phys. Rev. Lett.*, 108(4) :043901, 2012.
- [27] A.P. Mosk, A. Lagendijk, G. Lerosey, and M. Fink. Controlling waves in space and time for imaging and focusing in complex media. *Nature Photon.*, 6(5) :283–292, 2012.
- [28] Y.D. Chong and A.D. Stone. Hidden black : Coherent enhancement of absorption in strongly scattering media. *Phys. Rev. Lett.*, 107(16) :163901, 2011.
- [29] N. Bachelard, J. Andreasen, S. Gigan, and P. Sebbah. Taming random lasers through active spatial control of the pump. *Phys. Rev. Lett.*, 109(3) :033903, 2012.
- [30] N. Bachelard, S. Gigan, X. Noblin, and P. Sebbah. Adaptive pumping for spectral control of random lasers. *Nat. Phys.*, 10(6) :426–431, 2014.
- [31] M. Davy, Z. Shi, J. Wang, X. Cheng, and A.Z. Genack. Transmission eigenchannels and the densities of states of random media. *Phys. Rev. Lett.*, 114(3) :033901, 2015.

### CHAPITRE 3. CANAUX COHÉRENTS EN MILIEUX RÉVERBÉRANTS

---

Deuxième partie

Contrôle du milieu de  
propagation des ondes élastiques



**Sommaire**

---

<b>4.1 Milieux à indices négatifs . . . . .</b>	<b>97</b>
4.1.1 Propagation dans les matériaux à indice négatif . . . . .	97
4.1.2 Réfraction négative . . . . .	98
4.1.3 Réflexion négative . . . . .	99
4.1.4 Analogie entre la propagation dans un milieu à indice négatif et la conjugaison de phase . . . . .	101
<b>4.2 Conjugaison de phase passive par réflexion négative . . .</b>	<b>101</b>
4.2.1 Conjugaison de phase dans les milieux complexes . . . . .	102
4.2.2 Conjugaison de phase passive par réflexion négative . . . . .	102
<b>4.3 Concept de <i>milieux complémentaires</i> . . . . .</b>	<b>104</b>
4.3.1 Milieux d'incides complémentaires . . . . .	104
4.3.2 Double coin parfait . . . . .	104
<b>4.4 Réalisation expérimentale . . . . .</b>	<b>106</b>
4.4.1 Ondes électromagnétiques . . . . .	106
4.4.2 Ondes acoustiques et élastiques . . . . .	107
4.4.3 Stratégie alternative : modes de Lamb <i>rétrogrades</i> . . . . .	108
<b>4.5 Objectifs . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>Références bibliographiques . . . . .</b>	<b>111</b>

---





## 4.1 Milieux à indices négatifs

En 1968, Victor Veselago s'est livré à ce qui n'était alors qu'une expérience de pensée en considérant la propagation des ondes électromagnétiques au sein d'un matériau pour lequel la permittivité électrique  $\epsilon$  et la perméabilité magnétique  $\mu$  seraient simultanément négatives [1]. Il est alors arrivé à la conclusion qu'un tel matériau pourrait alors être décrit par un indice de réfraction négatif,  $n = -\sqrt{\epsilon\mu}$ , sans toutefois violer le principe de causalité. Ainsi, ce milieu sera qualifié dans la suite de *matériau à indice négatif* (MIN – en anglais, *negative index material*, NIM).

### 4.1.1 Propagation dans les matériaux à indice négatif

La propagation dans les MIN s'accompagne d'un certain nombre de propriétés contre-intuitives. Dans cette partie, nous commençons par décrire quelques grandeurs fondamentales liées à la propagation des ondes. Nous montrons ensuite comment ces dernières permettent de décrire la propagation d'un paquet d'onde dans un MIN.

#### Description générale

Considérons l'expression d'un paquet d'onde se propageant au sein d'un milieu isotrope, sans pertes, dans la direction  $\mathbf{x}_1$  [Fig. 4.1],

$$\Psi(x_1, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \Psi(\omega) e^{i(k(\omega)x_1 - \omega t)} d\omega, \quad (4.1)$$

avec  $\omega_0$ , la pulsation centrale du paquet d'onde,  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , sa largeur spectrale et  $k$ , la projection de son vecteur d'onde suivant  $\mathbf{x}_1$ . L'évolution de ce paquet d'onde fait intervenir deux vitesses caractéristiques. La première est la vitesse de phase,

$$\mathbf{v}_\phi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k} \mathbf{x}_1. \quad (4.2)$$

Elle correspond à la vitesse de propagation de fronts d'ondes de chaque composante de pulsation  $\omega$  du paquet d'onde. La seconde est la vitesse de groupe qui fait, elle, intervenir le caractère polychromatique du paquet d'onde. Elle est définie par le gradient de la relation de dispersion,

$$\mathbf{v}_g(\omega_0) = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\omega=\omega_0} \mathbf{x}_1. \quad (4.3)$$

Physiquement, elle représente la vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'onde. Par ailleurs, elle indique également la direction du vecteur de Poynting  $\mathbf{\Pi}$ ,

## CHAPITRE 4. RÉFRACTION ET RÉFLEXION NÉGATIVE

dont le flux à travers une surface  $\mathcal{S}$  correspond à la puissance  $\mathcal{P}_{\mathcal{S}}$  véhiculée par l'onde à travers cette dernière,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la surface. Enfin, de façon à pouvoir être généralisée à l'ensemble des domaines de la physique des ondes, la notion d'indice de réfraction sera dans la suite définie par rapport à une vitesse de phase référence, notée  $c_0$ . Ainsi, l'indice de réfraction  $n$  associé à une onde se propageant à la pulsation  $\omega$  avec un nombre d'onde  $k$ , est donné par l'équation,

$$n = c_0 \cdot \frac{k}{\omega} = \frac{c_0}{v_{\phi}}, \quad (4.5)$$

avec  $v_{\phi} = \mathbf{v}_{\phi} \cdot \mathbf{x}_1 = \omega/k$ .

### Cas d'un matériau à indice négatif

Dans un MIN, le vecteur d'onde et le vecteur de Poynting sont anti-parallèles : les fronts d'ondes se déplacent dans le sens opposé à celui de l'enveloppe du paquet d'onde [Fig. 4.1]. Cette progression atypique a valu à de telles ondes le qualificatif d'*ondes rétrogrades* (en anglais, *backward waves*).

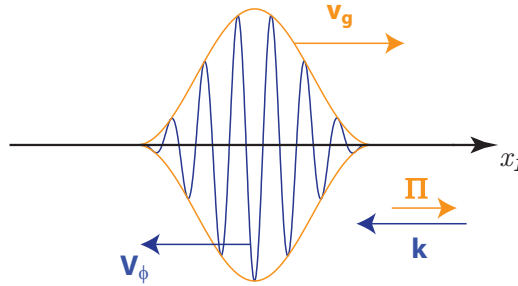


FIGURE 4.1 – Dans les MIN, le vecteur de Poynting et le vecteur d'onde sont de direction opposée. De la même manière, vitesse de phase et vitesse de groupe ont également des sens opposés.

#### 4.1.2 Réfraction négative

Outre les propriétés décrites ci-dessus, la propagation dans les MIN s'accompagne également de l'inversion d'un certain nombre de phénomènes physiques, parmi lesquels les effets Doppler et Tcherenkov [1]. Cependant, la conséquence la plus intéressante de ces matériaux apparaît lors de l'étude de la réfraction d'une onde à l'interface entre deux milieux d'indices  $n_1$  et  $n_2$ . Pour l'illustrer, considérons une onde incidente avec un angle  $\theta_i$  par rapport à la normale au dioptre. En vertu de la loi de Snell–Descartes pour la réfraction,

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t), \quad (4.6)$$

deux situations sont à distinguer pour l'angle de réfraction  $\theta_t$ . Alors que, dans le cas *traditionnel* de deux milieux d'indices de même signe, les rayons incidents et réfractés se situent de part et d'autre de la normale au dioptre [Fig. 4.2(a)], la réfraction se fait *dans le mauvais sens* à l'interface entre deux milieux dont les indices sont de signes opposés [Fig. 4.2(b)]. Le rayon réfracté se situe dans le même demi-plan que le rayon incident ; on parle alors de réfraction négative.

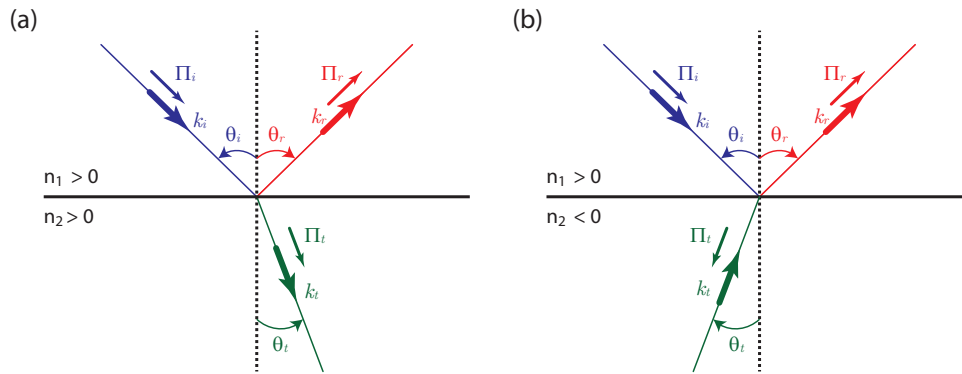


FIGURE 4.2 – Figure adaptée de [2]. Représentation des phénomènes de réfraction et de réflexion à l’interface entre deux milieux d’indices  $n_1$  et  $n_2$ . (a) Lorsque  $n_1$  et  $n_2$  sont positifs, l’onde est réfléchi et réfractée de l’autre côté de la normale au dioptre. (b) À l’inverse, à l’interface entre deux milieux d’indices  $n_1 > 0$  et  $n_2 < 0$ , l’onde est réfractée dans le même demi-plan que l’onde incidente. De plus, on note que le vecteur d’onde et le vecteur de Poynting de l’onde réfractée négativement sont anti-parallèles.

### De la lentille de Veselago à la lentille de Pendry

Dans son article fondateur [1], Veselago considère les effets d’une tranche de MIN de largeur  $l$  sur une onde émise ponctuellement à une distance  $d < l$  de cette dernière. Il lui apparaît alors que la double réfraction induite par la propagation à travers le MIN engendre deux focalisations successives de l’onde, à l’intérieur puis à l’extérieur de celui-ci [Fig. 4.3(a)]. Ainsi, non seulement le dispositif fait office de lentille *plate* mais sa simplicité géométrique permet de s’affranchir des aberrations géométriques ainsi que des réflexions parasites. On notera toutefois que, bien qu’il soit communément utilisé et repris ici, le terme de *lentille* est quelque peu abusif. En effet, le dispositif décrit par Veselago ne permet ni de focaliser un faisceau incident parallèle ni de magnifier l’image d’un objet.

Bien que surprenant, le phénomène de réfraction négative est resté largement méconnu avant que John Pendry ne ressuscite le sujet en 2000. Dans un article fondateur [3], il a en effet montré qu’une tranche de MIN constituait une lentille parfaite, ne souffrant pas des limites de la diffraction. Une lentille classique ne focalise en effet que le champ propagatif issu d’un objet. Sa résolution ne peut donc être plus fine que la demi longueur d’onde. À l’inverse, une lentille d’indice négatif amplifie exponentiellement les ondes évanescentes émanant de l’objet. Il devient alors envisageable de tirer profit des informations d’échelle sub-longueur d’onde contenues dans le champ évanescent et de briser la limite de diffraction conventionnelle. Toutefois, bien qu’ayant suscité un grand intérêt dans la communauté scientifique, ces prédictions théoriques se sont par la suite heurtées à plusieurs limites expérimentales, notamment les pertes par dissipation dont souffrent en général les MIN. Comme nous le verrons plus loin, l’intérêt pour la réfraction négative ne s’est pas limité à la lentille parfaite mais il a également ouvert la voie au concept de *milieux complémentaires*.

#### 4.1.3 Réflexion négative

Intéressons nous maintenant à la réflexion d’une onde incidente sur le bord d’un milieu semi-infini supportant plusieurs modes de propagation. Dans le cas général, les

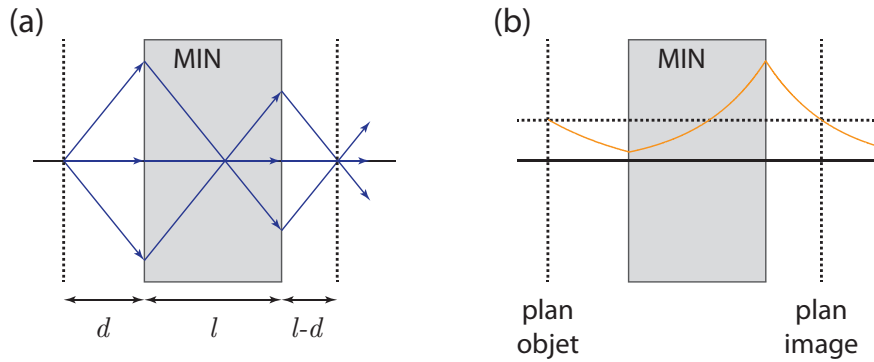


FIGURE 4.3 – (a) Tracé des rayons issus d’un point source situé à l’extérieur de la lentille plate d’épaisseur  $l$ . Une première focalisation a lieu à l’intérieur de la lentille puis une seconde à l’extérieur, dans le plan image situé à une distance  $2l$  de l’objet. (b) Représentation en amplitude du champ évanescent. Décroissant dans le milieu à indice positif, il est au contraire amplifié par le milieu à indice négatif. L’amplitude du champ évanescent dans le plan image est ainsi identique à ce qu’elle est dans le plan objet.

conditions aux limites à l’interface entraînent une conversion du mode incident dans l’ensemble des modes existants dans le milieu. L’angle  $\theta_{r,i}$ , décrivant la réflexion par conversion dans le mode d’indice  $n_i$ , est obtenu en généralisant la loi de Snell–Descartes en réflexion,

$$n_1 \sin(\theta_i) = -n_i \sin(\theta_{r,i}). \quad (4.7)$$

Comme pour la réfraction, la conversion entre deux modes associés à des indices de même signe entraîne une réflexion du côté opposé à la normale. Elle se fait, au contraire, dans le même demi-plan lorsque les indices sont de signe opposé [Fig. 4.4]. On parle alors de réflexion négative.

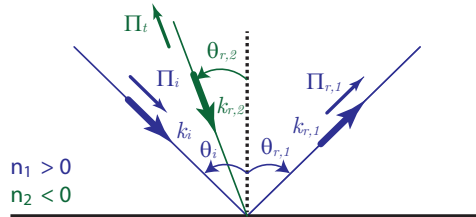


FIGURE 4.4 – Représentation du phénomène de réflexion négative à l’interface d’un milieu siège de la propagation de deux modes 1 et 2 associés à deux indices de signes opposés ( $n_1 > 0$  et  $n_2 < 0$ ). À l’interface, une fraction du mode 1 est réfléchi positivement mais une autre partie est convertie dans le mode 2, ce qui donne lieu au phénomène de réflexion négative. On note là encore, que pour le mode réfléchi négativement, le vecteur d’onde et le vecteur de Poynting sont anti-parallèles.

Comme nous allons le voir, les phénomènes de réfraction et de réflexion négative constituent des outils de choix pour le contrôle et la focalisation des ondes dans des environnements complexes.

#### 4.1.4 Analogie entre la propagation dans un milieu à indice négatif et la conjugaison de phase

Outre les quelques propriétés décrites ci-dessus, la réfraction et la réflexion négative présentent un intérêt fondamental du fait des liens existant avec le concept de retournement temporel [4]. Dans une expérience de conjugaison de phase, une onde incidente divergente est réfléchiée par un miroir du même nom [Fig. 4.5(a)]. L'onde réémise est ainsi une onde convergente suivant la même trajectoire que l'onde incidente mais en sens inverse. Le vecteur d'onde incident est inversé et l'onde conjuguée refocalise sur la source initiale [Fig. 4.5(a)].

Un effet similaire est observé à l'interface entre deux milieux d'indice opposé [Fig. 4.5(b)]. Toutefois seule la composante longitudinale du vecteur d'onde est inversée, sa composante transverse restant conservée en vertu de la loi de Snell-Descartes. L'onde réfractée négativement reconverge ainsi en un point symétrique de la position de la source initiale par rapport à l'interface entre les deux milieux [Fig. 4.5(b)].

Le lien entre conjugaison de phase et réflexion négative est encore plus frappant. Considérons un miroir à réflexion négative convertissant un mode incident d'indice positif  $n$  en un mode réfléchi à indice négatif  $-n$ . En vertu de la loi de Snell-Descartes, les vecteurs d'onde des modes incident et réfléchi négativement sont strictement identiques mais leurs vecteurs de Poynting sont opposés [Fig. 4.5(c)]. Si l'onde incidente est divergente, l'onde réfléchiée négativement reconverge vers la position de la source initiale. On retrouve alors un effet similaire à celui engendré par la conjugaison de phase, bien que les directions des vecteurs d'onde des ondes conjuguée et réfléchiée négativement soient opposées.

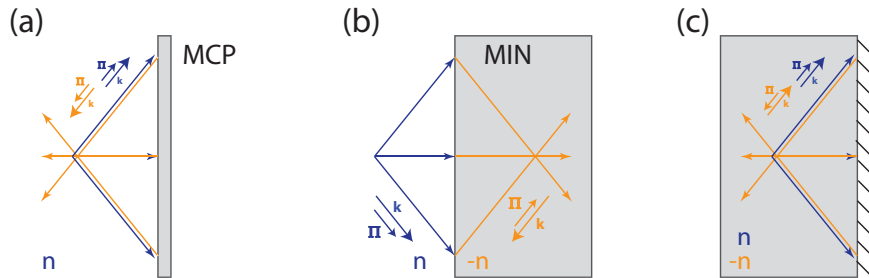


FIGURE 4.5 – (a) Une onde initialement divergente est focalisée par le miroir à conjugaison de phase (MCP) sur la position de la source. (b) Un matériau à indice négatif (MIN) réfracte négativement l'onde incidente et renverse l'évolution spatiale de l'onde qui est re-focalisée dans le MIN. (c) Au sein d'un milieu supportant la propagation de deux modes, numérotés 1 et 2, associés à des indices opposés, le mode 1 est généré puis converti dans le mode 2 par réflexion négative sur l'interface. L'onde réfléchiée est alors re-focalisée sur la position de la source.

## 4.2 Conjugaison de phase passive par réflexion négative

Comme nous venons de le voir, le phénomène de réflexion négative offre de nouvelles perspectives, à la fois pratiques, pour la manipulation des ondes, mais aussi fondamentales, de par ses similitudes avec les concepts liés à la conjugaison de phase. Dans cette

partie, nous allons explorer cette analogie. Nous commençons par rappeler brièvement les possibilités offertes par la conjugaison de phase pour focaliser une onde en milieu désordonné ou réverbérant. Nous montrons ensuite comment la réflexion négative peut produire les mêmes effets mais de manière totalement passive.

### 4.2.1 Conjugaison de phase dans les milieux complexes

Comme nous l'avons décrit dans le premier chapitre de ce manuscrit, un milieu diffusant éclairé par une source ponctuelle donne lieu à un champ aléatoire en sortie. Celui-ci résulte de l'interférence entre tous les chemins de diffusion que peut emprunter l'onde à travers le milieu diffusant. Toutefois, si ce champ est enregistré par un réseau de transducteurs et réémis après conjugaison de la phase, l'onde est focalisée sur la position de la source. En effet, l'opération de conjugaison de phase revient à ôter la phase accumulée par l'onde lors du trajet *aller*. La phase étant ré-accumulée lors du trajet retour, l'ensemble des chemins de diffusion interfèrent constructivement au niveau de la source initiale [5]. Un effet similaire peut être obtenu dans les cavités réverbérantes [6]. Le champ émis par une source ponctuelle est multiplement diffusé par les parois de la cavité. Ce champ aléatoire peut toutefois être conjugué en phase de façon à être refocalisé sur la source initiale.

### 4.2.2 Conjugaison de phase passive par réflexion négative

Comme nous l'avons décrit ci-dessus, la réflexion négative permet d'implémenter le principe d'un miroir à conjugaison de phase passive [Fig. 4.5(c)]. Nous allons montrer ici comment la mise en œuvre de ce principe peut être étendue à des environnements complexes tels qu'une cavité ou un milieu diffusant.

#### Cavité réverbérante

Nous étudions dans un premier temps la propagation d'ondes dans une cavité bidimensionnelle créée par un disque tronqué. Cette configuration a été choisie du fait de ses propriétés *chaotiques*, ayant fait l'objet de nombreuses études tant fondamentales [7–9] que pratiques [6]. Dans le cas général, le champ en tout point d'une cavité réverbérante correspond à la somme des contributions associées aux différentes séquences de réflexions multiples sur les parois de celle-ci. La figure de phase au sein de la cavité, bien que déterministe, prend alors une forme complexe, de façon similaire au cas du champ multiplement diffusé étudié dans la première partie de ce manuscrit. Cet effet est illustré sur la figure 4.6(a) pour le cas d'une cavité forgée au sein d'un milieu ne supportant qu'un mode de propagation d'indice  $n$ .

À l'inverse, dans le cas où deux modes associés à des indices  $n$  et  $-n$  opposés peuvent se propager, la réflexion négative se fait avec un angle  $\theta_r = -\theta_i$ , selon l'équation (4.7). Après réflexion, la phase évolue à rebours, si bien que les rayons incidents et réfléchis interfèrent constructivement en tout point du milieu. On obtient ainsi de manière passive un effet similaire à celui produit par conjugaison de phase.

#### Milieu diffusant

De la même manière, le champ réfléchi par un milieu diffusant est, dans le cas général, aléatoire du fait de la répartition désordonnée des diffuseurs et de la diffusion multiple. Ceci est illustré sur la figure 4.6(c) dans le cas d'une onde plane incidente. Au contraire, dans le cas de la réflexion négative, l'onde plane incidente est réfléchie en une

## 4.2. CONJUGAISON DE PHASE PASSIVE PAR RÉFLEXION NÉGATIVE

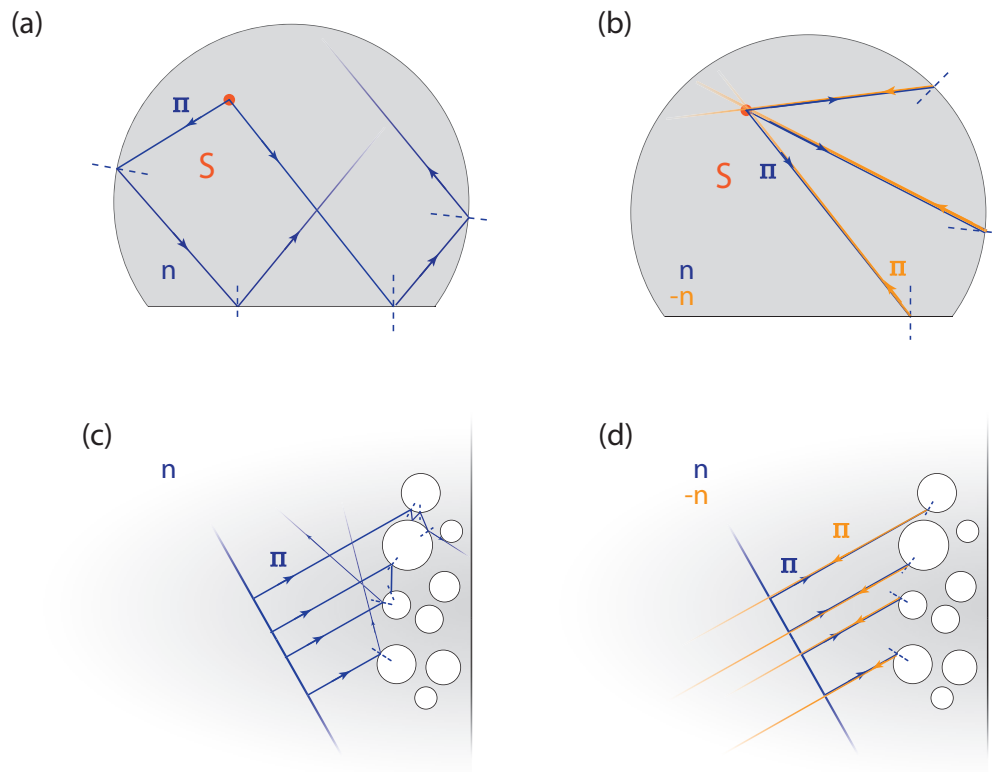


FIGURE 4.6 – Analogie entre conjugaison de phase passive et réflexion négative. (a)-(b) Réflexion négative en bord de cavité. (a) Dans une cavité ne supportant qu'un mode de propagation d'indice  $n$ , les réflexions multiples sur les parois de la cavité engendrent un champ aléatoire. (b) A l'inverse, dans une cavité pour laquelle deux modes associés à des indices opposés peuvent se propager, les ondes réfléchies négativement accumulent une phase inverse à celle accumulée lors du trajet aller. Les ondes partielles reviennent donc en phase sur la source initiale. Le champ réfléchi négativement est ainsi re-focalisé au niveau de la position de la source initiale. (c)-(d) Réflexion négative induite par un milieu diffusant. (c) Dans le cas d'un milieu ne supportant qu'un mode de propagation, le champ réfléchi par un milieu diffusant est aléatoire. (d) Dans le cas où le milieu supporte deux modes d'indices opposés, une onde plane incidente est réfléchi négativement par chaque diffuseur. L'onde réfléchi est une onde plane présentant un vecteur d'onde identique à celle de l'onde incidente. Leurs vecteurs de Poynting sont en revanche opposés.

onde plane dont le vecteur d'onde est identique au vecteur d'onde incident [Fig. 4.6(d)]. L'onde résultante est alors identique à celle qui serait obtenue en l'absence du milieu diffusant.

Par ces deux exemples, nous avons montré l'analogie qui pouvait exister entre réflexion négative et conjugaison de phase. Ces deux expériences jusqu'ici fictives ont été réalisées expérimentalement dans le cadre de cette thèse. Elles seront présentées au chapitre 5.

### 4.3 Concept de *milieux complémentaires*

À l'instar de la réflexion négative, le phénomène de réfraction négative offre, lui aussi, de nombreuses perspectives inédites concernant le contrôle de la propagation des ondes. Parmi celles-ci, nous nous intéressons ici à la possibilité de compenser les effets de propagation au sein d'un milieu.

En effet, les MIN peuvent être vus comme des tranches d'*anti-espace*. Cette analogie a permis à Pendry *et al.* [10] d'introduire le concept de *milieux complémentaires*, capables d'annuler la propagation des ondes et de camoufler certaines zones du milieu de propagation.

#### 4.3.1 Milieux d'indices complémentaires

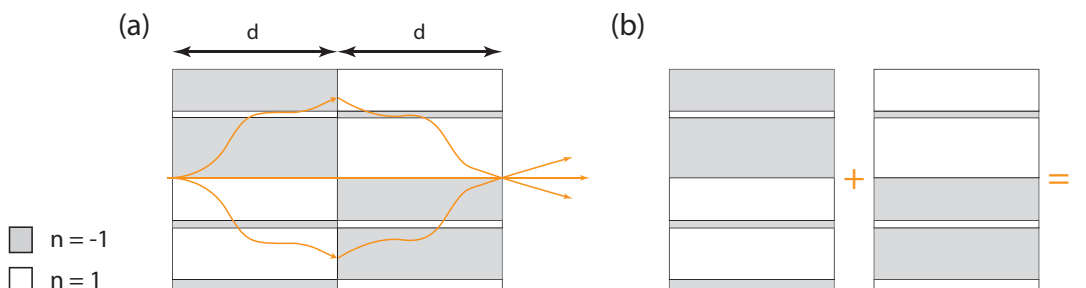


FIGURE 4.7 – Figures adaptées de [10]. Principe des milieux complémentaires. (a) Une paire de deux milieux complémentaires accolés annulent l'effet l'un de l'autre. Le champ à la sortie du milieu est strictement identique au champ en entrée (qu'il s'agisse du champ propagatif ou du champ évanescent). (b) Illustration de l'effet général des deux milieux complémentaires. Tout se passe comme si la tranche d'espace de largeur  $2d$  était supprimée de l'expérience.

Suivant l'approche de Pendry, il est possible d'annuler les effets d'un milieu sur la propagation d'une onde en y accolant un milieu d'indice complémentaire [Fig. 4.7(a)]. Concernant le champ propagatif, le trajet complémentaire suivi dans le second milieu compense la phase accumulée dans le premier milieu. Du point de vue du champ évanescent, l'évolution de l'amplitude dans le premier milieu est compensée dans le second. Tout se passe alors comme si la tranche d'épaisseur  $2d$  était supprimée de l'expérience [Fig. 4.7(b)].

Ce concept, illustré sur la figure 4.7 pour le cas d'un milieu dont l'indice est constant par morceau est généralisable à toutes les distributions d'indices au sein de la première tranche. Il est ainsi possible de masquer les effets sur la propagation d'un objet quelconque, en y accolant l'*anti-objet* correspondant [Fig. 4.8].

#### 4.3.2 Double coin parfait

Un dispositif reposant sur le concept de *milieux complémentaires* avait également été proposé par Notomi [11] en 2002. Il s'agit d'un milieu complémentaire constitué de deux paires de quadrants d'indices opposés, réparties en damier [Fig. 4.9]. Supposons une onde incidente induite par une source ponctuelle au sein d'un des quadrants. Une



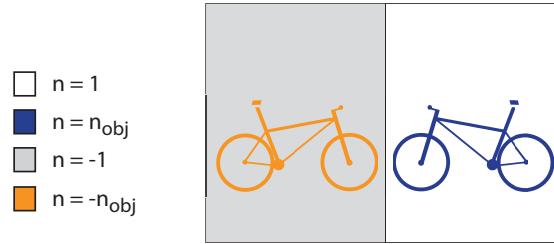


FIGURE 4.8 – Principe de camouflage d’un objet d’indice  $n_{obj}$  par un milieu complémentaire comprenant l’*anti-objet* d’indice  $-n_{obj}$  correspondant.

partie des rayons issus de la source est successivement réfractée négativement aux différentes interfaces. Ces rayons circulent alors en boucle, piégés autour du double coin. Quatre images de la source sont ainsi formées aux positions notées  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sur la figure 4.9. À l’instar de la lentille de Pendry, ce dispositif est qualifié de *parfait* dans le sens où le champ est identique après chaque demi-boucle au sein du dispositif, qu’il s’agisse de sa composante propagative ou de sa composante évanescente.

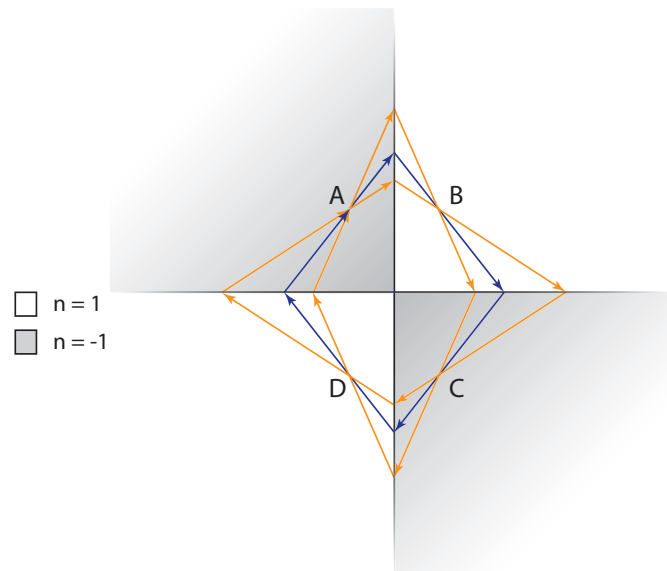


FIGURE 4.9 – Principe du double coin parfait ; une partie des rayons issus du point  $A$  subit une succession de réfractions négatives à chaque interface entre milieux d’indices opposés. L’onde est ainsi re-focalisée dans chacun des quadrants. En l’absence de pertes, l’onde est piégée : elle circule de manière perpétuelle autour du double coin.

Ces différentes configurations nous ont permis d’introduire le concept de *milieux complémentaires*. Cette approche sera examinée numériquement et expérimentalement au chapitre 6 pour les ondes de Lamb.

### 4.4 Réalisation expérimentale

Longtemps resté cantonnée au stade de curiosité académique, la réfraction négative a connu un vif regain d'intérêt suite aux prédictions théoriques de John Pendry au sujet de la lentille parfaite [3]. Dans cette partie, nous rappelons brièvement les différentes stratégies mises en place afin de réaliser expérimentalement des MIN pour les ondes électromagnétiques, acoustiques et élastiques. Nous décrivons ensuite la solution que nous avons choisi d'explorer, basée sur l'utilisation de modes de Lamb *rétrogrades*.

#### 4.4.1 Ondes électromagnétiques

##### Méta-matériaux

Considérons la propagation d'une onde visible dans un milieu matériel, à une longueur d'onde  $\lambda$  bien supérieure à la taille et aux distances caractéristiques de l'agencement des atomes constitutifs de ce dernier. L'interaction d'une onde avec les éléments constitutifs du milieu peut être modélisée à une échelle macroscopique par les paramètres constitutifs que sont la permittivité électrique  $\epsilon$  et la perméabilité magnétique  $\mu$ . Une approche similaire peut être utilisée pour décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu structuré par un arrangement de blocs dont les distances caractéristiques sont très inférieures à  $\lambda$ . Deux paramètres effectifs similaires peuvent alors être définis de façon à singer un milieu homogène que l'on appelle *méta-matériau* [12].

Suivant ce principe, Smith *et al.* [13] ont conçu le premier MIN dans le domaine des micro-ondes en associant deux inclusions élémentaires au sein d'une même matrice : des fils métalliques d'une part et des résonateurs à anneaux fendus d'autre part. En effet, John Pendry et ses collaborateurs avaient montré quelques années plus tôt qu'elles conféraient respectivement au milieu une permittivité électrique effective  $\epsilon_{\text{eff}}$  négative [14] et une perméabilité magnétique effective  $\mu_{\text{eff}}$  négative [15]. La miniaturisation des cellules élémentaires et une meilleure maîtrise des pertes par dissipation a ensuite permis de réaliser des méta-matériaux opérant à des fréquences beaucoup plus grandes, jusqu'à atteindre le spectre visible en 2008 [16].

L'utilisation de méta-matériaux a ainsi mené aux premières démonstrations expérimentales du concept de réfraction négative. Toutefois, leur application – notamment aux fréquences optiques – demeure contrariée par les pertes associées à leur structure résonante.

##### Cristaux photoniques

Parallèlement à l'essor des méta-matériaux, l'alternative offerte par les cristaux photoniques [17] a été envisagée. À l'inverse des méta-matériaux, ces derniers reposent sur les effets d'interférences dites *de Bragg* au sein d'un arrangement de diffuseurs dont la dimension et la périodicité est de l'ordre de la longueur d'onde. Ces effets confèrent à de tels cristaux des propriétés dispersives complexes, parmi lesquelles l'existence de zones pour lesquelles le vecteur d'onde et le vecteur de Poynting sont anti-parallèles et donc associés à un indice négatif [18, 19]. Par la suite, la possibilité d'utiliser ces milieux pour concevoir des lentilles plates a été décrite théoriquement [20] puis réalisée dans le domaine des micro-ondes pour des géométries bi-dimensionnelles [21] et tri-dimensionnelles [22].

### Milieux chiraux

Enfin, l'utilisation de matériaux fortement chiraux pour la conception de MIN a été proposée théoriquement par Tretyakov [23] puis par Pendry et Monzon [24, 25]. Les milieux chiraux sont des milieux qui, de part leur structure cristalline ou la composition de leur milieu, constituent l'image miroir d'un autre milieu avec lequel il ne se confondent pas. Dans ces derniers, les ondes polarisées circulairement droite et gauche sont associées respectivement à deux indices différents  $n_+$  et  $n_-$ ,

$$n_{\pm} = \sqrt{\epsilon\mu} \pm \kappa, \quad (4.8)$$

où  $\kappa$  est le paramètre de chiralité. Alors que ce paramètre est relativement faible dans les milieux naturels, la conception de méta-matériaux chiraux conçus à partir de dipôles électriques et magnétiques a permis l'augmentation spectaculaire de ce paramètre, jusqu'à l'obtention d'indices de réfraction négatifs. Deux études publiées en 2009 par Plum *et al.* [26] et par Zhang *et al.* [27] ont ainsi apporté la démonstration expérimentale des phénomènes de réfraction et de réflexion négative dans de tels matériaux, dans les domaines du GHz et du THz, respectivement.

#### 4.4.2 Ondes acoustiques et élastiques

L'essor des méta-matériaux électromagnétiques au début des années 2000 a rapidement suscité de l'intérêt dans d'autres domaines de la physique des ondes, dont celui des ondes acoustiques et élastiques.

##### Ondes acoustiques

La vitesse des ondes acoustiques se propageant dans un fluide, notée  $c$ , est déterminée par sa masse volumique  $\rho$  et son module d'élasticité  $B$  selon la relation,

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (4.9)$$

Par analogie avec les ondes électromagnétiques, la conception de MIN pour les ondes acoustiques repose alors sur la création d'un milieu pour lequel les deux paramètres  $\rho$  et  $B$  seraient simultanément négatifs [28]. La démonstration de tels milieux a pu être réalisée sous la forme de méta-matériaux acoustiques [29], décrits à la fois par un module d'élasticité effectif négatif [30] et par une masse volumique effective négative [31]. De telles propriétés ont pu être obtenues en combinant les résonances monopolaire et dipolaire d'une cellule élémentaire. Parallèlement, l'alternative offerte par les cristaux phononiques – pendant acoustique des cristaux photoniques – a été étudiée. Plusieurs études ont ainsi mis en évidence le phénomène de réfraction négative dans des cristaux phononiques [32–35].

##### Ondes élastiques

La réfraction négative des ondes élastiques s'est avérée être un défi plus compliqué à relever. En effet, les ondes de compression et de cisaillement sont intrinsèquement couplées dans des solides microstructurés. Ainsi, la réfraction négative des ondes élastiques a principalement été mise en évidence par l'intermédiaire d'interférences de Bragg [36–39]. Un méta-matériau à indice de réfraction négatif a toutefois pu être réalisé pour les ondes de compression se propageant dans les plaques minces (régime de basses fréquences) [40].

### 4.4.3 Stratégie alternative : modes de Lamb *rétrogrades*

Face à ces difficultés de conception des MIN pour les ondes élastiques, une solution alternative a été récemment proposée. A plus hautes fréquences, les plaques supportent en effet des ondes guidées appelées modes de Lamb. Ces derniers présentent un caractère dispersif riche et complexe, avec notamment l'existence de certains modes à vitesse de phase négative.

#### Rappels sur les modes de Lamb [41]

La propagation *libre* des ondes élastiques dans les solides isotropes est décrite par l'évolution indépendante de deux composantes longitudinale et transverse progressant respectivement aux vitesses  $c_L$  et  $c_T$ . Dans une plaque, chacune de ces composantes est réfléchiée à chaque interface [Fig. 4.10]. De plus, les conditions aux limites imposées aux interfaces entraînent une conversion partielle entre chacune des polarisations à chaque réflexion. La combinaison de ces ondes partielles forme alors deux familles infinies de modes guidés, appelés modes de Lamb. La déformation associée, contenue dans la plan de propagation, est respectivement *symétrique* et *antisymétrique* par rapport au plan médian de la plaque. Ces derniers sont associés à une relation de dispersion complexe, régie par l'équation de Rayleigh-Lamb [41], que nous établirons dans la suite [cf. section 5.2.1 (p. 120)]. Par ailleurs, il est d'usage d'identifier les modes *symétrique* et *antisymétrique* sous la forme  $A_i$  et  $S_i$ , l'indice  $i$  étant fixé par le nombre de noeuds du champ de déplacement associé pour  $k \rightarrow 0$ .

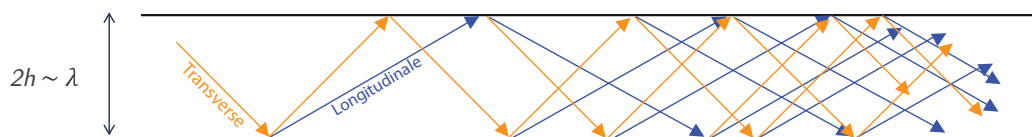


FIGURE 4.10 – Figure adaptée de [41]. Représentation de la progression des ondes dans la plaque : les composantes longitudinales et transverses progressent en se réfléchissant successivement sur chacune des faces de la plaque.

**Courbes de dispersion** La résolution numérique de l'équation de Rayleigh-Lamb donne accès aux courbes de dispersion associées à chacun des modes supportés par une plaque. La figure 4.11 présente le résultat obtenu pour une plaque de Duralumin ( $\rho = 2790 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_L = 6,398 \text{ mm}/\mu\text{s}$  et  $c_T = 3,122 \text{ mm}/\mu\text{s}$ ) d'épaisseur  $2h$ . Physiquement, le comportement dispersif des modes de Lamb est régi par la rigidité effective de la plaque,  $\lambda/(2h)$ . Aux basses fréquences, seuls les deux modes fondamentaux,  $A_0$  et  $S_0$ , existent. Il s'agit des modes de flexion et de compression de la plaque. Les modes d'ordres supérieurs présentent eux une fréquence de coupure quand leur nombre d'onde tend vers 0. Le déplacement associé à chacun de ces modes est montré pour  $k \rightarrow 0$  sur la figure 4.11. Chaque fréquence de coupure est associée à une résonance d'épaisseur, longitudinale ou transverse, de la plaque.

**Modes *rétrogrades*** Une propriété particulière des ondes de Lamb, mise en évidence sur la figure 4.11, est la présence pour certains matériaux de branches à vitesse de phase négative [42–45]. Ces modes proviennent de la répulsion entre deux branches de dispersion ayant des fréquences de coupures voisines et associées à des modes d'épaisseur longitudinale et transverse de même symétrie. La branche la plus basse présente alors un minimum pour laquelle la vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial k$  s'annule tandis que la

longueur d'onde associée reste finie. Il s'agit du point à vitesse de groupe nulle (en anglais, *zero group velocity*) [46, 47]. Dans le cas particulier du Duralumin [Fig. 4.11], un mode à vitesse de phase négative, que l'on note  $S_{2b}$ , est induit par la répulsion des branches des modes  $S_1$  et  $S_2$  dont les fréquences de coupures sont voisines. Au dessus de la fréquence de résonance  $ZGV$ , un mode à vitesse de phase positive ( $S_1$ ) et un mode à vitesse de phase négative ( $S_{2b}$ ) coexistent.

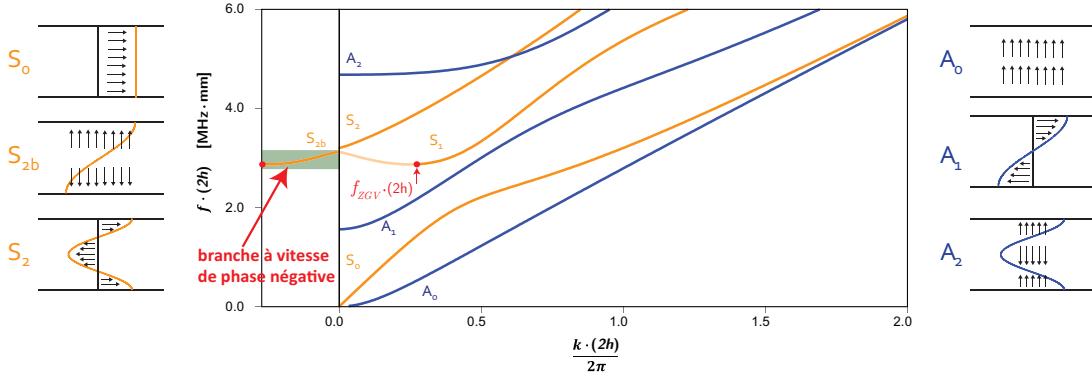


FIGURE 4.11 – Courbe de dispersion d'une plaque de Duralumin ( $c_L = 5850$  m/s,  $c_T = 3100$  m/s,  $\rho = 2790$  kg/m<sup>3</sup>) représentant la fréquence normalisée  $f \cdot (2h)$  en fonction du vecteur d'onde normalisé  $k \cdot (2h) / (2\pi)$ . Le produit fréquence - épaisseur  $f_{ZGV} \cdot (2h)$  correspond à un minimum pour lequel la vitesse de groupe est nulle pour une valeur non nulle de  $k$ . Courbe calculée avec le logiciel DISPERSE [48]. De part et d'autre de la courbe de dispersion est représenté le déplacement associé à chacun de ces modes est montré pour  $k \rightarrow 0$ .

### Réfraction / réflexion négative des ondes de Lamb

L'existence de modes de Lamb à vitesse de phase négative a récemment été mise à profit pour mettre en évidence les phénomènes de réfraction et de réflexion négative pour les ondes élastiques guidées. D'une part, les équipes de Claire Prada et Todd Murray ont montré comment la discontinuité d'épaisseur d'une plaque pouvait induire une conversion d'un mode à vitesse de phase positive *prograde* vers un mode à vitesse de phase négative *rétrograde*. Puis, ils ont démontré comment une marche d'épaisseur dans une plaque pouvait constituer une lentille plate de Veselago pour les ondes de Lamb [49][Fig. 4.12]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes appuyés sur le même principe pour explorer expérimentalement le principe des milieux complémentaires.

D'autre part, Germano *et al.* ont montré comment un simple bord libre pouvait également engendrer la conversion entre un mode *prograde* et *rétrograde* [50]. Cette conversion donne lieu à la réflexion négative des ondes de Lamb sur un bord libre. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes inspirés de ce travail pour explorer l'analogie existant entre réflexion négative et conjugaison de phase passive.

## 4.5 Objectifs

L'objectif de cette deuxième partie de thèse a donc été de tirer profit des phénomènes de réfraction et réflexion négative des ondes de Lamb pour explorer l'approche

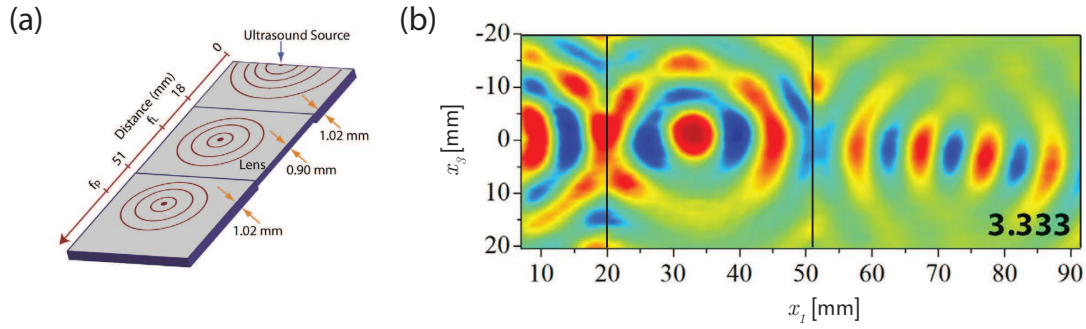


FIGURE 4.12 – Figure adaptée de [49]. (a) Schéma de principe de la lentille de Veselago pour les ondes de Lamb. (b) Champ de déplacement mesuré à la surface de la plaque.

des milieux complémentaires et de conjugaison de phase passive.

Le chapitre 5 porte sur l'étude théorique et expérimentale du phénomène de réflexion négative des ondes de Lamb à une interface libre. Dans un premier temps, nous avons étudié, d'un point de vue théorique, la conversion entre les modes *prograde* et *rétrograde* à une interface libre. Nous allons commencer par démontrer théoriquement que la conversion entre modes prograde et rétrograde à une interface libre devient optimale au voisinage du point ZGV. Dans un second temps, la réflexion négative d'une onde de Lamb cylindrique sur un bord libre sera examinée expérimentalement. Nous mettrons notamment en évidence comment cette interface joue le rôle d'un conjugué de phase passif à proximité du point ZGV. Enfin, nous tirerons profit de cette propriété pour montrer les effets bénéfiques de la réflexion négative sur une onde se propageant dans des environnements complexes. Une onde réfléchiée négativement conserve la cohérence spatiale de l'onde incidente. La réflexion négative masque donc les aspérités du milieu.

Le chapitre 6 traite quant à lui de la réfraction négative des ondes de Lamb. Dans un premier temps, nous allons étudier théoriquement la conversion entre modes *prograde* et *rétrograde* à une discontinuité d'épaisseur à des fins d'optimisation. Dans un second temps, nous examinerons numériquement et expérimentalement l'approche des milieux complémentaires. Nous mettrons en évidence comment cette approche permet d'annuler la propagation des ondes et camoufler certaines zones du milieu de propagation.

## Références bibliographiques

- [1] V.G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Sov. Phys. Usp.*, 10(4) :509, 1968.
- [2] L. I. Mandelshtam. Lecture on some problems of the theory of oscillations. In *Complete Collection of Works*, volume 5, pages 428–457. Academy of Science, Moscow, 1944.
- [3] J.B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18) :3966, 2000.
- [4] J.B. Pendry. Time reversal and negative refraction. *Science*, 322(5898) :71–73, 2008.
- [5] S.M. Popoff, G. Lerosey, M. Fink, A.C. Boccara, and S. Gigan. Controlling light through optical disordered media : transmission matrix approach. *New Journal of Physics*, 13(12) :123021, 2011.
- [6] C. Draeger and M. Fink. One-channel time reversal of elastic waves in a chaotic 2d-silicon cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 79(3) :407, 1997.
- [7] S. Ree and L.E. Reichl. Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut. *Physical Review E*, 60(2) :1607, 1999.
- [8] J de Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Coherent backscattering of an elastic wave in a chaotic cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 84(8) :1693, 2000.
- [9] O. Xeridat, C. Poli, O. Legrand, F. Mortessagne, and P. Sebbah. Quasimodes of a chaotic elastic cavity with increasing local losses. *Phys. Rev. E*, 80(3) :035201, 2009.
- [10] J.B. Pendry and S.A. Ramakrishna. Focusing light using negative refraction. *J. Phys. Condens. Matter*, 15(37) :6345, 2003.
- [11] M. Notomi. Negative refraction in photonic crystals. *Opt. Quant. Elect.*, 34(1-3) :133–143, 2002.
- [12] D.R. Smith, J.B. Pendry, and M.C.K. Wiltshire. Metamaterials and negative refractive index. *Science*, 305(5685) :788–792, 2004.
- [13] D.R. Smith, W.J. Padilla, D.C. Vier, S.C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Phys. Rev. Lett.*, 84(18) :4184, 2000.
- [14] J.B. Pendry, A.J. Holden, W.J. Stewart, and I. Youngs. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 76(25) :4773, 1996.
- [15] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, and W.J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, 47(11) :2075–2084, 1999.
- [16] J. Valentine, S. Zhang, T. Zentgraf, E. Ulin-Avila, D.A. Genov, G. Bartal, and X. Zhang. Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index. *Nature*, 455(7211) :376–379, 2008.
- [17] M. Notomi. Theory of light propagation in strongly modulated photonic crystals : Refractionlike behavior in the vicinity of the photonic band gap. *Phys. Rev. B*, 62(16) :10696, 2000.
- [18] E. Cubukcu, K. Aydin, E. Ozbay, S. Foteinopoulou, and C.M. Soukoulis. Electromagnetic waves : Negative refraction by photonic crystals. *Nature*, 423(6940) :604–605, 2003.

## CHAPITRE 4. RÉFRACTION ET RÉFLEXION NÉGATIVE

---

- [19] P.V. Parimi, W.T. Lu, P. Vodo, J. Sokoloff, J.S. Derov, and S. Sridhar. Negative refraction and left-handed electromagnetism in microwave photonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 92(12) :127401, 2004.
- [20] C. Luo, S.G. Johnson, J.D. Joannopoulos, and J.B. Pendry. All-angle negative refraction without negative effective index. *Phys. Rev. B*, 65(20) :201104, 2002.
- [21] E. Cubukcu, K. Aydin, E. Ozbay, S. Foteinopoulou, and C.M. Soukoulis. Subwavelength resolution in a two-dimensional photonic-crystal-based superlens. *Phys. Rev. Lett.*, 91(20) :207401, 2003.
- [22] Z. Lu, J.A. Murakowski, C.A. Schuetz, S. Shi, G.J. Schneider, and D.W. Prather. Three-dimensional subwavelength imaging by a photonic-crystal flat lens using negative refraction at microwave frequencies. *Phys. Rev. Lett.*, 95(15) :153901, 2005.
- [23] S. Tretyakov, I. Nefedov, A. Sihvola, S. Maslovski, and C. Simovski. Waves and energy in chiral nihility. *J. Electromagn. Waves. Appl.*, 17(5) :695–706, 2003.
- [24] J.B. Pendry. A chiral route to negative refraction. *Science*, 306(5700) :1353–1355, 2004.
- [25] C. Monzon and D.W. Forester. Negative refraction and focusing of circularly polarized waves in optically active media. *Phys. Rev. Lett.*, 95(12) :123904, 2005.
- [26] E. Plum, J. Zhou, J. Dong, V.A. Fedotov, T. Koschny, C.M. Soukoulis, and N.I. Zheludev. Metamaterial with negative index due to chirality. *Phys. Rev. B*, 79(3) :035407, 2009.
- [27] S. Zhang, Y.-S. Park, J. Li, X. Lu, W. Zhang, and X. Zhang. Negative refractive index in chiral metamaterials. *Phys. Rev. Lett.*, 102(2) :023901, 2009.
- [28] J. Li and C.T. Chan. Double-negative acoustic metamaterial. *Phys. Rev. E*, 70(5) :055602, 2004.
- [29] S.H. Lee, C.M. Park, Y.M. Seo, Z.G. Wang, and C.K. Kim. Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus. *Phys. Rev. Lett.*, 104(5) :054301, 2010.
- [30] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y.Y. Zhu, Z. Yang, C.T. Chan, and P. Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, 289(5485) :1734–1736, 2000.
- [31] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, and X. Zhang. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nat. Mater.*, 5(6) :452–456, 2006.
- [32] S. Yang, J.H. Page, Z. Liu, M.L. Cowan, C.T. Chan, and P. Sheng. Focusing of sound in a 3d phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 93(2) :024301, 2004.
- [33] C. Qiu, X. Zhang, and Z. Liu. Far-field imaging of acoustic waves by a two-dimensional sonic crystal. *Phys. Rev. B*, 71(5) :054302, 2005.
- [34] M. Ke, Z. Liu, Z. Cheng, J. Li, P. Peng, and J. Shi. Flat superlens by using negative refraction in two-dimensional phononic crystals. *Solid State Commun.*, 142(3) :177–180, 2007.
- [35] A. Sukhovich, L. Jing, and J.H. Page. Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, 77(1) :014301, 2008.
- [36] B. Morvan, A. Tinel, A.-C. Hladky-Hennion, J. Vasseur, and B. Dubus. Experimental demonstration of the negative refraction of a transverse elastic wave in a two-dimensional solid phononic crystal. *Appl. Phys. Lett.*, 96(10) :101905, 2010.



- [37] C. Croënne, E.D. Manga, B. Morvan, A. Tinel, B. Dubus, J. Vasseur, and A.-C. Hladky-Hennion. Negative refraction of longitudinal waves in a two-dimensional solid-solid phononic crystal. *Phys. Rev. B*, 83(5) :054301, 2011.
- [38] J. Pierre, O. Boyko, L. Belliard, J.O. Vasseur, and B. Bonello. Negative refraction of zero order flexural lamb waves through a two-dimensional phononic crystal. *Appl. Phys. Lett.*, 97(12) :121919, 2010.
- [39] M. Dubois, M. Farhat, E. Bossy, S. Enoch, S. Guenneau, and P. Sebbah. Flat lens for pulse focusing of elastic waves in thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 103(7) :071915, 2013.
- [40] R. Zhu, X.N. Liu, G.K. Hu, C.T. Sun, and G.L. Huang. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nat. Commun.*, 5, 2014.
- [41] E. Dieulesaint and D. Royer. *Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal*, volume 13. Masson, 1974.
- [42] I. Tolstoy and E. Usdin. Wave propagation in elastic plates : low and high mode dispersion. *J. Acoust. Soc. Am.*, 29(1) :37–42, 1957.
- [43] R.D. Mindlin. Waves and vibrations in isotropic, elastic plates. *Structural Mechanics*, 1960 :199–232, 1960.
- [44] A.H. Meitzler. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38(5) :835–842, 1965.
- [45] K. Negishi. Existence of negative group velocities in lamb waves. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 26(S1) :171, 1987.
- [46] C. Prada, O. Balogun, and T.W. Murray. Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity lamb waves in thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 87(19) :194109, 2005.
- [47] S.D. Holland and D.E. Chimenti. Air-coupled acoustic imaging with zero-group-velocity lamb modes. *Appl. Phys. Lett.*, 83(13) :2704–2706, 2003.
- [48] B. Pavlakovic and M. Lowe. Disperse software, v. 2.0. 16. *Mechanical Engineering, Imperial College, London*, 2005.
- [49] F.D. Philippe, T.W. Murray, and C. Prada. Focusing on plates : controlling guided waves using negative refraction. *Sci. Rep.*, 5 :11112, 2015.
- [50] S. Bramhavar, C. Prada, A.A. Maznev, A.G. Every, T.B. Norris, and T.W. Murray. Negative refraction and focusing of elastic lamb waves at an interface. *Phys. Rev. B*, 83(1) :014106, 2011.



---

Réflexion négative des ondes de Lamb

---

Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>117</b>
<b>5.2</b>	<b>Étude théorique de la réflexion négative d'une onde de Lamb sur un bord libre</b>	<b>117</b>
5.2.1	Rappels sur les ondes élastiques dans les plaques isotropes . . .	118
5.2.2	Interaction d'un mode de Lamb avec le bord libre d'une plaque	123
5.2.3	Application aux modes symétriques dans une plaque de Duralumin . . . . .	124
<b>5.3</b>	<b>Démonstration expérimentale d'un miroir plan focalisant</b>	<b>126</b>
5.3.1	Miroir plan focalisant en amont . . . . .	126
5.3.2	Miroir plan focalisant en aval . . . . .	131
<b>5.4</b>	<b>Démonstration expérimentale de la conjugaison de phase passive</b>	<b>133</b>
5.4.1	Sur le bord libre d'une plaque élastique . . . . .	134
5.4.2	Sur les parois d'une cavité . . . . .	136
5.4.3	Sur un nuage de diffuseur . . . . .	139
<b>5.5</b>	<b>Conclusions, perspectives</b>	<b>140</b>
<b>5.A</b>	<b>Annexes</b>	<b>142</b>
5.A.1	Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion . . .	142
5.A.2	Génération sélective du mode $S_1$ . . . . .	144
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>145</b>

---



## 5.1 Introduction

Comme nous venons de l'évoquer, une propriété particulière des ondes de Lamb réside dans l'existence de branches à vitesse de phase négative pour certains matériaux. La progression des fronts d'ondes associés, dictée par le vecteur d'onde, se fait alors dans la direction opposée à celle du flux d'énergie, correspondant au vecteur de Poynting. Ces modes proviennent de la répulsion entre deux branches de dispersion associées à des fréquences de coupures voisines. La branche la plus basse présente alors un minimum au point ZGV [1, 2]. Au-dessus de cette résonance coexistent un mode à vitesse de phase positive et un mode à vitesse de phase négative. En 2012, Germano *et al.* [3] ont montré comment la conversion entre ces modes sur un simple bord libre pouvait conduire au phénomène de réflexion négative.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre l'étude de ce phénomène à la fois théoriquement et expérimentalement. Bien que le problème de l'interaction d'un mode de Lamb avec le bord libre d'une plaque ait déjà été traité théoriquement pour les cas d'une incidence normale et oblique, le cas des ondes *rétrogrades* n'a, à notre connaissance, jamais été abordé; nous traitons donc ce cas dans la première partie de chapitre. Nous démontrons non seulement qu'au dessus du point ZGV, la conversion se produit préférentiellement entre les deux modes impliqués dans la résonance mais qu'elle est même parfaite au voisinage de celui-ci. La suite du chapitre aborde l'aspect expérimental du problème pour une plaque de Duralumin. Nous montrons ainsi qu'au dessus du point ZGV, le bord libre de la plaque se comporte comme un miroir plan focalisant. Enfin, nous nous plaçons au voisinage du point ZGV de façon à étudier l'analogie entre conjugaison de phase et réflexion négative. Nous montrons comment un bord libre peut jouer le rôle de conjugué de phase passif. Ensuite, nous mettons en lumière cette comparaison en étudiant le phénomène de réflexion négative induit par les bords d'une cavité, puis par les diffuseurs d'un milieu désordonné.

## 5.2 Étude théorique de la réflexion négative d'une onde de Lamb sur un bord libre

L'interaction d'une onde de Lamb incidente sur le bord libre d'une plaque semi-infinie a été largement étudiée dans le cas d'une incidence normale, notamment à travers des méthodes de décomposition modale et de collocation [4–9]. À l'inverse, le cas de l'incidence oblique n'a été traité que plus récemment. Gunawan *et al.* [10] ainsi que Wilcox *et al.* [11] ont considéré le régime des basses fréquences dans deux études

reposant respectivement sur une décomposition modale et une méthode de différences finies dans le domaine fréquentiel. Plus récemment, Santhanam *et al.* [12] puis Feng *et al.* [13] ont étendu cette étude à des régimes de fréquences plus élevées en utilisant une décomposition modale. La question des modes *rétrogrades* n'est toutefois pas abordée dans ces différents travaux.

Dans cette partie, nous nous attachons donc à décrire théoriquement la réflexion d'une onde de Lamb en incidence oblique sur le bord libre d'une plaque. Nous commençons par étudier en détail le comportement des ondes élastiques dans les plaques isotropes afin d'en déduire l'existence des ondes SH ainsi que des ondes de Lamb que nous décrivons à cette occasion. Dans un deuxième temps, nous nous intéressons à l'interaction d'un mode de Lamb en incidence oblique avec le bord libre d'une plaque de façon à en déduire les coefficients de réflexion dans les différents modes du guide. À cet effet, nous adaptons à une polarisation tridimensionnelle (3D) la méthode de décomposition modale développée par Vincent Pagneux [9] pour le cas d'une incidence normale. Enfin, nous appliquons cette méthode au bord libre d'une plaque de Duralumin. De façon à considérer le problème de la réflexion négative, nous nous plaçons ici dans la bande de fréquence située au voisinage d'une résonance ZGV, pour laquelle des modes de propagation *progrades* et *rétrogrades* coexistent.

### 5.2.1 Rappels sur les ondes élastiques dans les plaques isotropes

Cette section reprend des éléments bien connus sur les ondes guidées se propageant dans les plaques isotropes. À ce titre, elle s'adresse aux non spécialistes des ondes élastiques. Le système de coordonnées ainsi que l'ensemble des notations définies à cette occasion seront repris dans le chapitre suivant.

#### Géométrie du problème

Lorsque le milieu de propagation considéré est borné dans au moins une direction et invariant dans une direction perpendiculaire à la première, ce dernier constitue ce que l'on appelle un *guide d'onde*. Le couplage entre les ondes longitudinales et transverses issu des réflexions multiples sur les parois de ce dernier engendre alors des ondes *guidées*. La direction de propagation de ces ondes – l'axe de propagation – correspond à une direction d'invariance du milieu.

Dans cette partie, nous considérons la propagation d'ondes élastiques dans un guide constitué d'un milieu matériel homogène isotrope délimité dans la direction  $\mathbf{x}_2$  par deux plans distants d'une hauteur  $2h$  [Fig. 5.1], entouré de vide. Ce dernier est donc invariant dans les directions  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_3$ . Le problème est alors étudié dans le plan  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , où  $\mathbf{x}_1$  est la direction de propagation.

#### Mise en équation du problème

En régime harmonique de pulsation  $\omega$ , les équations de l'élastodynamique s'écrivent,

$$-\rho\omega^2\mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.1)$$

où  $\rho$  est la densité du matériau,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$  le champ de déplacement et  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$  le tenseur des contraintes. Dans le cas d'un milieu isotrope, la loi de Hooke ou relation contrainte-déformation s'écrit,

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{Tr}[\boldsymbol{\epsilon}]\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \quad (5.2)$$

## 5.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA RÉFLEXION NÉGATIVE D'UNE ONDE DE LAMB SUR UN BORD LIBRE

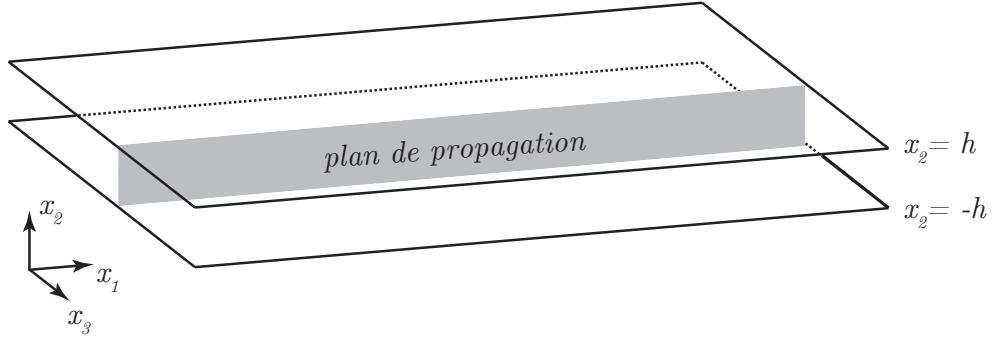


FIGURE 5.1 – Géométrie du guide d'onde considéré.

où  $\lambda$  et  $\mu$  représentent les coefficients de Lamé,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et  $\epsilon = [\epsilon_{ij}]$  le tenseur des déformations. Ce dernier s'obtient par la relation déplacement-déformation,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.3)$$

Les conditions aux limites s'obtiennent en écrivant l'annulation du tenseur des contraintes sur chacune des surfaces libres de la plaque,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface. Étant donnée l'invariance du guide dans la direction  $\mathbf{x}_3$ , les solutions du problème sont de la forme :

$$\{u_i(x_1, x_2, t), \sigma_{ij}(x_1, x_2, t)\} = \{u_i(x_2), \sigma_{ij}(x_2)\} \cdot \exp[i \cdot (kx_1 - \omega t)]. \quad (5.4)$$

Ces solutions sont les modes du guide. En injectant l'expression de ces modes dans les équations (5.1) et (5.2), on obtient le système d'équations suivant,

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + ik(\lambda + \mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = [(\lambda + 2\mu)k^2 - \rho\omega^2] u_1, \quad (5.5)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + ik(\lambda + \mu) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = [\mu k^2 - \rho\omega^2] u_2, \quad (5.6)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = [\mu k^2 - \rho\omega^2] u_3. \quad (5.7)$$

### Typologie des modes du guide

Dans ce système, les équations (5.5 – 5.6), associées aux composantes de déplacements ( $u_1, u_2$ ) sont découplées de l'équation (5.7), associée à la composante du déplacement  $u_3$ . Ce découplage est conservé lors de la prise en compte des conditions aux limites en  $x_2 = \pm h$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_2 = \pm h) + ik u_2(x_2 = \pm h) = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x_2 = \pm h) + ik \lambda u_1(x_2 = \pm h) = 0, \\ \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x_2 = \pm h) = 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Cette séparation permet d'introduire deux familles de modes : les modes SH (en anglais, *Shear Horizontal*) d'une part, dont la polarisation – selon  $\mathbf{x}_3$  – est perpendiculaire au plan de polarisation et les modes de Lamb d'autre part, dont la polarisation est contenue dans le plan de propagation ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ).

Mise en équation des modes de Lamb

Les modes de Lamb vérifient les équations différentielles (5.5) et (5.6) associées aux conditions aux limites décrites dans les deux premières lignes du système d'équations (5.8). De façon à obtenir un système d'équations découplées, il est avantageux d'utiliser la décomposition de Helmholtz en définissant un potentiel scalaire  $\phi$  et un potentiel vecteur  $\psi$  polarisé dans la direction  $\mathbf{x}_3$  (cf. Ref. [14], p. 163),

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla \wedge \psi. \quad (5.9)$$

Ces derniers satisfont aux équations de propagation :

$$\nabla^2\phi + \frac{\omega^2}{c_L^2}\phi = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2\psi + \frac{\omega^2}{c_T^2}\psi = \mathbf{0}, \quad (5.10)$$

où  $c_L$  et  $c_T$  désignent respectivement les vitesses de phase des ondes longitudinales et transverses. Les composantes de l'onde de Lamb s'écrivent alors en fonction des potentiels :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = -ik\phi(x_2) + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_2), \\ u_2(x_2) = \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_2) + ik\psi(x_2). \end{cases} \quad (5.11)$$

En posant,

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2 \quad \text{et} \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2, \quad (5.12)$$

le système couplé en  $u_1$  et  $u_2$  (5.5) et (5.6) est alors remplacé par le système d'équations découplées (5.13),

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + p^2\phi = 0, \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + q^2\psi = 0. \end{cases} \quad (5.13)$$

On obtient des potentiels de la forme :

$$\begin{aligned} \phi(x_2) &= [A_\phi e^{ipx_2} + B_\phi e^{-ipx_2}] \cdot \exp(i \cdot kx_1), \\ \psi(x_2) &= [A_\psi e^{iqx_2} + B_\psi e^{-iqx_2}] \cdot \exp(i \cdot kx_1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

où  $A_\phi$ ,  $B_\phi$ ,  $A_\psi$  et  $B_\psi$  sont des constantes. Les solutions acceptables sont alors déterminées par les conditions aux limites données par l'annulation de la contrainte en  $x_2 = \pm h$ . L'annulation des composantes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  du tenseur des contraintes s'écrivent respectivement (cf. Ref. [14], pp. 281–282) :

$$\begin{aligned} (k^2 - q^2) \psi(x_2 = \pm h) - 2ik \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_2 = \pm h) &= 0, \\ (k^2 - q^2) \phi(x_2 = \pm h) + 2ik \frac{\partial\psi}{\partial x_2}(x_2 = \pm h) &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ces deux conditions ne peuvent être satisfaites simultanément que si les composantes  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  du tenseur des contraintes sont des fonctions paires ou impaires de  $x_2$ . En conséquence, les potentiels solutions de l'équation (5.13) sont de même parité, soit :

$$\phi = A \sin(px_2 + \alpha) \quad \text{et} \quad \psi = B \cos(qx_2 + \alpha), \quad (5.16)$$



## 5.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA RÉFLEXION NÉGATIVE D'UNE ONDE DE LAMB SUR UN BORD LIBRE

avec  $\alpha = 0$  ou  $\alpha = \pi/2$ . On distinguera ainsi les modes *symétriques* ( $\alpha = 0$ ) et les modes *antisymétriques* ( $\alpha = \pi/2$ ). Pour les modes symétriques, la composante longitudinale est une fonction paire de  $x_2$  alors que la composante transverse est une fonction impaire de  $x_2$  [Fig. 5.2(a)]. À l'inverse, pour les modes antisymétriques, la composante longitudinale est une fonction impaire de  $x_2$  alors que la composante transverse est une fonction paire de  $x_2$  [Fig. 5.2(b)]. Les conditions aux limites (cf. Eq. (5.15)) s'écrivent alors,

$$\begin{aligned} (k^2 - q^2)B \cos(ph + \alpha) + 2ikqA \cos(qh + \alpha) &= 0, \\ 2ikqB \sin(ph + \alpha) + (k^2 - q^2)A \sin(qh + \alpha) &= 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Les solutions non triviales de ce système sont obtenues en annulant le déterminant correspondant, soit, après quelques manipulations,

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4k^2 q^2 \left[ 1 - \frac{p \tan(ph + \alpha)}{q \tan(qh + \alpha)} \right]. \quad (5.18)$$

Cette relation de dispersion entre  $\omega$  et  $k$  constitue l'équation de Rayleigh-Lamb. La résolution de l'équation permet d'accéder au spectre discret des nombres d'ondes  $k_n$ . Pour une pulsation  $\omega$  donnée, on ne compte qu'un nombre fini de modes propagatifs, c.-à-d. associés à des nombres d'ondes réels alors qu'il existe un nombre infini de modes évanescents ou inhomogènes, c.-à-d. associés à des nombres d'ondes imaginaires purs ou complexes. La complexité de cette relation ne permet pas d'établir une forme analytique de ses solutions, si bien que de nombreuses techniques de résolution ont été développées. Nous avons étendu ici la méthode développée par Vincent Pagneux [9]. L'approche utilisée est décrite dans l'annexe 5.A.1 (p. 142).

L'expression des composantes du champ de déplacement associé aux modes de Lamb s'obtient en injectant l'expression de  $B$ , extraite du système d'équations (5.17), dans l'expression des potentiels (Eq. 5.14),

$$\begin{aligned} u_1(x_2) &= -\frac{(ik) \cos(px_2 + \alpha)}{(q^2 - k^2) \cos(ph + \alpha)} + \frac{\cos(qx_2 + \alpha)}{(2ik) \cos(qh + \alpha)}, \\ u_2(x_2) &= \frac{p \sin(px_2 + \alpha)}{(q^2 - k^2) \cos(ph + \alpha)} - \frac{\sin(qx_2 + \alpha)}{2q \cos(qh + \alpha)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

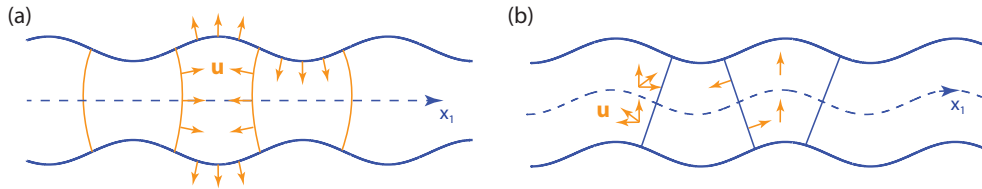


FIGURE 5.2 – Figure adaptée de [14]. Représentation du champ de déplacement associé aux modes de Lamb (a) symétriques et (b) antisymétriques.

### Mise en équation des modes SH

Les modes SH sont les modes polarisés dans la direction  $\mathbf{x}_3$ . Ils vérifient l'équation différentielle (5.7), associée à la condition aux limites décrite dans la dernière ligne du système d'équations (5.8). Les solutions de l'équation différentielle (5.7) s'écrivent,

$$u_3(x_2) = A \exp(i \cdot \alpha x_1) + B \exp(-i \cdot \alpha x_1), \quad (5.20)$$

## CHAPITRE 5. RÉFLEXION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB

avec  $\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2}$ . La condition aux limites en  $x_2 = \pm h$  s'écrit,

$$\begin{cases} Ae^{\alpha h} - Be^{-\alpha h} = 0, \\ Ae^{-\alpha h} - Be^{\alpha h} = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

Les solutions non triviales sont obtenues en annulant le déterminant correspondant :

$$e^{2\alpha h} - e^{-2\alpha h} = 2\alpha \sin(2\alpha h) = 0, \quad (5.22)$$

soit,

$$\alpha = \frac{n\pi}{2h}, \quad n \in \mathbb{Q}. \quad (5.23)$$

On en déduit alors l'expression de la relation de dispersion,

$$\begin{cases} k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_T^2} - \left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2}, & \text{si } \omega \geq \frac{n\pi c_T}{2h}, \\ k = \pm i \cdot \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2}}, & \text{si } \omega < \frac{n\pi c_T}{2h}. \end{cases} \quad (5.24)$$

À l'instar des modes de Lamb, à une fréquence donnée, seul un nombre fini de modes SH propagatifs participent au transport de l'énergie. Il existe à l'inverse un nombre infini de modes évanescents, associés à un nombre d'onde  $k$  imaginaire pur. L'expression du champ de déplacement associé est déduite en réinjectant les solutions de l'équation de dispersion dans l'équation (5.20),

$$u_3 = u_0 \cos\left(\frac{n\pi x_3}{2h} + \frac{n\pi}{2}\right). \quad (5.25)$$

On distingue alors les modes SH symétriques d'une part et antisymétriques d'autre part. Ils correspondent respectivement à une polarisation  $u_3(x_3)$  paire et impaire dans l'épaisseur de la plaque.

### Classification des modes

À ce stade, nous avons établi l'existence d'une infinité de modes de nature, symétrie mais aussi de sens de propagation (ou d'atténuation) différents. Afin de pouvoir les désigner simplement dans la suite de cette thèse, nous nous proposons ici d'en établir une classification univoque.

Les modes propagatifs dans le sens des  $x_1$  croissants ont un vecteur de Poynting (et une vitesse de groupe) dirigé suivant  $\mathbf{x}_1$ . Les modes évanescents et inhomogènes dont la décroissance se fait dans le sens des  $x_1$  croissants sont quant à eux associés à des nombres d'ondes dont la partie imaginaire est strictement positive. Dans la suite, chacun de ces modes, dirigés dans le sens des  $x_1$  croissants, sera associé à un entier  $m$  et noté  $\{u_i^{(m)}, \sigma_{ij}^{(m)}\}$ . Ces modes sont ensuite classés par ordre croissant de la partie imaginaire de leur nombre d'onde puis par ordre décroissant de leur partie réelle. Enfin, les équations (5.18) et (5.24) assurent qu'à chaque mode,  $\{u_i^{(m)}, \sigma_{ij}^{(m)}\}$ , de nombre d'onde  $k_m$ , correspond un mode dont la propagation (ou l'atténuation) se fait dans le sens des  $x_1$  décroissants, noté  $\{\tilde{u}_i^{(m)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}\}$ , de nombre d'onde  $-k_m$ .

## 5.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA RÉFLEXION NÉGATIVE D'UNE ONDE DE LAMB SUR UN BORD LIBRE

---

### 5.2.2 Interaction d'un mode de Lamb avec le bord libre d'une plaque

Considérons maintenant une plaque semi-infinie, occupant le volume  $x'_1 < 0$  et  $-h < x_2 < h$ , comme illustré sur la figure 5.3. Étudions alors l'interaction d'un mode de Lamb, de nombre d'onde  $k_i$ , associé à un flux d'énergie unitaire dans la direction  $\mathbf{x}'_1$  et se propageant en direction du bord libre du guide, avec un angle d'incidence  $\theta_i$  par rapport à la normale [Fig. 5.3]. De façon à remplir la condition d'annulation de la contrainte sur le bord libre, ce mode est réfléchi en une combinaison linéaire infinie des différents modes de Lamb et modes SH existants. De plus, chaque mode de vecteur d'onde  $-k_m$  est réfléchi avec un angle  $\theta_m$  différent, en vertu de la loi de Snell-Descartes en réflexion (cf. Eq. (4.6)).

Considérons un mode *prograde* en incidence oblique sur le bord de la plaque. Il est réfléchi positivement par conversion dans un mode *prograde* alors qu'il est réfléchi négativement dans un mode *rétrograde*. Soit  $\{u_i^{(m)}, \sigma_{ij}^{(m)}\}$  le champ de contraintes-déplacement associé à un mode réfléchi et exprimé dans le système de coordonnées  $(x'_1, x_2, x'_3)$  lié au bord de la plaque. Il se déduit du champ  $\{u_i^{(m)}, \sigma_{ij}^{(m)}\}$ , exprimé dans le système de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ , à partir des équations :

$$\mathbf{u}'^{(m)} = R(\theta_m) \cdot \mathbf{u}^{(m)}, \quad (5.26)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(m)} = R(\theta_m) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \cdot R(\theta_m)^T, \quad (5.27)$$

où  $R(\theta)$  est la matrice de rotation,

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

Considérons deux modes  $\{\tilde{u}_i^{(m)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(m)}\}$  et  $\{\tilde{u}_i^{(p)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(p)}\}$ , de nombres d'onde  $k_m$  et  $k_p$ . Les travaux initiés par Auld [15] et Fraser [16] puis généralisés par Gunawan *et al.* [10] au cas d'une polarisation 3D établissent la relation de bi-orthogonalité des modes de la plaque,

$$(\eta_m - \eta_p^*) P_{mp}^\xi = 0, \quad (5.30)$$

où  $\eta_m = \pm (k_m^2 - \xi^2)^{1/2}$ . Pour les modes propagatifs, le signe  $\pm$  est choisi de façon à ce que  $\eta$  et  $k$  aient le même signe alors que pour les modes inhomogènes et évanescents, le signe  $\pm$  est choisi de façon à ce que les parties imaginaires de  $\eta$  et de  $k$  aient le même signe. Par ailleurs, on a,

$$P_{mp}^\xi = \frac{\omega}{4} \int_{-h}^{+h} \left[ u_i^{(m)} (\sigma_{1i}^{(p)})^* - (u_i^{(p)})^* \sigma_{1i}^{(m)} \right] dx_2. \quad (5.31)$$

Cette relation, dite *de Fraser* ou *de bi-orthogonalité* indique que le mode associé au nombre  $k_m$  est *orthogonal* à tous les autres modes, à l'exception de celui tel que  $\eta_p = \eta_m^*$ , c'est à dire le mode identique mais se propageant dans la direction opposée. Cette propriété nous garantit donc l'unicité de la décomposition du champ réfléchi selon les modes du guide se propageant dans le sens des  $x_1$  décroissants.

La condition d'annulation de la contrainte sur le bord de la plaque ( $x'_1 = 0$ ) s'écrit alors comme l'annulation de la somme du mode incident et des différents modes réfléchis

pondérés par leurs coefficients de réflexion complexes  $r_{i|m}$  :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}'^{(i)} \cdot \mathbf{n}_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} r_{i|m} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'^{(m)} \cdot \mathbf{n}_1. \quad (5.32)$$

La résolution de ce problème se fait en suivant la démarche développée par Vincent Pagneux [9] et en l'étendant au cas d'une polarisation 3D. En combinant une technique de collocation par points selon l'axe  $x_2$  et une approche modale, cette méthode, décrite dans l'annexe 5.A.1 (p. 142), fournit l'amplitude des différents coefficients de réflexion  $r_{i|n}$  pour un mode incident  $i$  et un angle d'incidence  $\theta_i$  donné.

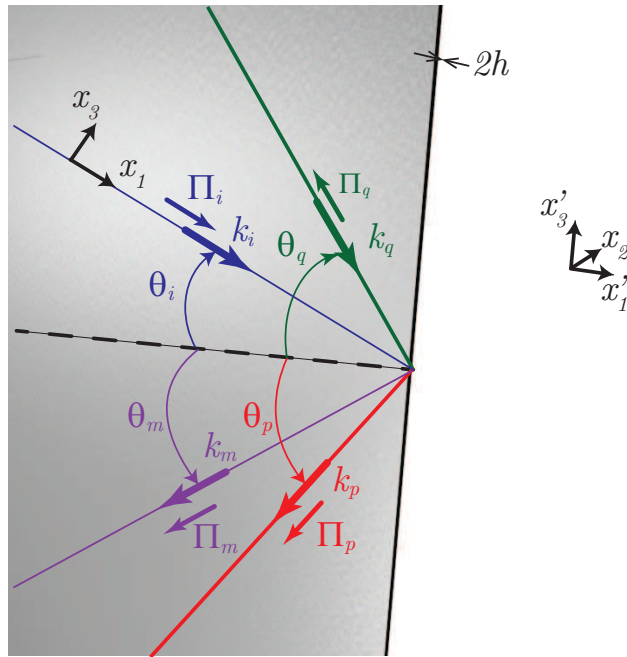


FIGURE 5.3 – Interaction d'un mode de Lamb en incidence oblique avec le bord libre d'une plaque semi-infinie. Afin de satisfaire la condition d'annulation de la contrainte sur le bord libre, l'onde monochromatique incidente est réfléchi sous la forme d'une combinaison des différents modes de Lamb et modes SH existant à cette fréquence, propagatifs, inhomogènes et évanescents. Chacun des modes est réfléchi avec un angle  $\theta_n$  déterminé par la conservation de la composante du vecteur d'onde  $k_n$  selon l'axe  $x_3$ . Dans cet exemple, un mode incident *prograde* d'indice  $i$  est réfléchi positivement dans les deux modes *progrades*  $m$  et  $p$  et négativement dans le mode  $q$ , *rétrograde*. Par souci de lisibilité, les modes évanescents et inhomogènes ne sont pas représentés mais il est important de les considérer dans le calcul. On notera également que le vecteur de Poynting  $\Pi_q$  du mode  $q$ , réfléchi négativement, est anti-parallèle au vecteur d'onde  $k_q$  correspondant.

### 5.2.3 Application aux modes symétriques dans une plaque de Duralumin

Afin de prédire le phénomène de réflexion négative, le calcul des coefficients de réflexion est appliqué au cas pratique d'une plaque de Duralumin de densité  $\rho = 2790 \text{ kg/m}^3$  et au sein de laquelle les composantes longitudinales et transverses se propagent respectivement aux vitesses  $c_L = 6,398 \text{ mm}/\mu\text{s}$  et  $c_T = 3,122 \text{ mm}/\mu\text{s}$ . En

## 5.2. ÉTUDE THÉORIQUE DE LA RÉFLEXION NÉGATIVE D'UNE ONDE DE LAMB SUR UN BORD LIBRE

pratique, les résultats présentés dans ce chapitre, dans la bande de fréquence allant de  $f_{ZGV} \times (2h) / c_T = 0,92$  jusque  $f \times (2h) / c_T = 1,06$  ont été obtenus en considérant 199 modes de Lamb et 100 modes SH. On notera l'importance de prendre en compte un grand nombre de modes de Lamb et de modes SH inhomogènes ou évanescents. La condition de conservation de l'énergie est alors remplie avec une précision satisfaisante :  $1 - \sum_p |r_{i|p}|^2 \sim 10^{-8}$ , où  $p$  représente une somme sur l'ensemble des modes propagatifs. Les courbes de dispersion obtenues pour les premiers modes de Lamb et modes SH propagatifs symétriques sont représentées sur la figure 5.4. Pour plus de clarté, ces derniers sont respectivement identifiés sous la forme  $SH_i$  et  $S_i$  plutôt que par leur ordre de numérotation  $m$ .

Comme souligné dans des études précédentes [17], dans la bande de fréquence s'étendant de la résonance ZGV à sa fréquence de coupure, le mode  $S_2$  se propageant dans le sens des  $x_1$  croissants est associé à un nombre d'onde négatif. Il se propage donc avec une vitesse de phase  $\omega/k$  négative, et ce, malgré une vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial k$  positive, marquant ainsi son caractère *rétrograde*. De façon à le différencier du mode  $S_2$  *prograde*, également présent pour une gamme de fréquences plus élevées, ce mode est identifié en tant que mode  $S_{2b}$ . Cette particularité nous amène à une autre caractéristique majeure de ces courbes de dispersion qu'est l'existence d'un minimum pour les modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  à la même fréquence  $f = f_{ZGV}$  mais pour deux nombres d'onde de signes opposés  $k = \pm k_{ZGV}$ . Pour ce minimum, la vitesse de groupe des modes s'annule alors que leur vitesse de phase reste finie [1, 2].

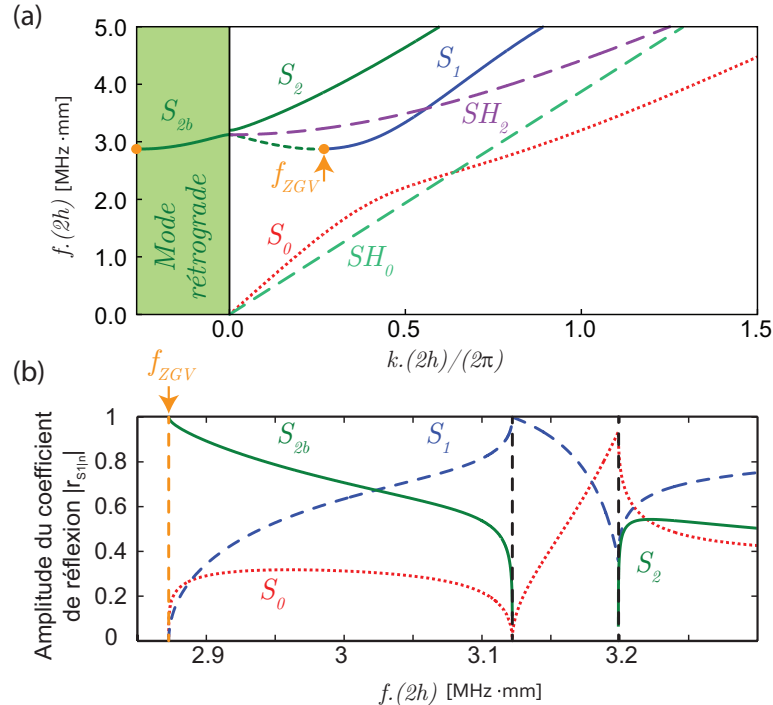


FIGURE 5.4 – (a) Courbes de dispersion des premiers modes de Lamb et SH propagatifs dans une plaque de Duralumin. (b) Module des coefficients de réflexion en amplitude  $|r_{S1,n}|$  des modes de Lamb propagatifs pour un mode  $S_1$  en incidence normale sur le bord libre de la plaque en fonction du produit (fréquence · épaisseur) en MHz.mm.

La figure 5.4(b) représente l'évolution fréquentielle des coefficients de réflexion des

différents modes propagatifs pour un mode  $S_1$  en incidence normale sur le bord libre de la plaque sur la bande de fréquence  $f \times (2h) = [2,87 - 3,30]$  MHz · mm. On notera que, d'une part, le problème étant symétrique par rapport au plan  $x_2 = 0$ , la réflexion de l'onde incidente préserve la symétrie des modes : un mode incident symétrique sera donc réfléchi en une combinaison des seuls modes symétriques. D'autre part, dans le cas d'une incidence normale, le problème se réduit aux modes de Lamb du fait du découplage entre ces derniers et les modes SH. Le résultat remarquable de la figure 5.4(b) réside dans la prédiction d'une conversion parfaite du mode  $S_1$ , *prograde*, dans le mode  $S_{2b}$ , *rétrograde*, au voisinage du point ZGV. Ce phénomène s'explique par l'égalité entre le nombre d'onde du mode  $S_1$  incident et celui du mode  $S_{2b}$  réfléchi. En conséquence, ces deux modes sont associés à des champs de contraintes et de déplacement identiques, la seule différence se situant dans la direction des vecteurs de Poynting associés. Il est alors possible de satisfaire la condition d'annulation de la contrainte avec une simple combinaison de ces deux modes dans laquelle le coefficient de réflexion prend la valeur  $r_{S_1|S_{2b}} = -1$ .

Cette correspondance n'existe toutefois que dans le cas d'une incidence normale, pour laquelle les modes de Lamb sont découplés des modes SH. La figure 5.5(a) illustre l'évolution des coefficients de réflexion  $|r_{S_1|n}|$  avec l'angle d'incidence du mode  $S_1$  pour un produit fréquence-épaisseur  $f \times (2h) = 3,00$  MHz · mm, c'est-à-dire entre la fréquence ZGV et la fréquence de coupure du mode  $S_2$ . À cette fréquence, le mode  $S_1$  est réfléchi en une combinaison des modes de Lamb  $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_{2b}$  et du mode  $SH_0$ . De plus, puisque  $|k_{S_{2b}}| < |k_{S_1}|$ , la conversion du mode  $S_1$  dans le mode  $S_{2b}$  n'a lieu qu'en dessous de l'angle critique  $\theta_c = \arcsin(|k_{S_{2b}}/k_{S_1}|)$ . Ceci étant, il est intéressant de noter que la conversion reste quasi-constante dans la gamme d'angle  $|\theta_{S_1}| < \theta_c$  : le mode  $S_{2b}$  est donc significativement excité sur l'ensemble du spectre angulaire. Ces remarques restent valides au voisinage du point ZGV [Fig. 5.5(b)]. De plus, la conversion du mode  $S_1$  vers le mode  $S_{2b}$  y est alors quasiment parfaite sur l'ensemble du spectre angulaire ( $\theta_c \rightarrow \pi/2$ ). On notera que la réciprocité implique que  $r_{S_1|S_{2b}} = r_{S_{2b}|S_1}$  : la conversion d'un mode  $S_{2b}$  incident dans le mode  $S_1$  est donc également quasi-parfaite.

Cette étude théorique préliminaire nous a permis de quantifier la conversion du mode  $S_1$  dans le mode  $S_{2b}$  sur un bord libre, synonyme de réflexion négative. Dans la suite, nous allons voir comment ces résultats remarquables font des ondes de Lamb des candidats de choix pour explorer l'analogie entre réflexion négative et conjugaison de phase passive.

### 5.3 Démonstration expérimentale d'un miroir plan focalisant

La conversion d'un mode de Lamb *prograde* vers un mode *rétrogrades* sur le bord libre d'une plaque résulte dans la réflexion négative de l'onde. Dans cette partie, nous montrons comment ce phénomène peut être mis à profit de façon à implémenter un miroir plan focalisant dans une plaque de Duralumin.

#### 5.3.1 Miroir plan focalisant en amont

Le principe du miroir plan focalisant pour un mode  $S_1$  incident est décrit sur la figure 5.6 pour une plaque d'épaisseur  $2h = 1$  mm. Considérons un point source  $S$  émettant sélectivement le mode  $S_1$  aux fréquences  $f = 2,90$  MHz [Fig. 5.6(a)] et

### 5.3. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE D'UN MIROIR PLAN FOCALISANT

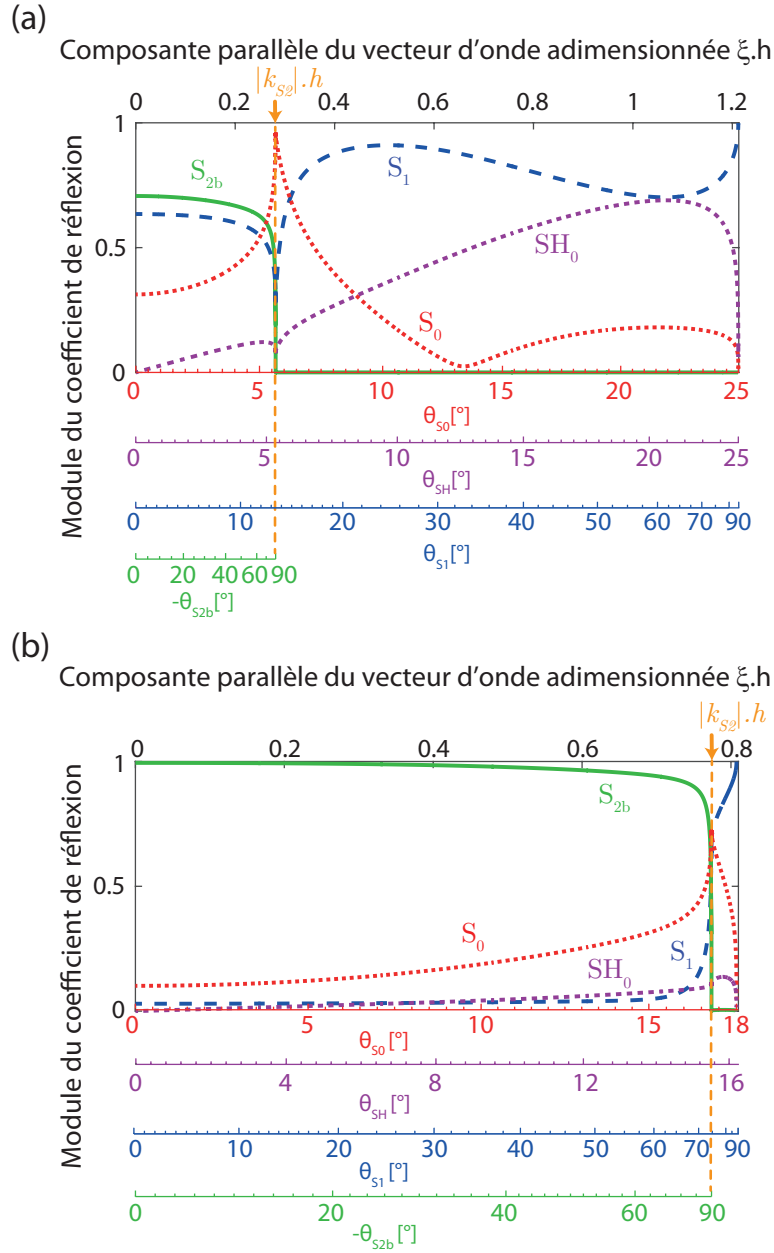


FIGURE 5.5 – Module des coefficients de réflexion en amplitude des modes de Lamb et du mode SH pour une onde  $S_1$  en incidence oblique en fonction de la composante parallèle adimensionnée du vecteur d'onde  $\xi \cdot h$  à (a)  $f = 3,00$  MHz et (b)  $f = 2,87$  MHz  $\sim f_{ZGV}$ . Les angles d'incidence et de réflexion correspondant sont également indiqués.

$f = 3,00$  MHz [Fig. 5.6(b)]. L'ensemble des rayons réfléchis dans le mode  $S_{2b}$  croisent l'axe principal aux distances  $d$  du bord de la plaque données par,

$$d = D \left| \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_{S_{2b}}} \right|. \quad (5.33)$$

À l'angle d'incidence critique, ( $\theta_{S_{2b}} = \pi/2$ ), l'intersection avec l'axe principal se produit directement sur le bord de la plaque ( $d = 0$ ). Dans la limite des petits angles, celle-ci

## CHAPITRE 5. RÉFLEXION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB

a lieu à une distance  $d_m$  donnée par,

$$d_m \simeq D \left| \frac{k_{S_{2b}}}{k_{S_1}} \right|, \quad (5.34)$$

où  $D$  est la distance de la source au bord de la plaque. De plus, l'énergie n'est pas déposée uniformément le long de l'axe principal, du fait de la non-linéarité de la relation entre les angles d'incidence  $\theta_i$  et de réflexion  $\theta_{S_{2b}}$  (cf. Eq. (5.33)). La dépendance du rapport  $d/D$  avec l'angle d'incidence  $\theta_i$  est représentée sur la figure 5.6(c) à trois fréquences différentes. La concavité des courbes indique que la densité de rayons augmente progressivement sur l'axe principal lorsque l'angle d'incidence diminue. La plus grande partie de l'énergie réfléchi est ainsi focalisée à une distance  $d_m$  du bord de la plaque. Ceci est d'autant plus vrai que l'on s'approche de la fréquence  $f_{ZGV}$ .

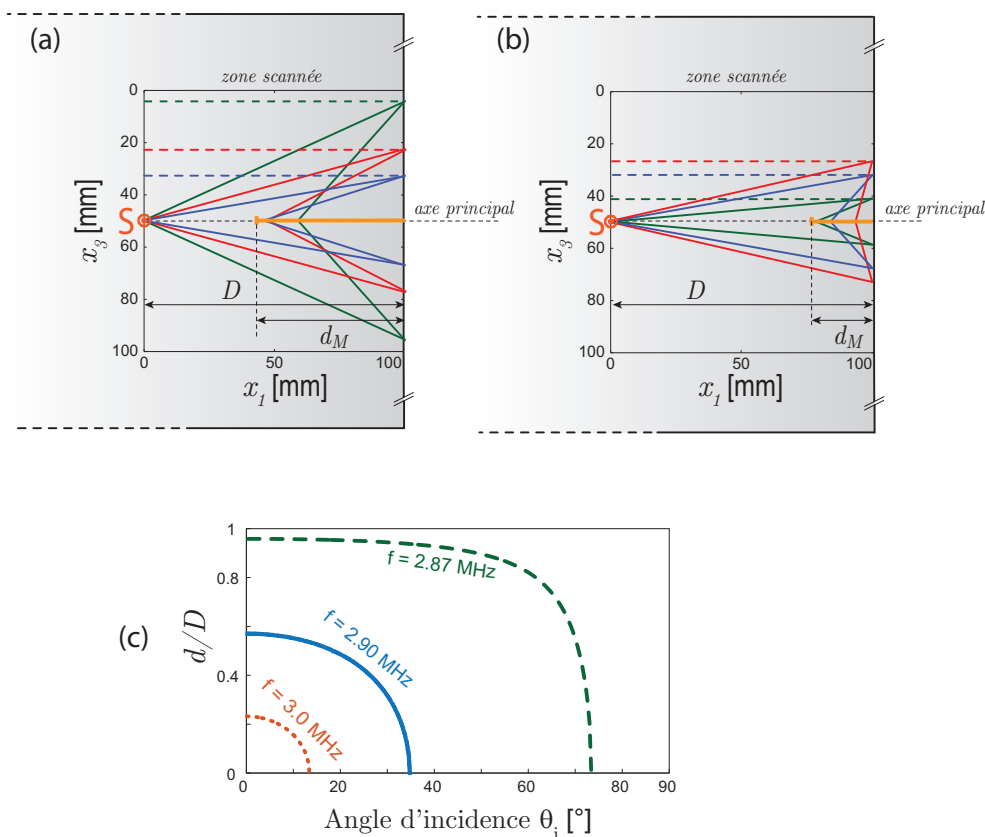


FIGURE 5.6 – Réflexion négative d'un mode  $S_1$  incident par le bord libre d'une plaque d'épaisseur  $2h = 1$  mm à (a)  $f = 2,90$  MHz et (b)  $f = 3,00$  MHz. Les rayons correspondant au mode  $S_{2b}$  réfléchi croisent l'axe principal dans le segment compris entre le bord de la plaque et le point situé à une distance  $d_M$  du bord libre de la plaque (cf. Eq. 5.34). (c) Dépendance du rapport  $d/D$  avec l'angle d'incidence du mode  $S_1$  aux fréquences  $f = 2,87$  MHz  $\sim f_{ZGV}$  (courbe verte pointillée),  $f = 2,90$  MHz (courbe bleu) et  $f = 3,00$  MHz (points rouges).

### Méthodes expérimentales

De façon à mettre en évidence la focalisation induite par la réflexion sur le bord de la plaque, le mode  $S_1$  doit être généré aussi sélectivement que possible. Expérimentalement, cette opération peut être réalisée au moyen d'un réseau de 64 transducteurs



### 5.3. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE D'UN MIROIR PLAN FOCALISANT

placé à une distance  $D = 10$  cm du bord libre, comme illustré sur la figure 5.7. La procédure de génération sélective est décrite plus en détail dans l'annexe 5.A.2 (p. 144). Les dimensions de la plaque sont choisies de façon à ce que seul le bord situé en face du réseau de transducteurs n'engendre de réflexion durant le temps de l'expérience. Le déplacement normal au plan de la plaque est mesuré dans la zone située entre le réseau de transducteurs et le bord de la plaque grâce à un interféromètre hétérodyne. La mesure est faite sur une grille de points recouvrant la surface de la plaque sur une zone de  $10 \times 10$  cm<sup>2</sup> avec un pas de 0,5 mm. Les signaux mesurés par l'interféromètre sont ensuite transmis à un oscilloscope puis à un ordinateur. Une TFD spatio-temporelle est alors appliquée à l'ensemble des signaux sur la bande de fréquence temporelle de 2,90 à 3,10 MHz, pour les nombres d'ondes allant de  $-4$  à  $4$  mm<sup>-1</sup> de façon à isoler les contributions des modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  [Fig. 5.4(a)]. La courbe de dispersion expérimentale est ensuite obtenue par intégration angulaire dans le plan de Fourier à chaque fréquence.

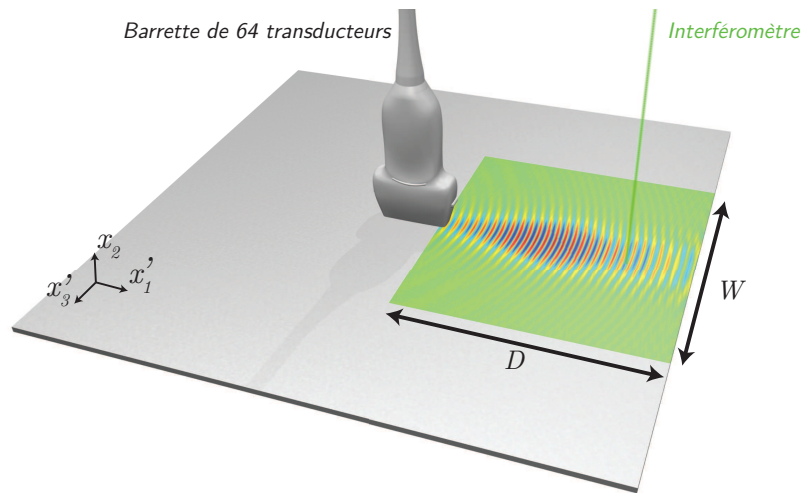


FIGURE 5.7 – Configuration expérimentale. Le mode  $S_1$  est généré sélectivement dans la plaque de Duralumin d'épaisseur  $2h = 1$  mm par un réseau de 64 transducteurs. La composante du champ de déplacement dans la direction normale à la plaque est mesurée à l'aide d'un interféromètre hétérodyne sur une grille de point recouvrant une surface de  $10 \times 10$  cm<sup>2</sup> sur la surface de la plaque. Le pas de grille est de 0,5 mm.

#### Résultats expérimentaux

**Approche monochromatique** Afin de caractériser le champ émis par le réseau de transducteurs, une première courbe de dispersion est calculée en considérant les 70 premières  $\mu$ s du signal, de façon à exclure les échos engendrés par la réflexion sur le bord libre. La courbe de dispersion, présentée sur la figure 5.8(a) indique que le mode  $S_1$  est effectivement fortement excité, à l'inverse du mode  $S_{2b}$ . Il apparaît également que le mode anti-symétrique  $A_1$  est généré significativement. Toutefois, la symétrie du problème garantit le découplage entre les modes symétriques et anti-symétriques. L'excitation de ce mode n'affecte donc en rien l'analyse du problème de réflexion lié aux modes symétriques. La dépendance angulaire de la génération du mode  $S_1$  peut être évaluée à chaque fréquence par la TFD spatiale. La figure 5.8(b) met ainsi en lumière l'anisotropie et les inhomogénéités angulaires de la génération à la fréquence

## CHAPITRE 5. RÉFLEXION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB

$f = 3,00$  MHz. Cet effet peut être attribué à la taille finie de la source ainsi qu'au couplage imparfait entre le réseau de transducteurs et la surface de la plaque. Toutefois, la gamme angulaire excitée est suffisante pour atteindre l'angle critique  $\theta_c$  de façon à obtenir une réflexion du mode  $S_{2b}$  sur l'ensemble du spectre angulaire.

La figure 5.8(c) présente la courbe de dispersion calculée sur une plage temporelle allant de 0 à 200  $\mu\text{s}$ , choisie de façon à inclure l'onde réfléchi par le bord. Comme prévu théoriquement, une large partie du mode  $S_1$  incident est réfléchi négativement du fait de sa conversion dans le mode  $S_{2b}$  sur le bord libre. On retrouve le caractère *rétrograde* du mode  $S_{2b}$  réfléchi. Bien que son énergie se propage dans le sens des  $x_1$  décroissants, il est associé à un nombre d'onde  $k$  positif. L'analyse dans le plan de Fourier à la fréquence  $f = 3,00$  MHz [Fig. 5.8(d)] illustre la large distribution angulaire de l'onde  $S_{2b}$  réfléchi, indispensable pour obtenir une focalisation satisfaisante.

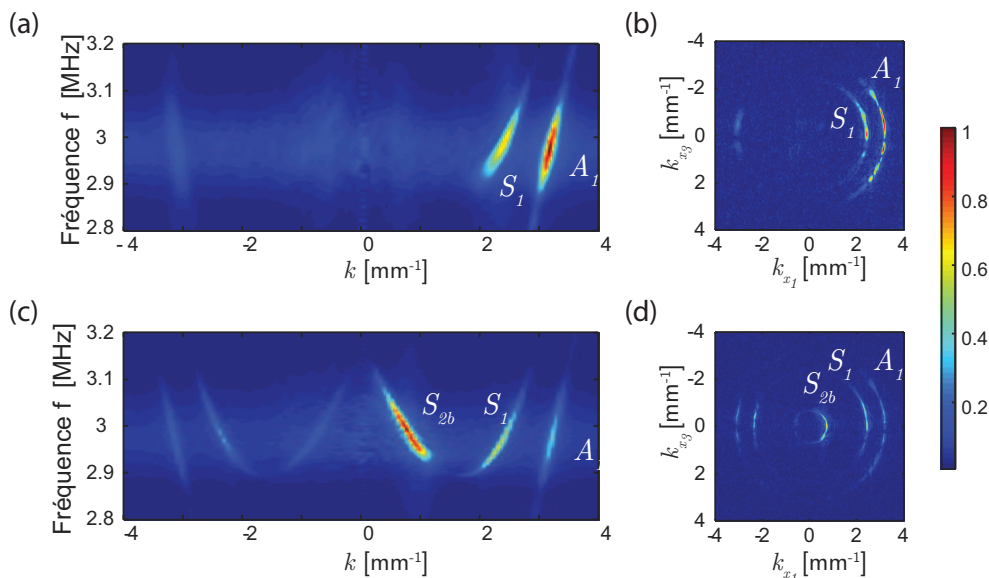


FIGURE 5.8 – (a) Courbes de dispersion expérimentales, obtenue à partir de signaux tronqués temporellement avant la réflexion sur le bord libre de la plaque. Le mode  $S_1$  est bien généré préférentiellement, tout comme le mode antisymétrique  $A_1$ . (b) Représentation du champ incident dans le plan de Fourier spatial à la fréquence  $f = 3,00$  MHz. (c) Courbes de dispersion expérimentales, obtenues à partir de signaux incluant le champ réfléchi. (d) Représentation du champ correspondant dans le plan de Fourier à la fréquence  $f = 3,00$  MHz.

Ce dispositif permet de contrôler la distance de focalisation. Pour le mettre en évidence, le champ correspondant au mode  $S_{2b}$  est extrait en utilisant un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est choisie telle que  $k_c < k_{S_1}$ . Les figures 5.9 (a)–(d) représentent le champ réfléchi à différentes fréquences. La position de la source étant fixée, la distance du bord de la plaque à la position de la focalisation est gouvernée par le rapport  $|k_{S_1}| / |k_{S_{2b}}|$  (cf. Eq. (5.34)). Dès lors que ce rapport augmente (c'est-à-dire quand la fréquence augmente), le point focal se rapproche du bord de la plaque. Dans la limite  $\lambda_{S_{2b}} \rightarrow \infty$  (c.-à-d. près de sa fréquence de coupure), la focalisation a lieu directement sur le bord de la plaque. Plus généralement, la figure 5.8 montre comment un dispositif aussi simple que le bord libre d'une plaque peut être utilisé comme un miroir plan focalisant dont la distance focale varie avec la fréquence.

### 5.3. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE D'UN MIROIR PLAN FOCALISANT

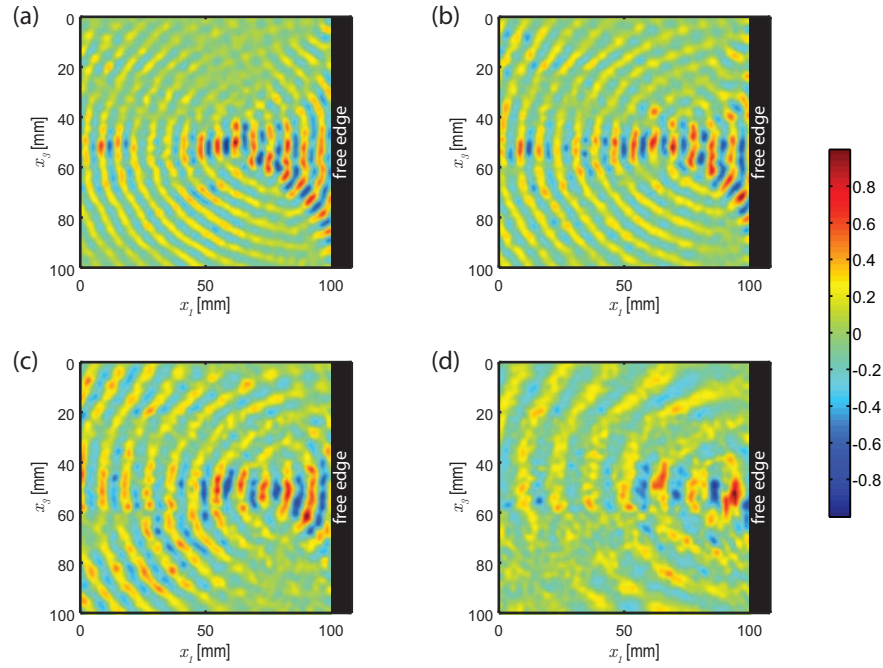


FIGURE 5.9 – Réflexion négative du mode  $S_1$  : champ réfléchi correspondant au mode  $S_{2b}$  aux fréquences  $f = 2,95$  MHz (a),  $f = 2,97$  MHz (b),  $f = 3,00$  MHz (c) et  $f = 3,05$  MHz (d). La distance de focalisation peut être contrôlée en changeant la fréquence de façon à modifier le rapport entre les nombres d'ondes incidents ( $k_{S_1}$ ) et réfléchis ( $k_{S_{2b}}$ ). La position de la barrette de transducteurs est telle que représentée sur la figure 5.7, c'est-à-dire à mi-hauteur et à gauche de la zone scannée.

**Analyse temporelle** La largeur fréquentielle de la branche excitée, couplée à la mesure résolue en temps de l'amplitude et de la phase du champ, autorisent l'analyse du phénomène dans le domaine temporel. Pour ce faire, le champ correspondant au mode  $S_{2b}$  est extrait à chaque fréquence. L'ensemble forme une matrice  $\mathbf{k}(f)$ . Le champ spatio-temporel  $\mathbf{k}(t)$  est ensuite obtenu par une TFD inverse sur la bande de fréquence comprise entre 2,8 et 3,2 MHz. La propagation spatio-temporelle du champ réfléchi ainsi mise en évidence est représentée sur la figure 5.10 à différents temps. La participation des différentes composantes fréquentielles, chacune associée à une distance focale donnée, se traduit par un dépôt de l'énergie sur l'axe principal à différentes profondeurs.

#### 5.3.2 Miroir plan focalisant en aval

Le principe du miroir plan focalisant est maintenant étudié pour un mode de Lamb  $S_{2b}$  incident. Eu égard aux résultats présentés sur la figure 5.5, le mode  $S_{2b}$  incident est supposé se convertir essentiellement dans le mode  $S_1$  lors de la réflexion sur le bord libre de la plaque. Le principe du dispositif est décrit sur la figure 5.11 en considérant le produit fréquence - épaisseur  $f \times (2h) = 2,86$  MHz.mm pour une plaque d'épaisseur  $2h = 1,5$  mm. Contrairement au cas précédent, puisque  $|k_{S_{2b}}| < |k_{S_1}|$ , l'onde est focalisée en aval de la source. En effet, dans la limite des petits angles, la focalisation a lieu à une distance minimale  $d_m$  telle que donnée par l'équation (5.34). À l'inverse, dans la limite  $\theta \rightarrow \pi/2$ , celle-ci se produit à une distance infinie de la plaque. Toutefois, comme dans la sous-partie 5.3.1 (p. 126), la non linéarité de la relation entre  $\theta_i$  et  $\theta_{S_1}$  permet de conclure que la plupart de l'énergie est déposée sur l'axe principal à une

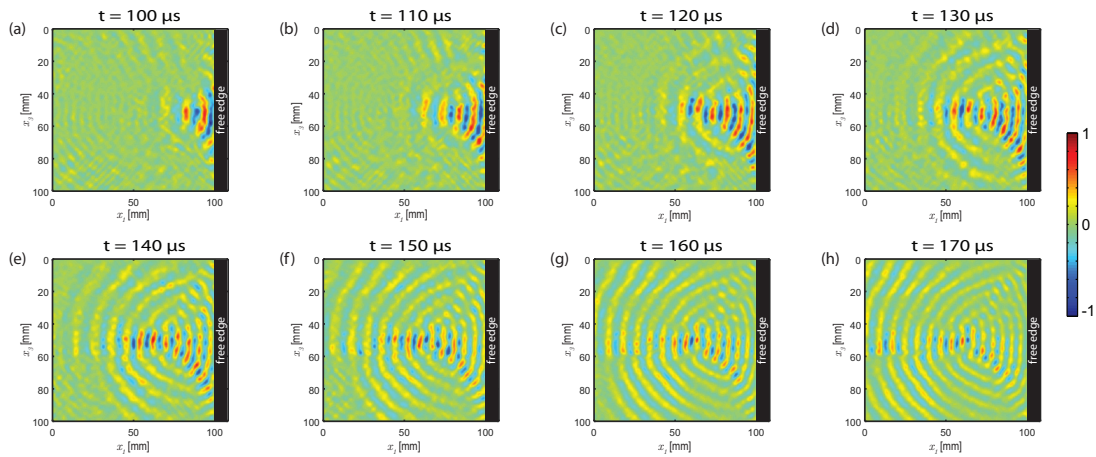


FIGURE 5.10 – Réflexion négative du mode  $S_1$  : représentation à différents instants du champ spatio-temporel correspondant au champ  $S_{2b}$  réfléchi.

distance  $d_m$  du bord de la plaque.

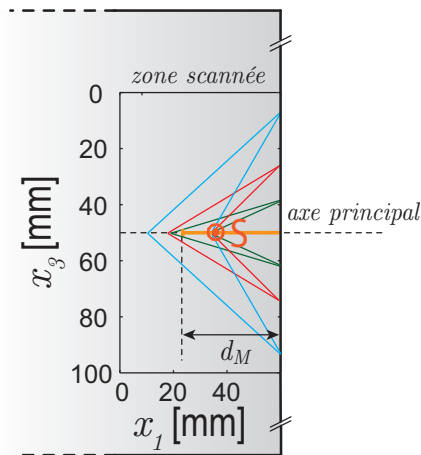


FIGURE 5.11 – Réflexion négative d'un mode  $S_{2b}$  incident par le bord libre d'une plaque d'épaisseur  $2h = 1,5$  mm au produit fréquence - épaisseur  $f \times (2h) = 2,86$  MHz.mm.

### Méthodes expérimentales

La focalisation de l'onde réfléchi étant attendue en aval de la source, la génération sélective du mode  $S_{2b}$  ne peut plus être assurée par un réseau de transducteurs, celui-ci perturbant le champ réfléchi. Le signal est donc émis par un transducteur piézoélectrique de 7 mm de diamètre, placé à une distance  $D = 30$  mm du bord libre d'une plaque de Duralumin d'épaisseur  $2h = 1,5$  mm. Un *chirp* à rampe de fréquence linéaire (c.-à-d. un signal pseudo-périodique modulé en fréquence) de durée  $10 \mu s$ , balayant la gamme de fréquence de 1,8 à 2,0 MHz, est envoyé au transducteur. Comme précédemment, la détection des vibrations dans la direction orthogonale au plan de la plaque est assurée par un interféromètre hétérodyne sur l'ensemble des points d'une grille de  $10 \times 6$  cm<sup>2</sup> avec un pas de 0,5 mm. À nouveau, les dimensions de la plaque sont choisies de façon à ce que seule la réflexion sur le bord libre le plus proche n'intervienne dans le temps de l'expérience.

## 5.4. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE DE LA CONJUGAISON DE PHASE PASSIVE

### Mise en œuvre expérimentale d'un miroir plan focalisant

Afin de caractériser la participation des différents modes, une TFD spatiale du champ enregistré est calculée à la fréquence  $f \times (2h) = 2,86 \text{ MHz.mm}$  sur la fenêtre temporelle  $[0 - 200] \mu\text{s}$  [Fig. 5.12]. Dans le plan de Fourier, le cercle intérieur représente la génération cylindrique du mode  $S_{2b}$ , alors que le mode  $S_1$  réfléchi n'apparaît que sur une portion du cercle extérieur de rayon  $k_{S_1}$ , pour des valeurs de  $k_{x_1}$  négatives. Cette observation indique que ce mode est uniquement issu de la réflexion de l'onde incidente sur le bord libre de la plaque. La génération sélective du mode  $S_{2b}$  s'explique par l'accord entre la longueur d'onde associée et le diamètre du transducteur utilisé.

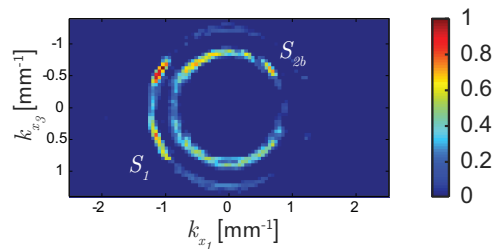


FIGURE 5.12 – Spectre de Fourier spatial du champ mesuré à  $f \times (2h) = 2,86 \text{ MHz.mm}$ . Le mode  $S_{2b}$ , généré sélectivement (cercle intérieur de rayon  $|k_{S_{2b}}|$ ), est converti sur le bord libre dans le mode  $S_1$  (arc de cercle de rayon  $|k_{S_1}| > |k_{S_{2b}}|$ ).

Contrairement aux résultats de la partie précédente, puisque  $|k_{S_{2b}}| < |k_{S_1}|$ , la réflexion est limitée angulairement à l'angle critique  $\theta_c = \arcsin(|k_{S_{2b}}/k_{S_1}|)$ , comme l'atteste la répartition de l'énergie correspondant au mode  $S_1$  réfléchi sur un arc de cercle dans le plan de Fourier [Fig. 5.12]. Le champ correspondant est ensuite étudié dans les figures 5.13(a) (a)–(c). La figure 5.13(a) représente le champ résultant de la superposition du mode  $S_{2b}$ , *rétrograde*, généré par le transducteur et du mode  $S_1$ , *prograde*, réfléchi par le bord libre de la plaque. De façon à simplifier l'interprétation des données, la contribution associée à chacun des modes est ensuite isolée par filtrage spatial dans le plan de Fourier. La figure 5.13(b) représente le mode  $S_{2b}$  incident, soulignant le caractère isotrope de l'excitation, ce qui est en accord avec sa distribution circulaire dans le plan de Fourier [Fig. 5.12]. L'onde réfléchie, représentée sur la figure 5.13(c), est focalisée en aval de la source, c.-à-d. à une distance  $d_m$  supérieure à  $D$ , comme prévu par l'équation (5.34). De plus, la réflexion étant limitée à la plage angulaire  $|\theta| \leq \theta_c$ , l'onde est focalisée moins efficacement qu'elle ne l'était dans le cas du mode  $S_1$  incident [cf. sous-partie 5.3.1, p. 129]. On note également que le champ réfléchi est perturbé par la présence du transducteur à la surface de la plaque dont la position est représentée par une ligne noire pointillée sur les figures 5.13 (a)–(c). Enfin, alors que dans l'expérience précédente, tous les rayons réfléchis étaient associés à des longueurs de propagation finies [Fig. 5.6], celle-ci met en jeu des trajets de longueurs infinies dans la limite  $\theta_i \rightarrow \pi/2$  [Fig. 5.11]. Ces-derniers ne peuvent donc pas être collectés dans le temps de l'expérience.

### 5.4 Démonstration expérimentale de la conjugaison de phase passive

Comme mis en évidence dans la section 5.2.3 (p. 124), la conversion entre les modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  tend à être parfaite au voisinage du point ZGV. De plus, étant donné que

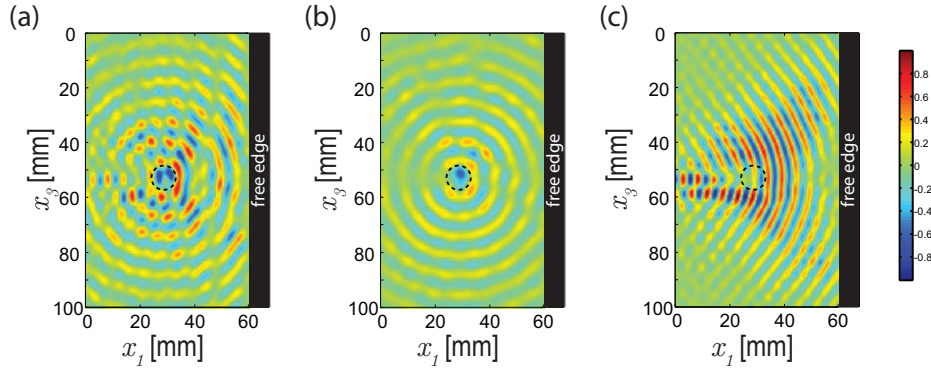


FIGURE 5.13 – a) Champ total, résultant de la superposition du mode  $S_{2b}$ , *rétrograde*, généré par le transducteur et du mode  $S_1$ , *prograde*, issu de la conversion du mode incident sur le bord libre de la plaque. (b). Champ filtré spatialement, correspondant au mode  $S_{2b}$  *rétrograde* généré par le transducteur. (c) Champ filtré spatialement correspondant au mode  $S_1$  *prograde* issu de la conversion du mode  $S_{2b}$  incident sur le bord libre de la plaque.

$k_{S_{2b}} \simeq k_{S_1}$ , l'onde est alors réfléchi négativement dans la direction de la source : le bord libre de la plaque se comporte comme un miroir à conjugaison de phase au voisinage de la résonance ZGV.

L'objectif de cette dernière partie est d'exploiter cette propriété de façon à apporter une démonstration expérimentale des différents dispositifs présentés dans le chapitre précédent [cf. sous-partie 4.2.2, p. 102]. Après avoir vérifié qu'un simple bord de plaque pouvait constituer un conjugueur de phase passif, nous examinerons le phénomène de réflexion négative dans une cavité et à travers un milieu diffusant.

#### 5.4.1 Sur le bord libre d'une plaque élastique

Cette première expérience porte sur l'analogie entre la conjugaison de phase et la réflexion négative. Pour l'étudier, nous reprenons la configuration expérimentale utilisée dans la sous-partie précédente (cf. p. 133). Une onde *cylindrique* est ainsi excitée au produit fréquence - épaisseur  $f \times (2h) = 2,85 \text{ MHz.mm}$ , que nous considérons comme étant le point ZGV. Une TFD spatiale est ensuite calculée sur les 200 premières  $\mu\text{s}$  du signal enregistré, de façon à observer le signal réfléchi sur le bord libre [Fig. 5.14(a)]. On distingue alors deux cercles dans le plan de Fourier, associés à des valeurs de  $k$  très proches, correspondant au modes  $S_1$  (cercle extérieur), *prograde*, et au mode  $S_{2b}$  (cercle intérieur), *rétrograde*. Une TFD inverse permet de visualiser le champ correspondant dans l'espace réel [Fig. 5.14(b)]. Contrairement aux champs mesurés au-dessus de la résonance ZGV [Fig. 5.14(a)], les fronts d'ondes cylindriques incidents et réfléchis sont indissociables, puisqu'ayant une courbure similaire.

Afin d'isoler la contribution du champ incident, l'intervalle de temps pris en compte pour le calcul de la TFD spatiale est donc réduit aux 50 premières  $\mu\text{s}$ , de façon à exclure la réflexion sur le bord libre de la plaque [Fig. 5.14(c)]. Étant donné que  $\lambda_{S_1} \simeq \lambda_{S_{2b}}$  au voisinage du point ZGV, la génération ne peut plus être sélective et les deux modes sont excités. Toutefois, il apparaît que le mode  $S_{2b}$  est excité préférentiellement et de façon plus isotrope que le mode  $S_1$ . Le champ incident est représenté dans l'espace réel sur la figure 5.14(d). Comme le laissait présager la distribution circulaire de l'énergie

## 5.4. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE DE LA CONJUGAISON DE PHASE PASSIVE

dans le plan de Fourier, l'onde incidente est générée de façon quasi-isotrope.

La contribution du champ réfléchi est isolée en calculant la TFD spatiale du champ sur l'intervalle de temps compris entre 100 et 200  $\mu\text{s}$  [Fig. 5.14(e)]. Cependant, étant données les vitesses de propagation très faibles mises en jeu dans cette expérience, les champs incidents et réfléchis ne peuvent pas être parfaitement séparés. Alors que la gamme angulaire marquée par le symbole ① (faibles angles de réflexion) correspond au champ réfléchi, celle marquée par le symbole ② (grands angles de réflexion) correspond au champ incident résiduel. La figure 5.14(e) montre que, comme prédit théoriquement, le mode  $S_{2b}$  incident est quasi-entièrement réfléchi dans le mode  $S_1$ . Ce dernier se propageant dans le sens des  $x_1$  décroissants, il est associé à des nombres d'ondes  $k_{x_1} < 0$ . Une TFD inverse du signal contenu dans la gamme angulaire marquée par le symbole ① dans la figure 5.14(e) permet de visualiser le champ réfléchi dans l'espace réel [Fig. 5.14(f)]. Comme attendu, le champ réfléchi est focalisé à la position initiale de la source, représentée par une ligne noire pointillée sur la figure 5.14(f) : le bord libre de la plaque agit donc bien comme un miroir à conjugaison de phase. On note que la présence du transducteur sur la surface de la plaque perturbe le champ réfléchi et nous empêche d'étudier les temps de propagation plus longs.

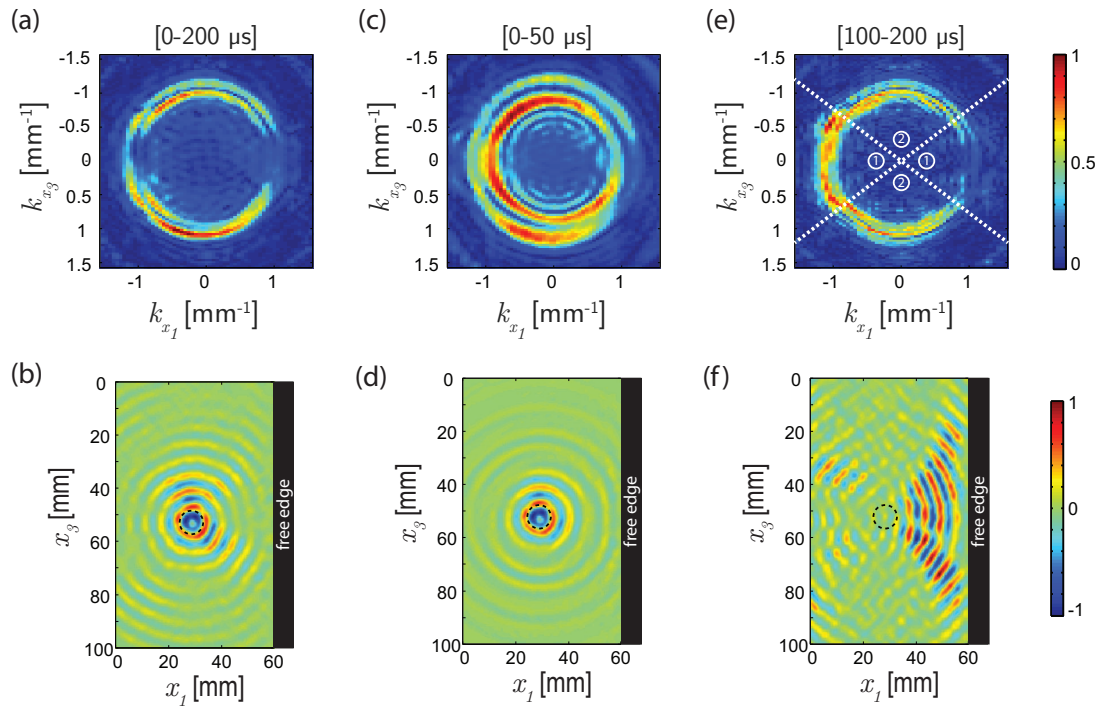


FIGURE 5.14 – Réflexion négative au voisinage du point ZGV. (a), (c), (e) Spectre de Fourier spatiale de l'ensemble du champ, calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \times (2h) = 2,85 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$  sur (a) les 200 premières  $\mu\text{s}$ , (c) les 50 premières  $\mu\text{s}$ , (e) sur la fenêtre temporelle  $[100 - 200] \mu\text{s}$ . (b), (d), (f) Champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (a), la figure (c) et sur la gamme angulaire numérotée ① sur la figure (e), respectivement.

On notera que le coefficient de réflexion  $r_{S_1|S_{2b}}$  implique une interférence destructive entre l'onde incidente et réfléchie négativement. Ainsi, une expérience purement

monochromatique au point ZGV aboutirait à un champ nul en tout point. On observe d'ailleurs cet effet sur la figure 5.14(a). Le champ tend à s'annuler au voisinage de  $k_{x_3} \sim 0$ . Toutefois, grâce à la résolution temporelle de nos mesures, il est possible de séparer les contributions de l'onde réfléchie et de l'onde incidente [Fig. 5.14(b)].

Cette première expérience nous a permis de mettre en évidence la possibilité d'utiliser le bord libre d'une plaque élastique comme un miroir à conjugaison de phase passif au voisinage de la résonance ZGV. Nous allons maintenant montrer comment tirer profit du phénomène dans des géométries plus complexes : une cavité, puis un milieu diffusant.

### 5.4.2 Sur les parois d'une cavité

L'objectif de cette sous-partie est d'étudier expérimentalement le phénomène de réflexion négative au sein d'une cavité élastique. Le dispositif expérimental utilisé à cette fin est représenté sur la figure 5.15. Comme précédemment, la génération de l'onde au voisinage du point ZGV est assurée par un transducteur piézoélectrique de 7 mm de diamètre, collé sur la cavité constituée dans une plaque de Duralumin d'épaisseur  $2h = 1,5$  mm. Un *chirp* à rampe de fréquence linéaire de durée  $10 \mu\text{s}$ , balayant la gamme de fréquence de 1,8 à 2,0 MHz est envoyé au transducteur. Là encore, la détection des vibrations normales à la plaque est assurée par un interféromètre hétérodyne sur l'ensemble des points d'une grille de  $10 \times 6 \text{ cm}^2$ , répartis sur l'ensemble de la plaque avec un pas  $\Delta x = 1 \text{ mm}$ .

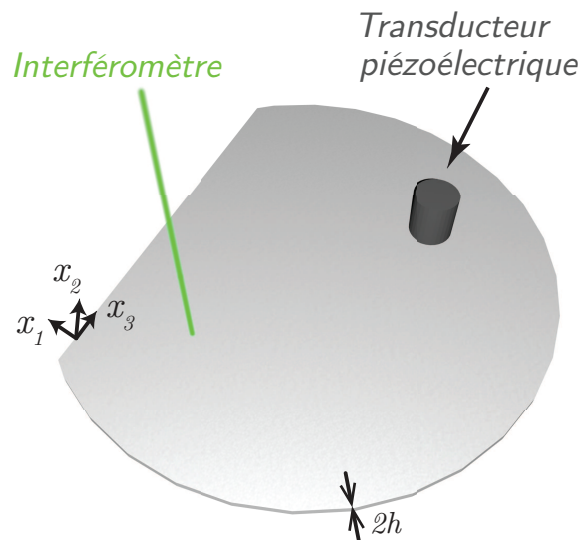


FIGURE 5.15 – Configuration expérimentale. Une onde incidente circulaire est générée à l'aide d'un transducteur piézoélectrique de 7 mm de diamètre collé sur une plaque de Duralumin d'épaisseur  $2h = 1,5$  mm. La composante du champ de déplacement normal est mesurée à l'aide d'un interféromètre hétérodyne, sur une grille de pas  $\Delta x = 1 \text{ mm}$ , recouvrant l'ensemble de la cavité.



## 5.4. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE DE LA CONJUGAISON DE PHASE PASSIVE

Afin de se donner un point de comparaison, l'expérience est réalisée dans un premier temps au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2.89$  MHz.mm, c'est-à-dire au-dessus du point ZGV. De façon à isoler la contribution de l'onde incidente, une TFD spatio-temporelle du champ mesuré est d'abord calculée sur les 30 premières  $\mu\text{s}$  du signal [Fig. 5.16(a)], excluant ainsi toute réflexion. Comme l'atteste la présence d'un seul cercle dans l'espace de Fourier, le mode  $S_{2b}$  est excité préférentiellement, de manière isotrope. Une TFD inverse fournit une représentation du champ correspondant dans l'espace réel [Fig. 5.16(b)], où l'on observe des fronts d'onde incidents cylindriques et quasi-isotropes. Une TFD spatio-temporelle du champ mesuré est ensuite calculée sur les 500 premières  $\mu\text{s}$  du signal enregistré de façon à prendre en compte les effets des multiples réflexions sur les parois de la cavité. Comme l'illustre la figure 5.16(c), cette représentation met en évidence la présence d'un deuxième cercle de rayon  $k_{S_1}$ , signature de la conversion entre les modes  $S_{2b}$  et  $S_1$  sur les bords libres de la plaque. Dans l'espace réel, les interférences entre le champ incident et les différents chemins associés aux réflexions multiples sur les parois de la cavité engendrent un champ aléatoire [Fig. 5.16(d)].

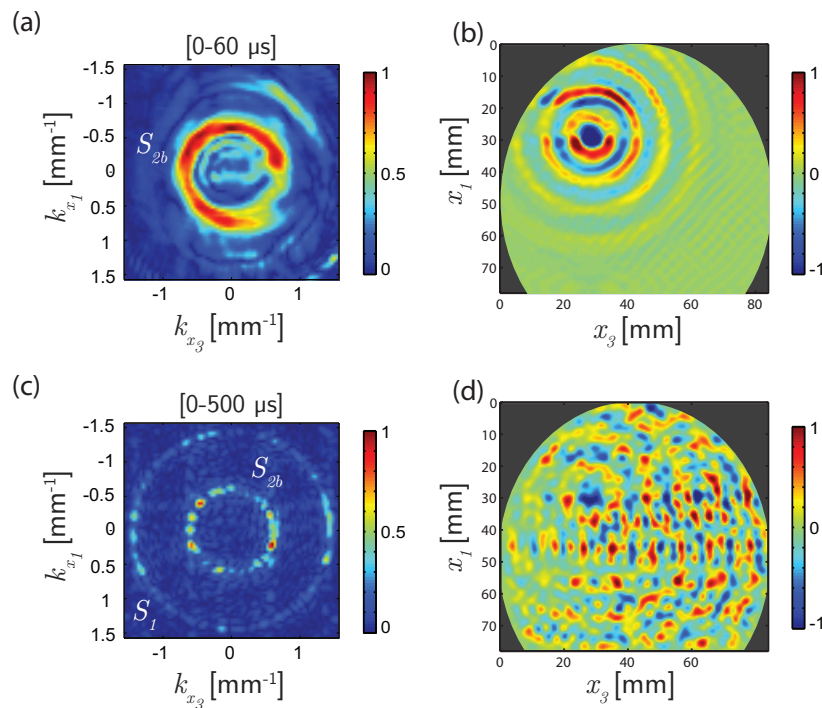


FIGURE 5.16 – Champ mesuré dans la cavité loin du point ZGV. (a) Spectre de Fourier spatial de l'ensemble du champ, calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2.89$  MHz.mm sur les 30 premières  $\mu\text{s}$  de signal enregistré, de façon à isoler l'onde directe générée par le transducteur. (b) Champ incident obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (a). (c) Spectre de Fourier spatial de l'ensemble du champ, calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2.89$  MHz.mm sur les 500 premières  $\mu\text{s}$  de signal enregistré, de façon à prendre en compte le champ réfléchi sur les parois de la cavité. (d) Champ total dans la cavité obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (c).

Si l'on se place maintenant au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2.86$  MHz.mm, c'est-à-dire au voisinage du point ZGV, le comportement de la cavité élastique est

## CHAPITRE 5. RÉFLEXION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB

tout autre. À nouveau, l'émission peut être caractérisée à l'aide d'une transformée de Fourier, calculée sur les 100 premières  $\mu\text{s}$  du signal enregistré [Fig. 5.17(a)]. Comme dans la sous-partie précédente, il est illusoire de prétendre à une émission sélective au voisinage du point ZGV étant donné la proximité des longueurs d'ondes mises en jeu ( $\lambda_{S_1} \simeq \lambda_{S_{2b}}$ ). Toutefois, ce spectre ainsi que la représentation du champ dans l'espace réel, déduite par TFD inverse et représentée sur la figure 5.17(b), mettent à nouveau en évidence la quasi-isotropie du champ généré. De façon à prendre en compte les réflexions sur les parois de la cavité, une transformée de Fourier spatiale est maintenant calculée sur les 500 premières  $\mu\text{s}$  de signal enregistré [Fig. 5.17(c)]. Du fait de la conversion quasi-totale entre les modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  (c.-à-d.,  $r_{S_1|S_{2b}} = r_{S_{2b}|S_1} \sim -1$ ), l'énergie reste répartie entre les deux cercles de rayons  $k_{S_1}$  et  $k_{S_{2b}}$ , quasi-confondus. Le champ associé, présenté sur la figure 5.17(d), confirme l'analogie avec une cavité à conjugaison de phase passive. Pour chaque onde incidente avec un angle  $\theta_i$ , la conversion de modes  $S_1 \leftrightarrow S_{2b}$  à l'interface s'accompagne d'une réflexion négative avec un angle de réflexion  $\theta_r = -\theta_i$ . De plus, l'évolution de la phase après réflexion se faisant *à rebours*, non seulement l'onde réfléchie converge vers la position de la source initiale, mais en plus, les champs incident et réfléchi sont en tout point identiques. Le champ mesuré sur la figure 5.17(d) est donc analogue à celui qui serait obtenu en espace libre ou dans une cavité à conjugaison de phase passive : des fronts d'onde cylindriques centrés sur la position de la source.

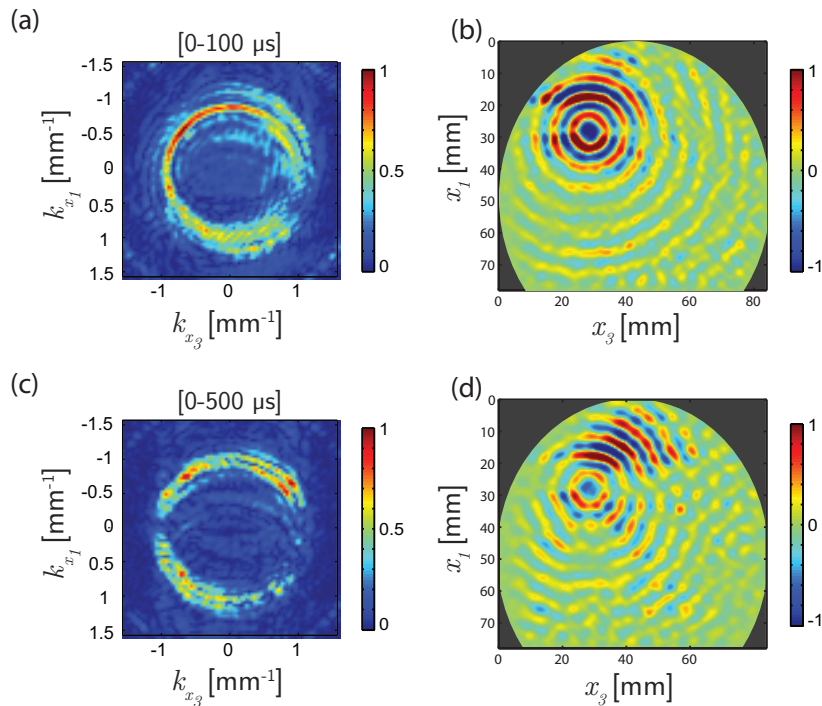


FIGURE 5.17 – Réflexion négative sur les parois d'une cavité élastique au voisinage du point ZGV. (a), (c) Spectre de Fourier spatial de l'ensemble du champ, calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2,86 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$  sur (a) les 100 et (c) les 500 premières  $\mu\text{s}$  de signal enregistré. (b), (d) Champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur les figures (a) et (c), respectivement.

## 5.4. DÉMONSTRATION EXPÉRIMENTALE DE LA CONJUGAISON DE PHASE PASSIVE

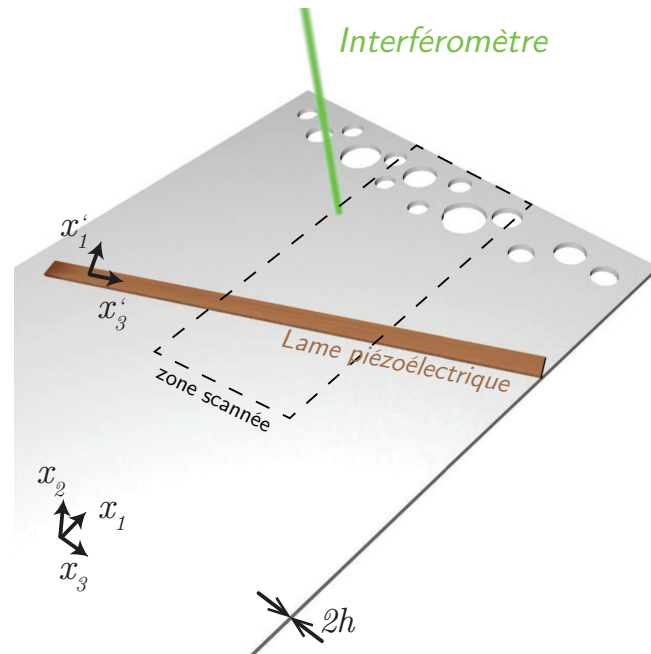


FIGURE 5.18 – Configuration expérimentale. Une onde plane est générée à l’aide d’une lame constituée dans une céramique piézoélectrique collée sur plaque de Duralumin d’épaisseur  $2h = 1,5$  mm, sur une surface de longueur 100 mm et de largeur 5 mm  $\sim \lambda_{ZGV}/2$ , de façon à exciter préférentiellement les modes autour du point à vitesse de groupe nulle. La composante du champ de déplacement dans la direction orthogonale au plan de la plaque est mesurée à l’aide d’un interféromètre hétérodyne, sur une grille de points de pas  $\Delta x = 1$  mm et de dimension  $12 \times 5$  cm<sup>2</sup>.

### 5.4.3 Sur un nuage de diffuseur

Après l’expérience menée dans une cavité chaotique, nous allons ici mettre en évidence les effets de la conjugaison de phase passive en considérant le cas de la réflexion sur un nuage de diffuseurs, autre configuration pour laquelle le champ réfléchi présente un aspect aléatoire. Pour cette démonstration, un nuage de diffuseurs est créé sous la forme d’une série de trous de diamètres  $\phi$  variables, percés à proximité de l’un des bords d’une plaque de Duralumin d’épaisseur  $2h = 2$  mm. Les diamètres sont choisis dans l’intervalle  $\phi/\lambda \in [0,25 - 0,6]$ , *i.e.* dans le régime de diffusion de Mie. Le dispositif expérimental utilisé est présenté sur la figure 5.18. Dans cette configuration, nous avons choisi de générer des fronts d’ondes plan au moyen d’une lame de céramique piézoélectrique de longueur 100 mm (dans la direction  $\mathbf{x}'_3$ ), de largeur 5 mm (dans la direction  $\mathbf{x}'_1$ ) et d’épaisseur 1 mm (dans la direction  $\mathbf{x}_2$ ), collée sur la plaque. La largeur de la lame piézoélectrique est de l’ordre de la demi longueur d’onde du point ZGV de façon à générer de manière efficace les modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  au voisinage de ce point. Par ailleurs, la lame est inclinée d’un angle d’environ  $25^\circ$  par rapport au bord libre le plus proche. De nouveau, l’excitation est assurée dans la bande de fréquence souhaitée à l’aide d’un *chirp* à rampe de fréquence linéaire de durée  $15 \mu\text{s}$ , balayant une gamme de fréquence de 1,3 à 1,5 MHz. Enfin, les vibrations dans la direction normale à la plaque sont de nouveau détectées à l’aide d’un interféromètre hétérodyne, sur une grille de points de pas  $\Delta x = 1$  mm et de dimension  $12 \times 5$  cm<sup>2</sup>. Comme dans la section 5.4.1 (p. 134), les dimensions de la plaque sont choisies de façon à ce que seul le bord situé en face de la lame piézoélectrique n’engendre de réflexion durant le temps de l’expérience.

Une première analyse est menée au-dessus du point ZGV, au produit fréquence - épaisseur  $f \times (2h) = 2,86 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$  ; d'abord dans l'espace de Fourier, grâce à une TFD spatiale calculée sur les 500 premières  $\mu\text{s}$  de l'ensemble des signaux mesurés puis dans l'espace réel, à partir d'une TFD inverse du spectre précédemment étudié. Dans le plan de Fourier [Fig. 5.19(a)], l'onde plane incidente correspond à l'intersection entre les cercles associés aux modes  $S_1$  et  $S_{2b}$  et la ligne représentée en pointillé blanc représentant la direction  $\mathbf{x}'_1$  normale à la lame piézoélectrique. Le champ réfléchi est au contraire réparti sur tout le spectre angulaire. En conséquence, le champ associé dans l'espace réel est chahuté [Fig. 5.19(b)], à tel point que l'on ne retrouve pas les fronts d'ondes plans.

Afin d'étudier ce dispositif au voisinage du point ZGV, une TFD spatiale est calculée à la fréquence  $f \times (2h) \simeq f_{ZGV} \times (2h) = 2,82 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$  [Fig. 5.19(c)]. Contrairement au cas précédent, on observe que l'ensemble du signal reste dans la direction  $\mathbf{x}'_1$ , correspondant à l'émission initiale, confirmant ainsi que la réflexion négative sur les diffuseurs et le bord de la plaque se fait avec un angle exactement opposé à l'angle d'incidence. Le champ correspondant dans l'espace réel est présenté sur la figure 5.19(d) et confirme cette observation. Dans cette configuration, c'est non seulement le bord libre de la plaque mais aussi l'ensemble des diffuseurs qui se comportent comme des miroirs à conjugaison de phase passive. Les champs incidents et réfléchis étant en tout point identiques, le champ obtenu a l'allure d'une onde plane. Pour un observateur extérieur, la réflexion négative masque la présence des diffuseurs.

Ces résultats démontrent expérimentalement les propriétés de la réflexion négative des ondes de Lamb au voisinage du point ZGV. L'interface libre y joue le rôle de conjugué de phase passif. En étudiant ce phénomène dans des milieux complexes tels qu'une cavité réverbérante ou un milieu diffusant, nous montrons que cette propriété permet à l'onde réfléchie de conserver la cohérence spatiale de l'onde incidente. Pour un observateur extérieur, tout se passe comme s'il n'y avait pas d'interface libre : le bord de la cavité ou les diffuseurs sont masqués grâce au phénomène de réflexion négative.

### 5.5 Conclusions, perspectives

Ce chapitre porte sur l'étude du phénomène de réflexion négative des ondes de Lamb, d'un point de vue aussi bien théorique qu'expérimental. Au dessus du point ZGV, l'étude semi-analytique de l'interaction d'un mode de Lamb incident avec le bord libre d'une plaque met ainsi en évidence la bonne conversion, et sur une large gamme angulaire, entre chacun des modes impliqués dans la résonance ZGV. Ce résultat mène ensuite à la démonstration expérimentale des propriétés focalisantes qu'engendre la réflexion négative sur les bords libres d'une plaque. Enfin, en prolongeant l'étude au voisinage du point ZGV, nous montrons, que non seulement, théoriquement, la conversion étudiée y devient totale, mais qu'en plus, le bord de la plaque se comporte alors comme un miroir à conjugaison de phase passive. Après avoir vérifié expérimentalement cette prédiction, nous appliquons cette propriété avec succès dans le cas d'une cavité puis d'un nuage de diffuseurs. La réflexion négative génère un front d'onde réfléchi analogue à celui de l'onde incidente. Elle permet ainsi de masquer la présence d'un bord libre ou de diffuseurs au sein de la plaque.

Ces travaux ouvrent de nombreuses perspectives tant du point de vue applicatif

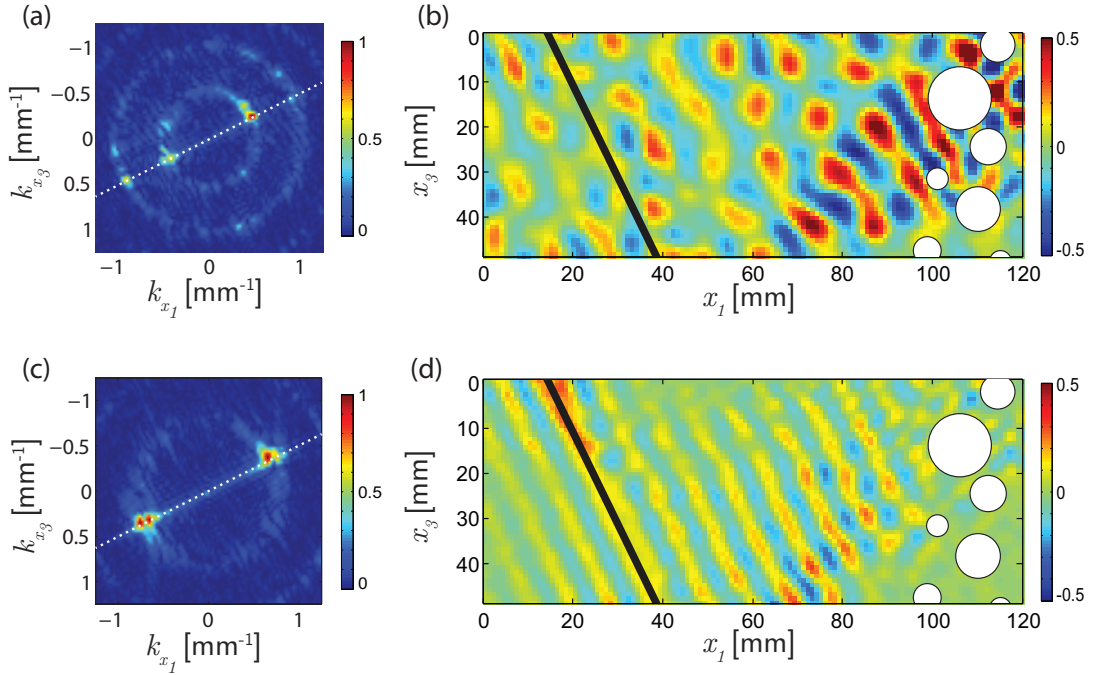


FIGURE 5.19 – Réflexion négative sur un nuage de diffuseurs. (a) Spectre de Fourier spatial calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2,86 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ , *i.e.* au dessus du point ZGV. (b) Représentation dans l'espace réel du champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (a). (c) Spectre de Fourier spatial de l'ensemble du champ, calculé au produit fréquence - épaisseur  $f \cdot (2h) = 2,82 \text{ MHz} \cdot \text{mm}$ , *i.e.* au voisinage du point ZGV. (d) Représentation dans l'espace réel du champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (c).

que du point de vue fondamental. Les propriétés mises en évidence dans ce chapitre offre des possibilités pour la manipulation des ondes de Lamb. Par exemple, dans le cadre du contrôle non destructif, la réflexion négative du mode  $S_1$  devrait permettre d'obtenir une augmentation du signal rétrodiffusé par d'éventuels défauts. Sur un autre plan, la grande sensibilité de la résonance ZGV [1] couplée au phénomène de conjugaison de phase passive est porteur de promesses et devrait mener au développement de capteurs acoustiques plus précis.

Un système aussi rudimentaire que le bord libre d'une plaque permet ainsi de mettre en évidence la réflexion négative des ondes de Lamb. Cependant, cette simplicité se fait au détriment d'une certaine souplesse. La réflexion dans un mode d'indice opposé s'accompagne d'une annulation de la vitesse de groupe. Par ailleurs, elle ne permet de masquer la présence de diffuseurs ou d'objets que dans une configuration de rétrodiffusion, par définition. Ces restrictions sont levées dans le cas de la réfraction négative des ondes de Lamb ; c'est le cadre du dernier chapitre de cette thèse.

## 5.A Annexes

### 5.A.1 Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion

La méthode numérique présentée dans cette annexe est adaptée de celle développée par Vincent Pagneux [9]. Afin de faciliter la résolution numérique du problème, ce dernier est adimensionné en normalisant d'une part les composantes du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  ainsi que les coordonnées  $x_i$  par  $h$  et, d'autre part, le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  par  $\mu$ . Les équations (5.5)-(5.6) et les conditions aux limites s'écrivent alors,

$$-\Omega^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.35)$$

$$\sigma_{ij} = (\gamma - 2) \text{Tr} [\boldsymbol{\epsilon}] \delta_{ij} + 2\epsilon_{ij}, \quad (5.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma} (x_2 = \pm 1) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad (5.37)$$

où  $\Omega = \omega h / c_T$  est la fréquence adimensionnée,  $\gamma = (\lambda + 2\mu) / \mu = c_L^2 / c_T^2$ , avec  $c_L$  et  $c_T$ , les vitesses des ondes de volume longitudinales et transversales, et  $\mathbf{n}_2$  la normale au plan  $(x_1, x_3)$ .

Les équations de l'élasticité (5.36) et (5.37) peuvent alors s'écrire

$$\partial_{x_1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{F} & 0 \\ \mathbf{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

où  $\mathbf{X} = (u_1, \sigma_{12})^T$ ,  $\mathbf{Y} = (-u_2, \sigma_{11})^T$ ,  $\mathbf{Z} = (u_3, \sigma_{13})^T$  et dans lesquelles  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont les opérateurs,

$$F = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\gamma}\right) & -\left(\frac{\gamma-2}{\gamma}\right) \partial_{x_2} \\ \left(\frac{\gamma-2}{\gamma}\right) \partial_{x_2} & -\left[\Omega^2 - 4\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \partial_{x_2^2}\right] \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

$$G = \begin{bmatrix} \Omega^2 & \partial_{x_2} \\ -\partial_{x_2} & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \Omega^2 - \partial_{x_2^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Les conditions aux limites de l'Eq. (5.37) peuvent être exprimées en fonction de  $\mathbf{Y}$  en écrivant,

$$\sigma_{12}(\mathbf{Y}) = \left(\frac{\gamma-2}{\gamma}\right) \sigma_{11} + 4\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \partial_{x_1} u_2. \quad (5.42)$$

Le problème est ainsi entièrement formulé en fonction des vecteurs  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{Z}$ .

Le problème est résolu numériquement en utilisant l'ensemble de fonctions *a* MATLAB *Differentiation Matrix Suite* développées par Weideman *et al.* [18]. Ces fonctions permettent la résolution d'équations différentielles ordinaires via des méthodes de collocation spectrales basées sur les polynômes de Tchebychev. Les équations sont discrétisées spatialement le long de l'axe  $x_2$ . N'importe quelle fonction  $q_N(x_2)$  définie sur le segment  $[-1, 1]$  peut ainsi être approximée comme  $q_N(x_2) = \sum_{k=1}^N \hat{q}_k T_k(x_2)$ , expression dans laquelle,  $\hat{q}_k = q(x_2^{(k)})$ , les fonctions  $T_k(x_2)$  représentent les polynômes de Tchebychev d'ordre  $k$  et où les points d'interpolation sont les points de Gauss-Lobatto,  $x_2^{(k)} = \cos(k\pi / (N-1))$ , pour  $k = 0, \dots, N-1$ . Les dérivées spatiales de  $q_N(x_2)$

dans la direction  $x_2$  peuvent alors être évaluées sur les points de collocation par une opération de multiplication matricielle avec les matrices de différentiation  $D_N$ . Afin de résoudre notre problème, les composantes du vecteur champ de déplacement et du tenseur des contraintes sont écrits sous la forme

$$u_i = \sum_{k=1}^N \hat{u}_i^{(k)} T_k(x_2), \quad (5.43)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^N \hat{\sigma}_{ij}^{(k)} T_k(x_2). \quad (5.44)$$

La prise en compte des conditions aux limites  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$  doit alors se faire attentivement. La condition d'annulation de la contrainte sur le bord libre,  $\hat{\sigma}_{12}(x_2 = \pm 1) = 0$  se traduit par la relation  $\hat{\sigma}_{12}^{(1)} = \hat{\sigma}_{12}^{(N)} = 0$ . Cette condition est alors prise en compte en écrivant  $\hat{\sigma}_{12}$  comme un vecteur de dimension  $N - 2$ . La condition aux limites  $\hat{\sigma}_{22}(x_2 = \pm 1)$  est traduite à partir de l'équation 5.42, en une relation directe entre  $\hat{\sigma}_{12}^{(i)}$  et  $\hat{u}_2^{(i)}$ , pour  $i = 1$  et  $i = N - 1$ ,  $\hat{\sigma}_{11}^{(i)} = -4[(\gamma - 1)/(\gamma - 2)]\mathbf{l}_i^T \hat{\mathbf{u}}_2$ , où  $\mathbf{l}_i$  est le vecteur contenu dans la  $i$ -ème ligne de la matrice de différentiation  $\mathbf{D}_1$ . Enfin, la condition d'annulation de la contrainte  $\sigma_{13}(x_2 = \pm 1) = 0$  peut être prise en compte à partir du calcul de la matrice de différentiation  $\tilde{\mathbf{D}}_2$  *ad hoc*, c'est-à-dire incorporant des conditions aux limites dites *de Robin* (cf. Ref. [18]). Cette discrétisation permet d'écrire les équations (5.43) et (5.44) sous la forme

$$\partial_{x_1} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\gamma}\right) \mathbf{I} & \mathbf{M}_1 \\ \left(\frac{\gamma-2}{\gamma}\right) \mathbf{D}_1 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y}, \quad (5.45)$$

$$\partial_{x_1} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Omega^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_1 \\ -\mathbf{D}_1 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X}, \quad (5.46)$$

$$\partial_{x_1} \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -(\Omega^2 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{D}}_2) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Z}, \quad (5.47)$$

avec

$$\mathbf{M}_1 = -\left(\frac{\gamma-2}{\gamma}\right) \mathbf{D}_1 - \left(\frac{4}{\gamma}\right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma-2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_N \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{M}_2 = -\Omega^2 \mathbf{I} - 4 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \mathbf{D}_2 + 4 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) [\mathbf{c}_1 \mathbf{l}_1^T + \mathbf{c}_N \mathbf{l}_N^T], \quad (5.49)$$

où  $\mathbf{c}_1$  (respectivement  $\mathbf{c}_N$ ) est la première (respectivement la dernière) colonne de la matrice de différentiation  $\mathbf{D}_1$  et où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Chaque matrice doit être comprise comme ayant les dimensions en accord avec les vecteurs qu'elle relie.

Soit un entier pair,  $N = 2N_e$ , le problème peut être réduit au problème symétrique (ou antisymétrique) en imposant la condition de parité adéquate aux composantes du champ de déplacement et du tenseur des contraintes. Par exemple, dans le cas du problème symétrique,  $u_1$ ,  $u_3$ ,  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{13}$  sont des fonctions paires alors que  $u_2$  et  $\sigma_{12}$  sont des fonctions impaires. La diagonalisation de ce système d'équations différentielles ordinaires fournit un ensemble de  $(6N_e - 2)$  valeurs propres et vecteurs propres associés aux  $4N_e - 2$  modes de Lamb ainsi qu'aux  $2N_e$  modes SH dont la moitié sont dirigés vers la droite et l'autre vers la gauche. Si l'on considère alors un mode de Lamb propagatif, dirigé vers la droite avec un angle  $\theta_i$  par rapport à la normale au bord de la plaque, il est possible de déterminer l'angle de réflexion  $\theta_n$  associé à chacun des

## CHAPITRE 5. RÉFLEXION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB

modes réfléchis, de nombre d'onde  $-k_n$ , dirigés vers la gauche (cf. Eq. (4.6)). Le champ de déplacement associé à chacun des modes réfléchis est alors déduit en multipliant le champ de déplacement et le tenseur des contraintes par la matrice de rotation comme décrit dans les équations (5.26) et (5.27). Soit les expressions

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 \cdot \cos(\theta) - u_3 \cdot \sin(\theta) \\ u_2 \\ u_1 \cdot \sin(\theta) + u_3 \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \cdot \cos^2(\theta) + \sigma_{33} \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \sigma_{13} \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \sigma_{12} \cdot \cos(\theta) - \sigma_{23} \cdot \sin(\theta) \\ (\sigma_{11} - \sigma_{33}) \cdot \cos(\theta) \sin(\theta) + \sigma_{13} \cdot (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

dans lesquelles  $\sigma_{33}$  se déduit de  $\mathbf{X}$  comme  $\sigma_{33}(\mathbf{X}) = (\sigma_{11} + 2 \cdot \mathbf{D}_1 \cdot u_2) [(\gamma - 2)/\gamma]$ .

Enfin, les coefficients de réflexion complexes sont calculés en utilisant l'annulation de la contrainte sur le bord libre (cf. Eq. (5.32)). Si l'on considère un mode de Lamb en incidence oblique dirigée vers la droite, en direction du bord de la plaque, il faut alors déterminer  $(3 \cdot N_e - 1)$  coefficients, correspondants aux  $(2 \cdot N_e - 1)$  modes de Lamb dirigés vers la gauche et aux  $N_e$  modes SH. L'annulation des composantes  $\sigma'_{11}$ ,  $\sigma'_{12}$  et  $\sigma'_{13}$  fourni respectivement  $N_e$ ,  $N_e - 1$  et  $N_e$  conditions indépendantes. Le calcul est fait ici en prenant  $N_e = 100$ .

### 5.A.2 Génération sélective du mode $S_1$

La génération sélective du mode  $S_1$  est réalisée en utilisant un réseau de 64 transducteurs. Le signal émis est calculé par la TFD spatio-temporelle de la partie de la courbe de dispersion située dans la bande de fréquence choisie préalablement convoluée avec un élément structurant gaussien. Le mode  $S_1$  est ici choisi de 2,9 à 3,1 MHz. Le réseau de transducteurs est piloté par une baie électronique Lecoer programmable sur 64 canaux avec une fréquence d'échantillonnage de 80 MHz. Le B-Scan correspondant à l'excitation spatio-temporelle par le réseau multi-éléments est présenté sur la Figure 5.20. L'élément  $n^\circ 64$  est l'élément situé le plus près du bord libre de la plaque.

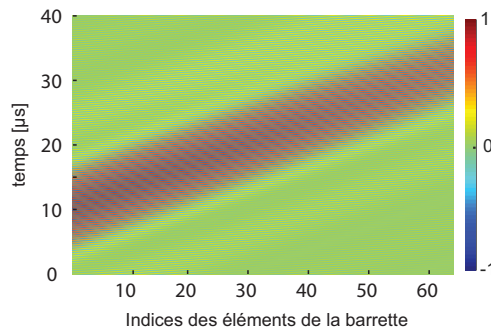


FIGURE 5.20 – B-Scan correspondant à l'excitation spatio-temporelle appliquée au transducteur. On note que l'élément représenté par l'indice 64 est situé le plus près du bord libre.



## Références bibliographiques

- [1] C. Prada, O. Balogun, and T.W. Murray. Laser-based ultrasonic generation and detection of zero-group velocity lamb waves in thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 87(19) :194109, 2005.
- [2] S.D. Holland and D.E. Chimenti. Air-coupled acoustic imaging with zero-group-velocity lamb modes. *Appl. Phys. Lett.*, 83(13) :2704–2706, 2003.
- [3] M. Germano, A. Alippi, A. Bettucci, and G. Mancuso. Anomalous and negative reflection of lamb waves in mode conversion. *Phys. Rev. B*, 85(1) :012102, 2012.
- [4] P.J. Torvik. Reflection of wave trains in semi-infinite plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 41(2) :346–353, 1967.
- [5] B.A. Auld and E.M. Tsao. A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate. *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, 24(5) :317–326, 1977.
- [6] R.D. Gregory and I. Gladwell. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate. *J. Elasticity*, 13(2) :185–206, 1983.
- [7] B. Morvan, N. Wilkie-Chancellier, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos. Lamb wave reflection at the free edge of a plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3) :1417–1425, 2003.
- [8] J.M. Galán and R. Abascal. Numerical simulation of Lamb wave scattering in semi-infinite plates. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 53(5) :1145–1173, 2002.
- [9] V. Pagneux. Revisiting the edge resonance for lamb waves in a semi-infinite plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(2) :649–656, 2006.
- [10] A. Gunawan and S. Hirose. Reflection of obliquely incident guided waves by an edge of a plate. *MMater. Trans.*, 48(6) :1236–1243, 2007.
- [11] P.D. Wilcox, A. Velichko, B.W. Drinkwater, A.J. Croxford, and M.D. Todd. Scattering of plane guided waves obliquely incident on a straight feature with uniform cross-section. *J. Acoust. Soc. Am.*, 128(5) :2715–2725, 2010.
- [12] S. Santhanam and R. Demirli. Reflection of Lamb waves obliquely incident on the free edge of a plate. *Ultrasonics*, 53(1) :271–282, 2013.
- [13] F. Feng, Z. Shen, and J. Shen. Scattering of obliquely incident waves by straight features in a plate. *Wave Motion*, 60 :84–94, 2016.
- [14] E. Dieulesaint and D. Royer. *Ondes élastiques dans les solides : application au traitement du signal*, volume 13. Masson, 1974.
- [15] B.A. Auld. *Acoustic fields and waves in solids*, volume 2. John Wiley & Sons, 1973.
- [16] W.B. Fraser. Orthogonality relation for the rayleigh–lamb modes of vibration of a plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(1) :215–216, 1976.
- [17] A.H. Meitzler. Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 38(5) :835–842, 1965.
- [18] J.A.C. Weideman and S.C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Trans. Math. Softw.*, 26(4) :465–519, 2000.



---

Réfraction négative des ondes de Lamb et milieux complémentaires

---

Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>149</b>
<b>6.2</b>	<b>Réfraction négative d'une onde de Lamb à une discontinuité d'épaisseur</b>	<b>149</b>
6.2.1	Détermination semi-analytique des coefficients de transmission	149
6.2.2	Application à une discontinuité d'épaisseur d'une plaque de Duralumin	151
<b>6.3</b>	<b>Étude expérimentale des <i>milieux complémentaires</i></b>	<b>153</b>
6.3.1	Piégeage des ondes : <i>Double coin</i>	154
6.3.2	Annulation de la propagation des ondes	159
6.3.3	Camouflage	160
<b>6.4</b>	<b>Conclusions, perspectives</b>	<b>161</b>
<b>6.A</b>	<b>Annexes</b>	<b>163</b>
6.A.1	Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion et de transmission	163
6.A.2	Simulation de la propagation des ondes élastiques	163
6.A.3	Décomposition modale	164
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>166</b>

---

**CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB  
ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES**

---

## 6.1 Introduction

L'existence de modes de Lamb à vitesse de phase négative a récemment été mise à profit pour mettre en évidence les phénomènes de réfraction négative pour les ondes élastiques guidées. Les équipes de Claire Prada et Todd Murray [1] ont notamment montré comment la discontinuité d'épaisseur d'une plaque pouvait induire une conversion d'un mode à vitesse de phase positive *prograde* vers un mode à vitesse de phase négative *rétrograde*. Puis, ils ont démontré comment une marche d'épaisseur dans une plaque pouvait constituer une lentille plate de Veselago pour les ondes de Lamb [2].

L'objectif de ce chapitre est d'approfondir l'étude de ce phénomène, en adoptant successivement une approche théorique, numérique, puis expérimentale. Dans un premier temps, nous décrivons mathématiquement l'interaction d'un mode de Lamb avec une discontinuité d'épaisseur. En effet, bien qu'ayant fait l'objet de quelques études récentes [3, 4] à basses fréquences, cette interaction n'a pas été traitée pour le cas de fréquences auxquelles il existe des modes *rétrogrades*. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous examinons numériquement et expérimentalement l'approche des *milieux complémentaires*. Nous mettons ainsi en évidence la possibilité d'annuler la propagation des ondes et de camoufler certaines zones du milieu de propagation.

## 6.2 Réfraction négative d'une onde de Lamb à une discontinuité d'épaisseur

La réfraction négative des ondes de Lamb résulte de la conversion entre modes *progrades* et *rétrogrades* à une discontinuité d'épaisseur. Dans cette partie, nous décrivons donc cette interaction par une approche semi-analytique. Cette approche est ensuite appliquée au cas d'une marche d'épaisseur dans une plaque de Duralumin à des fins d'optimisation de la conversion entre modes *prograde* et *rétrograde*.

### 6.2.1 Détermination semi-analytique des coefficients de transmission

Comme nous l'avons déjà souligné, l'interaction d'un mode de Lamb en incidence normale sur le bord libre d'une plaque a été largement décrite [5–10]. À l'inverse, la propagation d'ondes de Lamb au sein de plaques comportant une discontinuité d'épaisseur n'a été que très récemment étudiée [3, 4]. Cette différence de traitement s'explique notamment par l'existence de singularités dans le champ de contraintes, engendrées par la présence de *coins*. Par ailleurs, les études de Schaal *et al.* [3] et de Poddar *et al.* [4], menées à partir de méthodes de projection, se limitent aux basses fréquences, pour

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

lesquelles seuls les modes d'ordre zéro existent.

Cette partie porte sur l'étude théoriquement de l'interaction d'un mode de Lamb en incidence normale avec une discontinuité d'épaisseur. Nous nous plaçons au dessus de la résonance ZGV de la plaque la plus fine, de façon à considérer la conversion entre modes *prograde* et *rétrograde*. Après avoir défini la géométrie du problème, nous tentons de le résoudre semi-analytiquement en combinant une discrétisation dans l'épaisseur de la plaque à une approche modale dans la direction de propagation.

### Géométrie du problème

Considérons une plaque telle que représentée sur la figure 6.1, c'est-à-dire occupant le volume  $-h_1 < x_2 < h_1$  pour  $x_1 < 0$ , d'une part, et  $-h_2 < x_2 < h_2$ , pour  $x_1 > 0$ , d'autre part, avec  $h_2 < h_1$ . Étant donné le découplage entre les modes de Lamb et les modes SH en incidence normale, nous ne considérons que les premiers dans la suite du problème. La discontinuité d'épaisseur considérée est symétrique de façon à ce que les familles de modes symétriques et antisymétriques soient découplées. Dans chaque demi-plan, les différents modes de Lamb sont déterminés et classés en suivant la méthode décrite dans le chapitre précédent [cf. sous-partie 5.2.1, (p. 122)]. On note  $\{u_i^{(p,n)}, \sigma_{ij}^{(p,n)}\}$  et  $\{\tilde{u}_i^{(p,m)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(p,m)}\}$  les modes dirigés dans le sens des  $x_1$  croissants et décroissants, respectivement. L'indice  $p$  indique le demi plan correspondant, il vaut 1 pour  $x_1 < 0$  et 2 pour  $x_1 > 0$ .

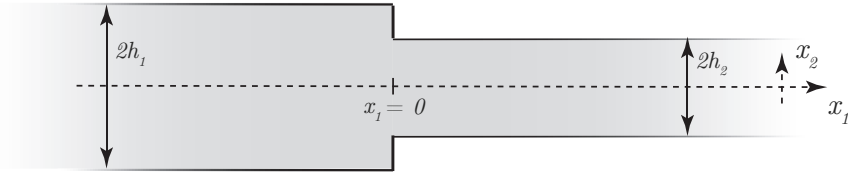


FIGURE 6.1 – Schéma d'une discontinuité d'épaisseur symétrique.

### Interaction d'un mode de Lamb en incidence normale avec une discontinuité d'épaisseur

Soit un mode de Lamb en incidence normale sur la discontinuité d'épaisseur décrite ci-dessus. Les conditions aux limites imposées par cette dernière sont l'annulation de la contrainte sur les contremarches ainsi que la continuité des contraintes et du déplacement dans la partie centrale. De façon à satisfaire ces conditions, l'onde incidente est convertie en une infinité de modes, réfléchis et transmis. Le problème s'écrit alors,

$$\sigma_{11}^{(1,i)} + \sum_{n_1=1}^{\infty} r_{i|n_1} \tilde{\sigma}_{11}^{(1,n_1)} = \begin{cases} 0 & , h_2 < |x_2| < h_1, \\ \sum_{n_2=1}^{\infty} t_{i|n_2} \sigma_{11}^{(2,n_2)} & , |x_2| < h_2, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{21}^{(1,i)} + \sum_{n_1=1}^{\infty} r_{i|n_1} \tilde{\sigma}_{21}^{(1,n_1)} = \begin{cases} 0 & , h_2 < |x_2| < h_1, \\ \sum_{n_2=1}^{\infty} t_{i|n_2} \sigma_{21}^{(2,n_2)} & , |x_2| < h_2, \end{cases} \quad (6.2)$$

$$u_1^{(1,i)} + \sum_{n_1=1}^{\infty} r_{i|n_1} \tilde{u}_1^{(1,n_1)} = \sum_{n_2=1}^{\infty} t_{i|n_2} u_1^{(2,n_2)}, \quad |x_2| < h_2, \quad (6.3)$$

## 6.2. RÉFRACTION NÉGATIVE D'UNE ONDE DE LAMB À UNE DISCONTINUITÉ D'ÉPAISSEUR

---

$$u_2^{(1,i)} + \sum_{n_1=1}^{\infty} r_{i|n_1} \tilde{u}_2^{(1,n_1)} = \sum_{n_2=1}^{\infty} t_{i|n_2} u_2^{(2,n_2)}, \quad |x_2| < h_2, \quad (6.4)$$

où  $r_{i|j}$  et  $t_{i|j}$  représentent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission du mode  $i$  dans le mode  $j$  de la partie du guide correspondante.

La détermination de l'ensemble des coefficients  $r_{i|j}$  et  $t_{i|j}$ , se fait en suivant la méthode numérique décrite dans l'annexe 6.A.1 (p. 163). Cette méthode combine une technique de collocation par points selon l'axe  $x_2$  et une approche modale dans la direction  $x_1$ . Les résultats présentés dans ce chapitre, dans la bande de fréquence située au dessus de la résonance ZGV de la plaque la plus fine – c'est-à-dire pour des fréquences comprise entre  $f_{ZGV_{h_2}} \times (2h_2)/c_T = 0,92$  et  $f \times (2h_2)/c_T = 1$  – ont été obtenus en considérant 150 modes dans chacune des parties du guide. La condition de conservation de l'énergie est remplie avec une précision satisfaisante :  $1 - \sum_j |r_{i|j}|^2 - \sum_j |t_{i|j}|^2 \sim 10^{-4}$ , où  $j$  représente la somme sur l'ensemble des modes propagatifs.

### 6.2.2 Application à une discontinuité d'épaisseur d'une plaque de Duralumin

Afin d'optimiser la réfraction négative à une discontinuité d'épaisseur, l'approche théorique développée dans la section précédente est maintenant appliquée au cas du Duralumin. Les courbes de dispersion obtenues pour les premiers modes de Lamb propagatifs symétriques dans chacune des parties de la plaque sont représentées sur la figure 6.2(b) pour le rapport de hauteurs  $h_2/h_1 = 0,9$ . Pour plus de clarté, les modes de chaque partie numérotée  $p$  du guide, sont respectivement identifiés sous la forme  $S_n^{(p)}$  plutôt que par leur indice  $n$ .

Les propriétés dispersives de chacune des parties de la plaque sont fixées par leur hauteur respective. Dès lors, l'amplitude relative de la discontinuité d'épaisseur  $h_2/h_1$  peut se traduire par un croisement entre les branches de dispersion associées aux modes  $S_1$ , *prograde*, et  $S_{2b}$ , *rétrograde* [Fig. 6.2]. Bramhavar *et al.* [1] ont montré qu'à la fréquence de croisement, la conversion entre ces modes induite par la marche d'épaisseur donne lieu au phénomène de réfraction négative. Afin d'optimiser ce phénomène, il nous faut donc maximiser la valeur du coefficient  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}}$  en choisissant la fréquence *de croisement* en fonction du rapport  $h_2/h_1$ .

#### Validation de la méthode semi-analytique

La conservation de l'énergie au sein du système constitue une première indication favorable quant à la validité de la méthode semi-analytique. Toutefois, la divergence théorique du champ de contraintes sur le *coin* de la marche pose la question de sa validité. Dans ce paragraphe, nous validons cette démarche semi-analytique à partir des résultats obtenus en simulant le problème par la méthode des différences finies dans le domaine temporel (D.F.D.T., en anglais F.D.T.D.).

Le problème est simulé à partir de logiciel Simsonic [11, 12], dont les principes de fonctionnement sont décrits dans l'annexe 6.A.2 (p. 163). Nous considérons une plaque de Duralumin de hauteur 1 mm et de longueur 510 mm, discrétisée avec un maillage  $\delta x = 0,01$  mm [Fig. 6.3]. Le mode  $S_2^{(1)}$  est généré sélectivement sur la bande de fréquences [3,25 – 3,45] MHz en suivant la méthode décrite dans l'annexe 5.A.2 (p. 144).

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

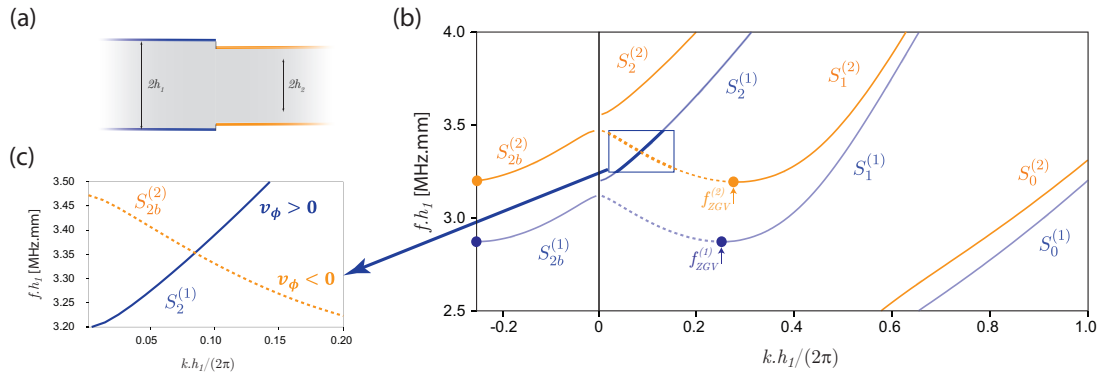


FIGURE 6.2 – (a) Géométrie du problème considéré. (b) Courbes de dispersion calculées respectivement dans la partie 1 (courbes bleues) et la partie 2 (courbes orange) du guide. (c) Zoom sur la zone correspondant au croisement entre le mode  $S_2^{(1)}$ , *prograde* et le mode  $S_{2b}^{(2)}$ , *rétrograde*, mis en jeu pour obtenir la réfraction négative des ondes de Lamb.

Les champs de contraintes et de déplacement sont mesurés sur deux lignes réceptrices situées de part et d'autre de la discontinuité d'épaisseur. Les coefficients de réflexion et de transmission sont ensuite calculés à partir de la méthode de décomposition modale développée par Pagneux *et al.* [13], décrite dans l'annexe 6.A.3 (p. 164). Cette méthode fournit l'amplitude des composantes propagatives  $A_n^{(p)}$  et contra-propagatives  $B_n^{(p)}$  de chacun des modes de Lamb pour le champ mesuré de part et d'autre de la discontinuité d'épaisseur. Ces résultats numériques sont comparés sur le tableau 6.1 avec ceux obtenus à partir du modèle semi-analytique décrit au paragraphe 6.2.1. L'accord entre résultats numériques et théoriques est satisfaisant (l'erreur relative est de l'ordre de 3%). Ceci valide le bien fondé de notre approche semi-analytique que nous allons maintenant utiliser pour optimiser la conversion entre modes *prograde* et *rétrograde* au niveau de la marche.

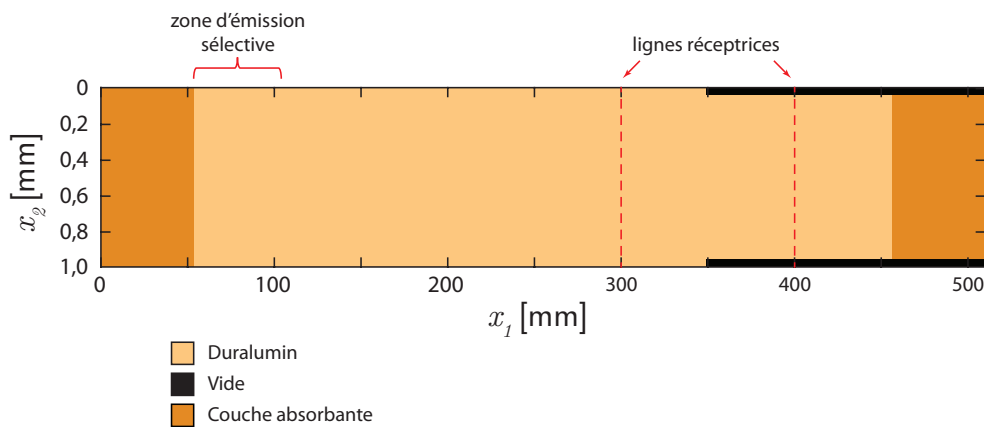


FIGURE 6.3 – Géométrie de la plaque utilisée pour la simulation numérique. La présence de bords absorbants permet de considérer le milieu infini de part et d'autre de la discontinuité d'épaisseur.



### 6.3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES *MILIEUX COMPLÉMENTAIRES*

Coefficient	Méthode semi-analytique	Méthode numérique
$r_{S_2^{(1)} S_0^{(1)}}$	0,131	0,135
$r_{S_2^{(1)} S_1^{(1)}}$	0,266	0,259
$r_{S_2^{(1)} S_2^{(1)}}$	0,058	0,045
$t_{S_2^{(1)} S_0^{(2)}}$	0,029	0,030
$t_{S_2^{(1)} S_1^{(2)}}$	0,224	0,215
$t_{S_2^{(1)} S_{2b}^{(2)}}$	0,925	0,930
$\sum t_i^2 + r_i^2$	0,999	1,000

Tableau 6.1 – Comparaison des coefficients de réflexion et de transmission obtenus par la méthode semi-analytique et par la méthode numérique.

#### Optimisation de la conversion

Comme nous le verrons plus loin, les dispositifs reposant sur la notion de *milieux complémentaires* nécessitent la meilleure conversion possible entre modes *prograde* et *rétrograde* afin de limiter les réflexions parasites. De façon à optimiser le processus de réfraction négative, nous étudions ici la variation du coefficient de transmission du mode  $S_2^{(1)}$  dans le mode  $S_{2b}^{(2)}$  à la fréquence de croisement  $f_0$  en fonction du rapport  $h_2/h_1$ . La figure 6.4(a) présente l'évolution de ce point de croisement ( $f_0 h_1, k_0 h_1$ ) en fonction du rapport  $h_2/h_1$ . Le coefficient de transmission  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}}$  est déterminé théoriquement à ces points de croisement. La figure 6.4(b) présente l'évolution de ce coefficient en fonction du rapport  $h_2/h_1$ . On constate que cette courbe présente un maximum pour une valeur  $h_2/h_1 \sim 0,92$ . La diminution de la hauteur relative de la marche est, en principe, favorable à la conversion du mode  $S_2^{(1)}$  dans le mode  $S_{2b}^{(2)}$ . Toutefois, elle s'accompagne d'une diminution du nombre d'onde  $k_0$  auquel le croisement a lieu. Or, comme nous l'avons décrit dans la section 4.4.3 (p. 108), dans la limite  $k \rightarrow 0$ , ces deux modes sont respectivement associés à des modes d'épaisseur longitudinal et transverse [Fig. 4.11]. Dans cette limite, la conversion entre ces modes tend donc à devenir nulle. L'optimisation de la conversion réside donc dans un équilibre entre ces deux effets antagonistes.

Plaçons nous maintenant dans le cas d'une discontinuité d'épaisseur optimisée, c'est-à-dire telle que  $h_2/h_1 = 0,92$ . Le tracé de l'évolution du coefficient de transmission  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}}$  autour du produit fréquence-épaisseur de croisement,  $f_0 \cdot h_1 \sim 3,31$  MHz.mm indique que la conversion reste satisfaisante sur une large bande de fréquence [Fig. 6.4(c)]. La réfraction négative des ondes de Lamb est donc efficace sur une certaine bande passante et pourra donc être examinée également dans le domaine temporel.

### 6.3 Étude expérimentale des *milieux complémentaires*

L'étude théorique menée précédemment nous a permis de caractériser puis d'optimiser la conversion du mode de Lamb  $S_2^{(1)}$  dans le mode  $S_{2b}^{(2)}$  à une discontinuité d'épaisseur, synonyme de réfraction négative de l'onde transmise. Dans la suite de ce chapitre, nous mettons cette conversion à profit de façon à examiner numériquement

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

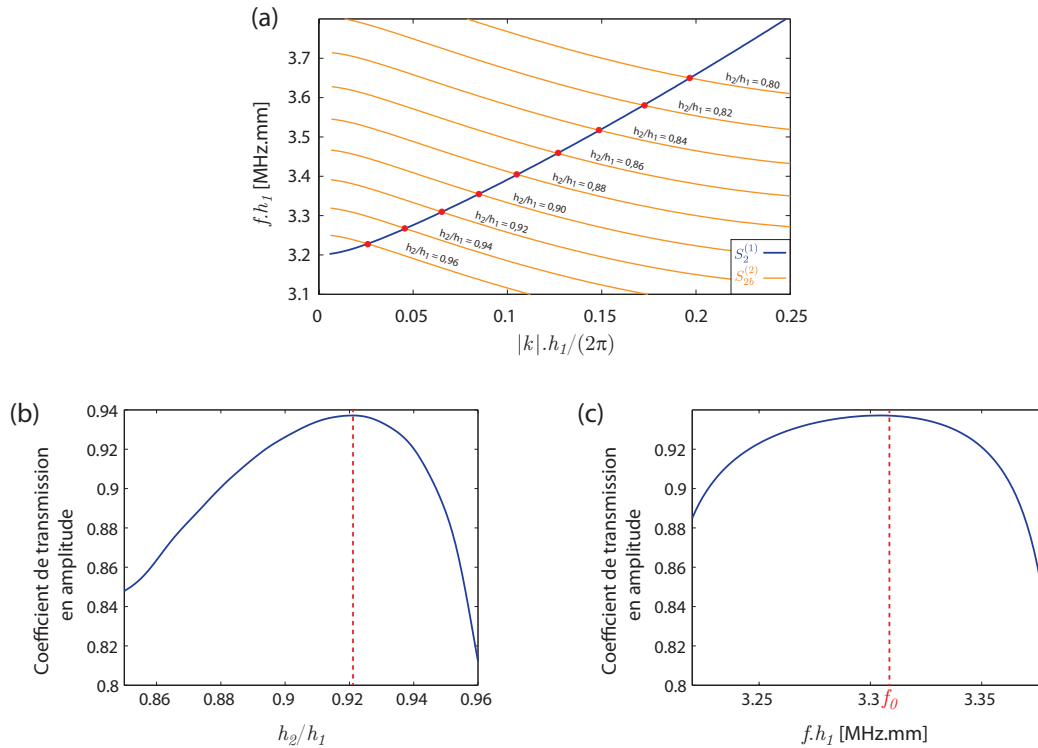


FIGURE 6.4 – (a) Évolution de la position du croisement des branches de dispersion des modes  $S_2^{(1)}$  et  $S_{2b}^{(2)}$  en fonction du rapport  $h_2/h_1$ . (b) Variation du coefficient de transmission  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}}$ , calculé à la fréquence de croisement, en fonction de l’amplitude relative de la discontinuité d’épaisseur  $h_2/h_1$ . (c) Variation du coefficient de transmission  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}}$  en fonction de la fréquence, pour le rapport  $h_2/h_1 = 0,92$ .

et expérimentalement l’approche des milieux complémentaires.

### 6.3.1 Piégeage des ondes : *Double coin*

Le principe du double coin parfait repose sur la juxtaposition, sous la forme d’un damier, de quatre quadrants de milieux complémentaires. Comme nous l’avons décrit dans le chapitre introductif [cf. sous-partie 4.3.2, p. 104], l’approche des milieux complémentaires abouti dans cette configuration au piégeage de l’onde. En effet, les réfractions successives d’une partie des ondes les amènent à circuler indéfiniment autour du double coin.

Le *double coin* pour les ondes de Lamb est conçu en suivant la méthode proposée par Bramhavar *et al.* [1]. Celui-ci est obtenu en modifiant localement l’épaisseur d’une plaque de Duralumin de façon à obtenir deux paires de quadrants d’épaisseurs respectives  $h_1 = 1,0$  mm et  $h_2 = 0,9$  mm, réparties sous la forme d’un damier [Fig. 6.5(a)]. On notera que bien que nous ayons montré que le processus de réfraction négative est optimisé pour un rapport d’épaisseur  $h_2/h_1 = 0,92$ , dans la suite de ce manuscrit nous avons choisis de simuler des plaques avec un rapport d’épaisseur  $h_2/h_1 = 0,90$  de façon à limiter le temps de calcul en augmentant le pas du maillage.

### Démonstration numérique

Dans un premier temps, la propagation d'ondes élastiques au sein de la plaque représentée sur la figure 6.5(a) est simulée numériquement par DFDT à l'aide du logiciel Simsonic [11, 12] [cf. annexe 6.A.2, p. 163], avec un maillage de pas  $\delta x = 0,05$  mm. Nous étudions successivement la propagation de deux impulsions de largeur  $\Delta t = 0,60$   $\mu s$ , émises respectivement par une ligne source formant un angle de  $45^\circ$  avec les limites du quadrant, puis par un point source. Le déplacement dans la direction  $x_2$  est ensuite enregistré sur l'ensemble des points d'une grille de  $100 \times 100$  mm<sup>2</sup> recouvrant la partie centrale de la plaque avec un pas  $\Delta x = 0,2$  mm.

La figure 6.5(b) représente la TFD spatiale du champ calculée à la fréquence de croisement ( $f_0 = 3.33$  MHz), en considérant 150  $\mu s$  des signaux enregistrés suite à l'excitation par une ligne source. On notera que, la source étant linéique, tous les modes de Lamb propagatifs sont excités. Il nous est toutefois possible de ne prendre en compte que les modes  $S_2^{(1)}$  et  $S_{2b}^{(2)}$  en ne considérant que les fréquences spatiales de module inférieur à  $0,2$  mm<sup>-1</sup>. On observe, dans l'espace de Fourier, la présence de quatre points correspondant à des fronts d'ondes plans inclinés à  $\pm 45^\circ$ . Le champ dans l'espace réel est obtenu par une TFD spatiale inverse [Fig. 6.5(c)]. Il confirme la circulation autour du double coin des fronts d'ondes plans réfractés négativement à chacune des discontinuités d'épaisseur. Le cas de la source ponctuelle est ensuite traité de manière similaire. L'observation du signal dans l'espace de Fourier [Fig. 6.5(d)] révèle une répartition des vecteurs d'onde sur l'ensemble du cercle de rayon  $k_{S_2^{(1)}} = k_{S_{2b}^{(2)}}$ . Le champ correspondant dans l'espace réel est présenté sur la figure 6.5(e). Comme attendu théoriquement [Fig. 4.9], l'onde issue de la source ponctuelle est refocalisée successivement.

L'analyse monochromatique opérée à la fréquence de croisement dans le paragraphe précédent confirme la démonstration numérique du *double coin* pour les ondes de Lamb. Elle peut être complétée en considérant la propagation au sein du dispositif d'un paquet d'onde de largeur  $\Delta f = 0,2$  MHz, centré sur la fréquence de croisement  $f_0$ . Le champ spatio-temporel correspondant à la propagation du mode  $S_2$  émis par une ligne source est représenté à différents instants sur la figures 6.6. Cette représentation illustre le mécanisme de réfractions successives par lequel l'onde est piégée autour du *double coin*. De la même manière, la figure 6.7 représente à différents instants le champ spatio-temporel correspondant à l'émission du mode  $S_2$  par une source ponctuelle. On observe les focalisations successives du champ dans les quadrants contigus, puis dans le quadrant opposé à celui dans lequel est située la source (cf. Figs 6.7 (a)–(d)). Le paquet d'onde est ensuite ramené dans le quadrant initial dans la suite de sa propagation [Fig. 6.7(g)]. Ces deux simulations mettent en évidence la principale limitation du système, liée à la conversion imparfaite du mode  $S_2$  à chaque discontinuité d'épaisseur : l'amplitude du mode  $S_2$  diminue ainsi au fil des réfractions successives. On peut toutefois s'attendre à des résultats encore meilleurs en utilisant un rapport de hauteur optimisé,  $h_2/h_1 = 0,92$ , pour lequel le coefficient de transmission  $t_{S_2^{(1)}|S_{2b}^{(2)}} = 0.94$  au lieu de  $0,91$  ici ( $h_2/h_1 = 0,9$ ).

### Démonstration expérimentale

Afin de confirmer expérimentalement ces prédictions numériques, un échantillon correspondant à la figure 6.5(a) est fabriqué au laboratoire en modifiant symétriquement l'épaisseur de deux quadrants d'une plaque de  $200 \times 200 \times 1$  mm<sup>3</sup> par gravure

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

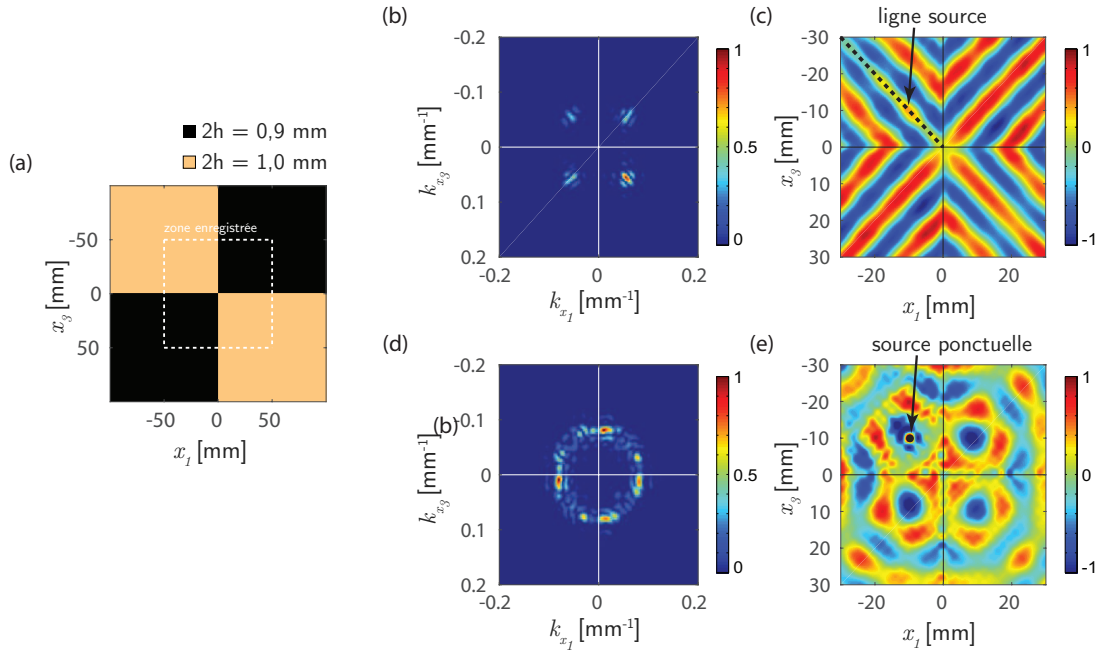


FIGURE 6.5 – Démonstration numérique du *double coin* pour les ondes de Lamb. (a) Géométrie de la plaque simulée. (b), (d) Spectre de Fourier spatial du champ mesuré à la fréquence de croisement pour (b) une ligne source et (d) une source ponctuelle. (c), (e) Représentation dans l'espace réel du champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier montré sur les figures (b) et (d), respectivement.

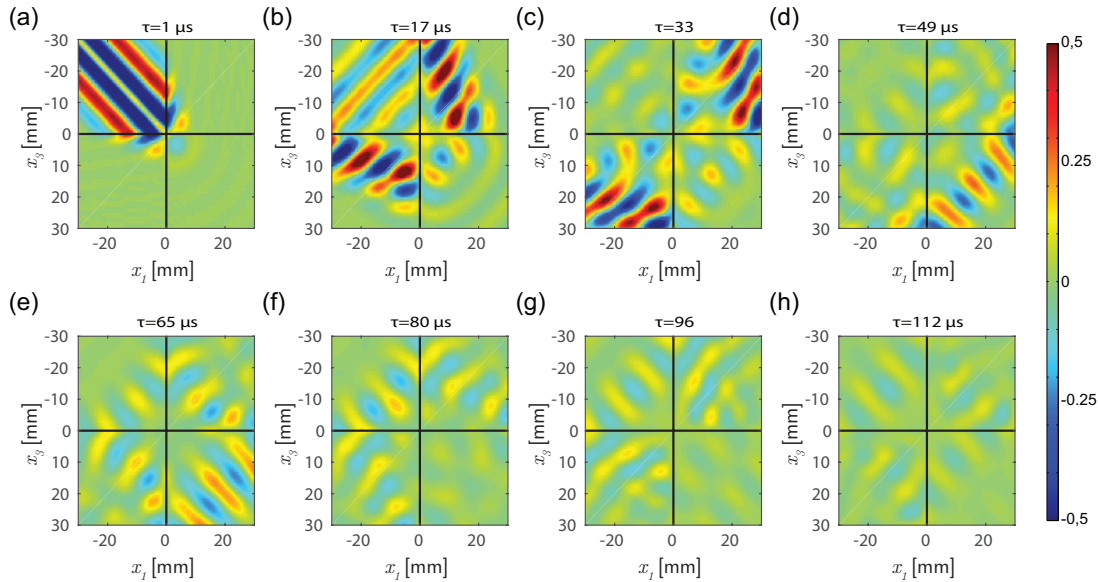


FIGURE 6.6 – Représentation à différents instants du champ spatio-temporel correspondant à la propagation au sein du *double coin* du mode  $S_2$  émis par une ligne source.

au perchlorure de fer,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . Le dispositif expérimental, présenté sur la figure 6.8 est sensiblement équivalent à celui utilisé dans le chapitre 5. La génération est assurée par un transducteur piézoélectrique de 7 mm de diamètre. Un *chirp* à rampe de fréquence

### 6.3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

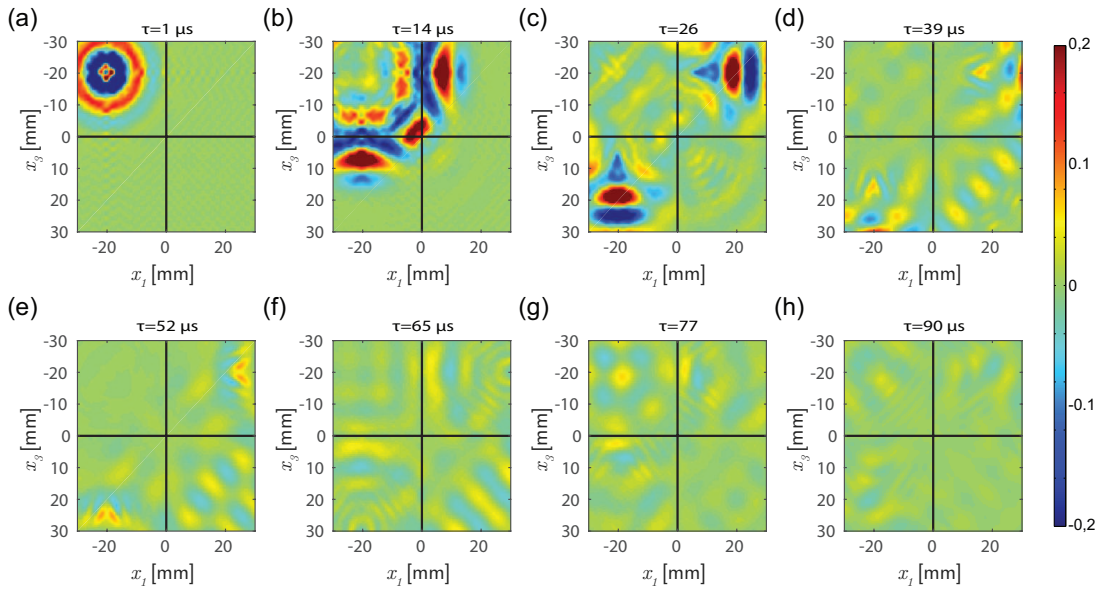


FIGURE 6.7 – Représentation à différents instants du champ spatio-temporel correspondant à la propagation au sein du *double coin* du mode  $S_2$  émis par une source ponctuelle.

linéaire balayant la gamme de fréquence [3,10 – 3,60] MHz est envoyé au transducteur. Comme précédemment, la détection des vibrations dans la direction orthogonale au plan de la plaque est assurée par un interféromètre hétérodyne sur les points d'une grille de  $5 \times 5 \text{ cm}^2$  recouvrant le centre de la plaque avec un pas de 0,5 mm.

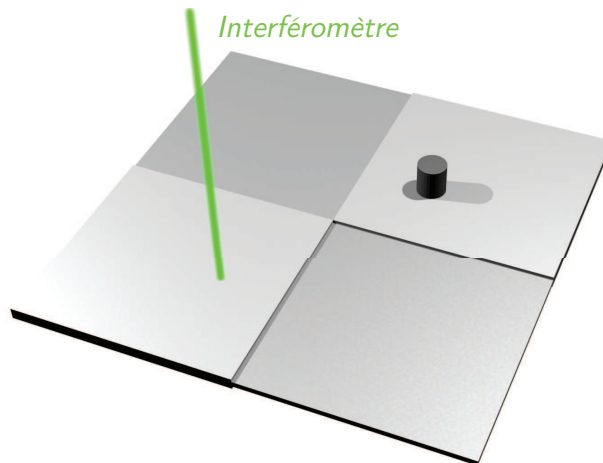


FIGURE 6.8 – Configuration expérimentale. La génération est assurée par un transducteur piézoélectrique de 7 mm de diamètre alors que la composante du champ de déplacement dans la direction orthogonale au plan de la plaque est mesurée par un interféromètre hétérodyne.

Afin de caractériser le *double coin* étudié, une courbe de dispersion est calculée sur une durée de  $80 \mu\text{s}$ , pour laquelle le champ s'est propagé dans les quatre quadrants

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

du dispositif [Fig. 6.9(a)]. On constate que les branches associées aux modes  $S_2^{(1)}$  et  $S_{2b}^{(2)}$  se croisent pour une fréquence de 3.46 MHz, c'est-à-dire au-dessus de la fréquence prévue théoriquement [Fig. 6.4(a)]. Cette différence s'explique par l'imprécision de la méthode de gravure utilisée pour modifier l'épaisseur de la plaque dans les deux quadrants d'épaisseur 0,9 mm. Ceci est confirmé par l'observation de la TFD spatiale du champ à la fréquence  $f_0$ , calculée sur une durée de 80  $\mu$ s [Fig. 6.9(b)]. En effet, on observe une dispersion du signal autour du nombre d'onde  $k_0$ , liée à l'inhomogénéité de l'épaisseur dans les quadrants *gravés*. La représentation du champ correspondant dans l'espace réel, obtenu par TFD inverse, permet toutefois d'observer l'effet du *double coin*, notamment à travers les deux focalisations de l'onde dans les quadrants d'épaisseurs  $h_2$ . Cependant, les irrégularités d'épaisseurs mises en évidence précédemment y altèrent la propagation du mode  $S_2$ , empêchant l'onde de se focaliser efficacement dans le dernier quadrant. Cette détérioration du champ est également mise en évidence par la figure 6.10, représentant à différents instants le champ spatio-temporel obtenu en considérant un paquet d'onde de largeur  $\Delta f = 0,2$  MHz, centré sur la fréquence de croisement  $f_0$ .

La principale limitation expérimentale étant liée à la fabrication des plaques, nous avons étudié plusieurs possibilités pour améliorer cette étape. À court terme, l'usinage des plaques par électro-érosion devrait nous permettre d'obtenir un contrôle de l'épaisseur suffisant.

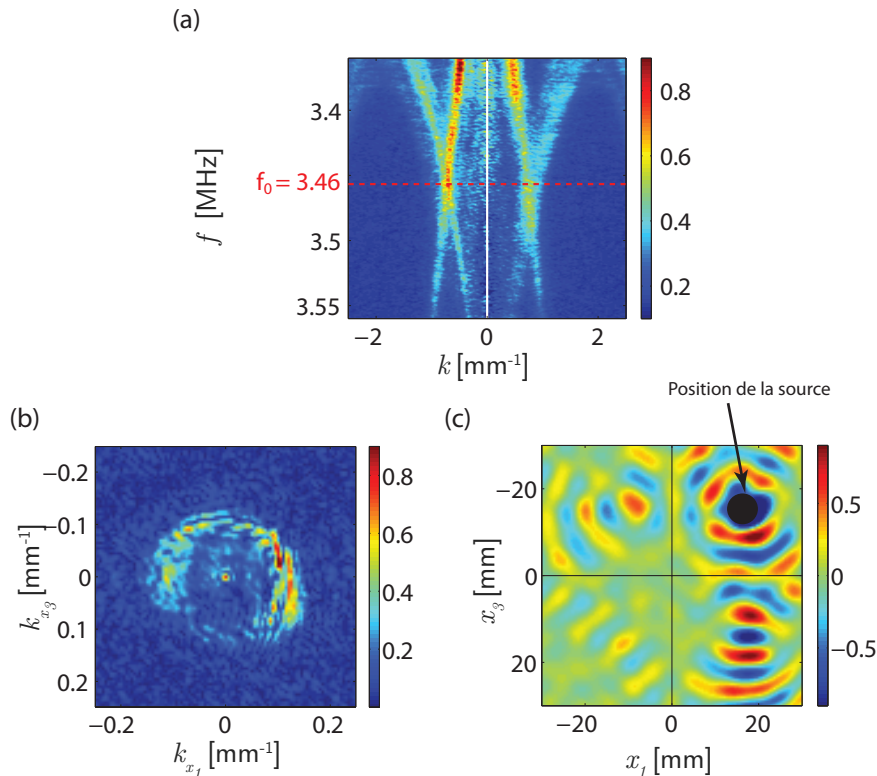


FIGURE 6.9 – Démonstration expérimentale du *double coin* pour les ondes de Lamb. (a) Courbe de dispersion expérimentale calculée à partir des signaux mesurés sur l'ensemble du *double coin*. (b) Spectre de Fourier spatial du champ mesuré à la fréquence  $f = 3.46$  MHz. (c) Représentation dans l'espace réel du champ obtenu par TFD inverse du spectre de Fourier représenté sur la figure (b).

### 6.3. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

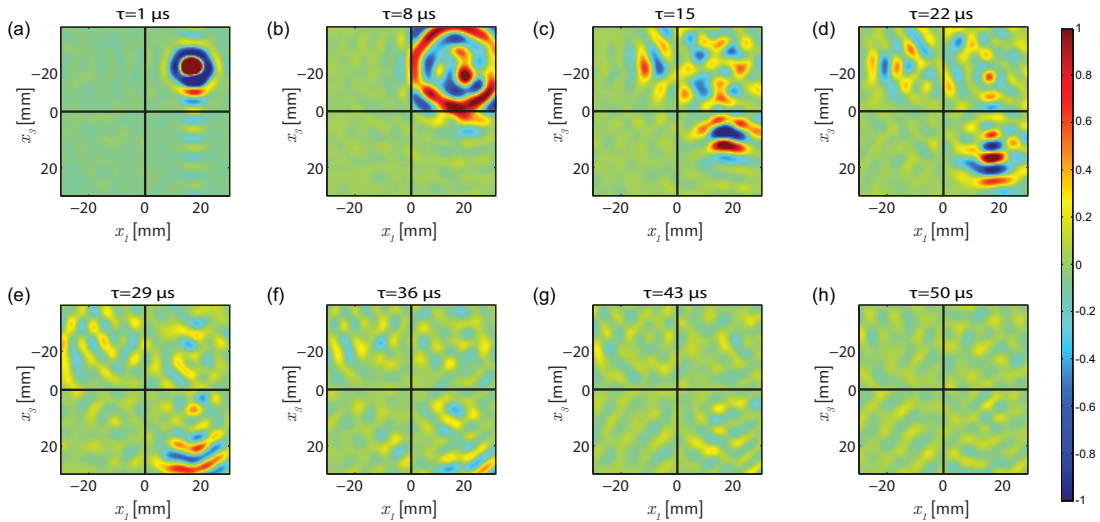


FIGURE 6.10 – Représentation à différents instants du champ spatio-temporel correspondant au champ  $S_2$  se propageant au sein du *double coin*.

#### 6.3.2 Annulation de la propagation des ondes

Après avoir étudié la possibilité de piéger les ondes émises par une source située au sein du milieu à travers l'exemple du *double coin*, nous allons maintenant considérer le cas d'une source située à l'extérieur de ce dernier. Nous montrons que dans cette configuration, l'approche des *milieux complémentaires* permet d'annuler la propagation des ondes et de camoufler certaines zones du milieu de propagation.

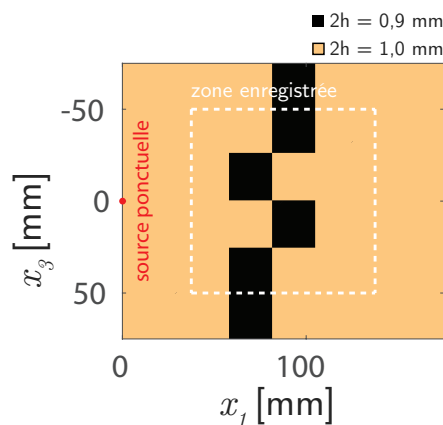


FIGURE 6.11 – Géométrie de la plaque simulée numériquement pour la démonstration de *milieux complémentaires*.

En adoptant l'approche suivie précédemment pour la conception de MIN pour les ondes de Lamb, l'élaboration de *milieux complémentaires* peut se faire en modifiant localement l'épaisseur d'une plaque de Duralumin, comme l'illustre l'exemple de la figure 6.11. Cette configuration est étudiée numériquement à l'aide du logiciel Simsonic [11, 12], en considérant la propagation d'une impulsion de durée  $0,6 \mu\text{s}$ , émise par une source ponctuelle au sein de cette plaque, discrétisée avec un maillage

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

$\delta x = 0,05\text{mm}$ . Afin de ne conserver que la contribution du mode  $S_2$ , les signaux mesurés à la fréquence de croisement sont préalablement filtrés dans l'espace de Fourier en utilisant un filtre passe bas adapté. La représentation du champ dans l'espace réel, sur la figure 6.12(a), permet de constater l'altération des fronts d'onde se propageant dans la première tranche de millieu. À l'inverse, on retrouve les fronts cylindriques de l'onde incidente à la sortie des deux bandes *complémentaires* : tout se passe comme si ces deux bandes avaient été supprimées de l'expérience. Cet effet est mis en évidence sur la figure 6.12(b), représentant le champ mesuré, amputé de la zone correspondant aux bandes *complémentaires*. On observe que la courbure des fronts d'onde est identique à l'entrée et à la sortie du dispositif sans saut de phase apparent.

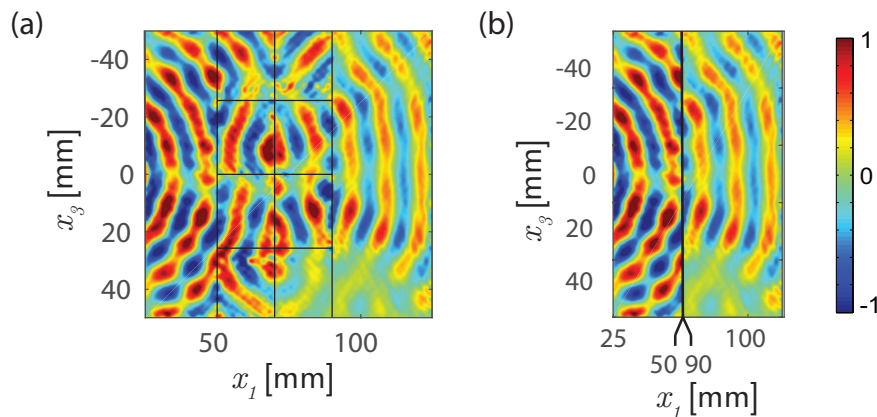


FIGURE 6.12 – Démonstration numérique de l'annulation de la propagation d'une onde de Lamb par deux bandes *complémentaires*. (a) Représentation dans l'espace réel du champ correspondant à la propagation du mode  $S_2$  à travers les bandes *complémentaires*. (b) Représentation du champ de part et d'autre des bandes *complémentaires*.

Enfin, l'effet des deux bandes *complémentaires* est observé dans le domaine temporel à travers la propagation d'un paquet d'onde de largeur  $\Delta f = 0,2$  MHz. Le champ spatio-temporel correspondant est représenté à différents instants sur la figure 6.13. On constate que, malgré la participation de composantes fréquentielles pour lesquelles les nombres d'ondes  $k_{S_2^{(1)}}$  et  $k_{S_2^{(b)}}$  ne sont pas strictement opposés, les fronts d'ondes mesurés à la sortie du dispositif sont bien cylindriques [Fig. 6.13(g)]. Par ailleurs, cette analyse temporelle met en évidence les réflexions parasites [Fig. 6.13(g)] qui polluent légèrement le champ à la fréquence de croisement [Fig. 6.12]. Là encore, un rapport d'épaisseur  $h_2/h_1 = 0,92$  devrait permettre en pratique de limiter le poids de ces réflexions parasites.

### 6.3.3 Camouflage

Après avoir démontré numériquement la suppression des effets de la propagation par l'apposition d'un *milieu complémentaire*, nous montrons ici comment cette propriété peut être appliquée au camouflage d'un diffuseur.

Afin de se donner un élément de comparaison, la propagation d'une onde plane à travers une plaque de Duralumin au sein de laquelle ne figure qu'un diffuseur en forme de croissant est étudiée. Pour ce faire, la propagation d'une impulsion de durée  $0,6 \mu\text{s}$ ,



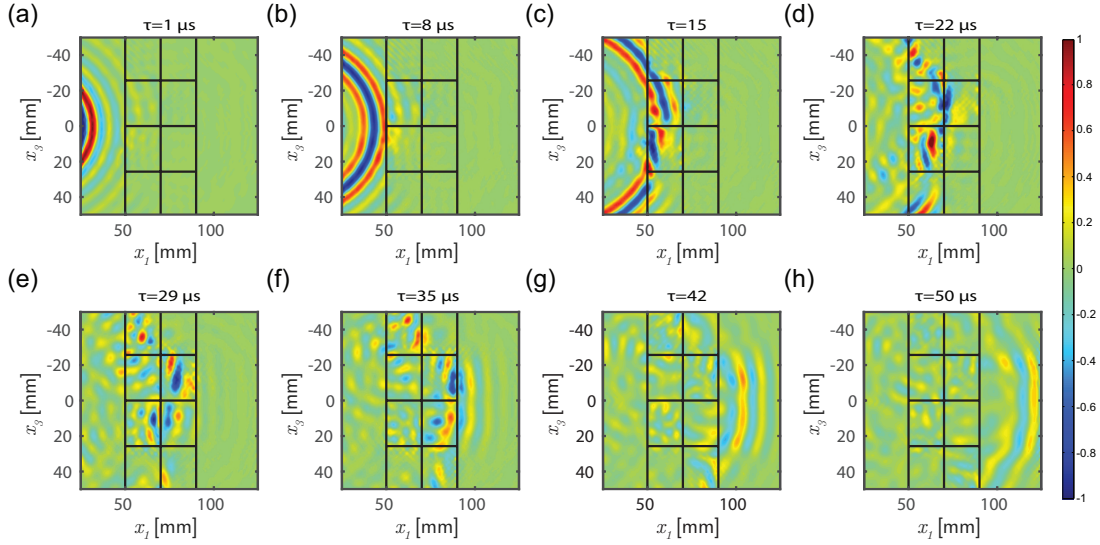


FIGURE 6.13 – Représentation à différents instants du champ spatio-temporel correspondant au champ  $S_2$  se propageant au sein des deux tranches de *milieux complémentaires*.

émise par une ligne source, est simulée avec un maillage de  $\delta x = 0,05\text{mm}$  en utilisant le logiciel Simsonic [11, 12]. Comme précédemment, le champ correspondant au mode  $S_2$  est obtenu en filtrant spatialement le champ mesuré à la fréquence  $f_0$ . Le champ correspondant [Fig. 6.14(b)] illustre l'effet du diffuseur, sur la phase et sur l'amplitude de l'onde. L'objet est facilement détectable pour tout observateur extérieur du fait de la perturbation du champ induit par l'onde diffusée. Considérons maintenant le dispositif présenté sur la figure 6.14(c), constitué du diffuseur complété de son *anti-objet*, c'est-à-dire la tranche de *milieu complémentaire* correspondant. Le champ correspondant à la propagation du mode  $S_2$  au sein de ce milieu, obtenu après simulation numérique, puis traitement des données comme dans la partie 6.3.2 (p. 159) est représenté sur la figure 6.14(d). On constate que l'*anti-objet* remplit parfaitement son rôle : non seulement la baisse d'amplitude liée à la présence du diffuseur est considérablement amoindrie, mais en plus, les fronts d'ondes plans sont restitués. La détection de l'objet est ainsi fortement contrariée. Bien que ces résultats soient convaincants, ils ont été obtenus pour une illumination et une forme de diffuseur bien spécifique. Le choix d'une onde plane incidente sur un diffuseur en forme de croissant limite en effet les angles d'incidences. Nous avons donc pour objectif d'étudier théoriquement la conversion du mode  $S_{2b}^{(1)}$  en fonction de l'angle d'incidence de façon à optimiser la marche

## 6.4 Conclusions, perspectives

Ce chapitre traite du problème de la réfraction négative des ondes de Lamb à une discontinuité d'épaisseur en l'attaquant successivement sous différents angles ; d'abord théoriquement, puis sur des exemples mettant en jeu la notion de milieux complémentaires. Dans un premier temps, l'étude semi-analytique du problème permet de dimensionner le système, de façon à ce que la conversion entre les deux modes de vitesses de phase opposées soit maximale. Cette optimisation nous a ensuite permis de concevoir numériquement différents dispositifs mettant en jeu la propagation du mode

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

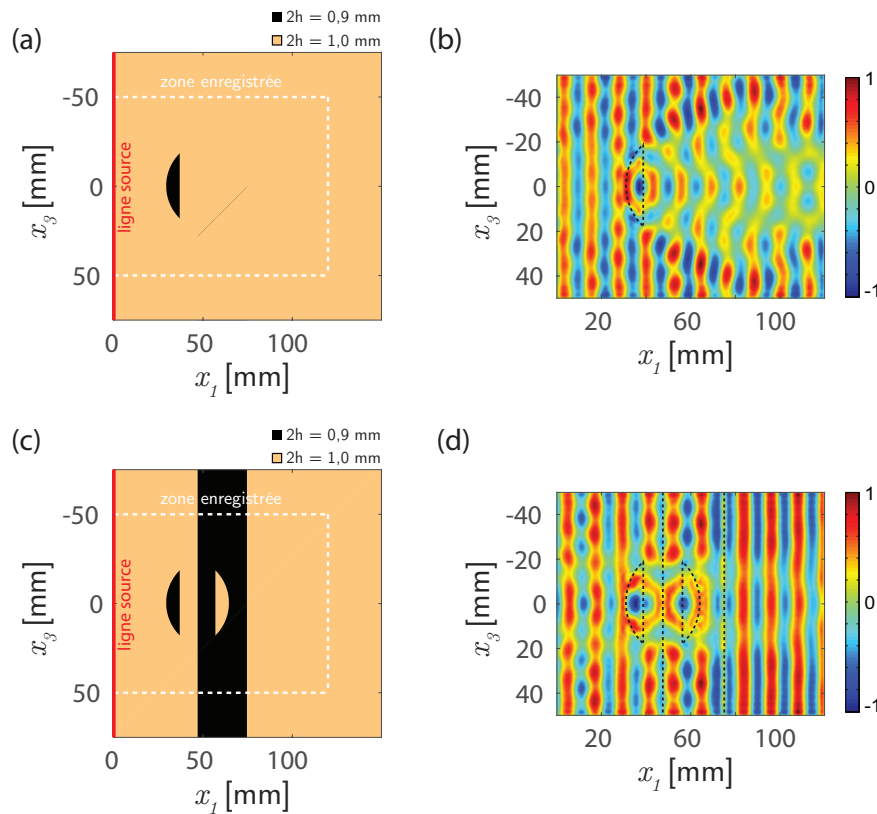


FIGURE 6.14 – Démonstration numérique du camouflage d'un *objet* par son *anti-objet* pour les ondes de Lamb. (a)-(b) Champ diffusé par l'objet. (a) Géométrie de la plaque simulée. (b) Champ correspondant à l'interaction du mode  $S_2$  avec l'objet. (c)-(d) Camouflage de l'objet par l'anti-objet correspondant. (c) Géométrie de la plaque simulée. (d) Champ correspondant à l'interaction successive du mode  $S_2$  avec l'objet puis l'anti-objet.

$S_2$  au sein de milieux d'indices complémentaires. L'agencement de ces derniers résulte dans l'annulation des effets de propagation sur une onde émise par une source située *au sein*, puis *en dehors* du système. De premiers résultats expérimentaux ont également été obtenus et sont encourageants pour les travaux qui vont suivre cette thèse.

Du point de vue pratique, ces travaux offrent de nombreuses perspectives à plus ou moins long terme. À courte échéance, la fabrication par électro-érosion des différents dispositifs présentés dans ce chapitre devrait nous permettre d'en apporter une démonstration expérimentale. Dans la suite, un second objectif sera de concevoir des guides d'épaisseur continûment variable, de façon à adapter aux modes de Lamb les concepts de transformations conformes [14]. Cette approche constitue une voie prometteuse et devrait aboutir à un contrôle encore plus souple de la propagation des ondes de Lamb. Enfin, il serait intéressant d'étendre cette étude au contrôle du champ à l'échelle sub-longueur d'onde en manipulant les modes de Lamb évanescents dans l'esprit de la lentille parfaite initialement suggérée par Pendry [15]. L'ensemble de ces réalisations repose sur une compréhension approfondie des mécanismes de conversion des modes de Lamb à une discontinuité d'épaisseur. Il sera donc nécessaire de poursuivre l'étude théorique présentée dans ce chapitre de façon à l'étendre au cas d'une incidence oblique puis au cas d'un milieu dont l'épaisseur varie continûment.

## 6.A Annexes

### 6.A.1 Méthode numérique de calcul des coefficients de réflexion et de transmission

La méthode numérique présentée dans cette annexe a été développée dans le prolongement de celle présentée dans le chapitre précédent [cf. sous-partie 5.A.1, p. 142], dans le but de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'un mode de Lamb incident à une discontinuité d'épaisseur. Le problème étant supposé symétrique par rapport au plan  $x_2 = 0$ , la réflexion et la transmission de l'onde incidente préservent la symétrie des modes : un mode incident symétrique (antisymétrique) sera donc réfléchi et transmis en une combinaison des seuls modes symétriques (antisymétrique) de chacun des guides. Nous nous limitons ici au cas des modes symétriques, il est bien entendu facilement transposable à celui des modes antisymétriques.

Dans un premier temps, la détermination des racines, réelles et complexes de l'équation de Rayleigh-Lamb (Eq. 5.18) se fait en appliquant la méthode *de Muller* [16], de façon à déterminer un nombre  $N_m^{(i)}$  de modes symétriques dans chaque partie  $i$  du guide d'onde. Les champs de déplacement et de contraintes correspondants à chacun des modes sont ensuite exprimés sur un nombre  $2N_p$  de points linéairement espacés sur l'intervalle  $[-h_i, h_i]$ , à partir de leurs expressions analytiques (cf. Eqs. (5.1), (5.2) et (5.19)). Parmi ces points, on distinguera  $2N'_p$  points correspondants à la partie centrale de la plaque, c'est-à-dire associés à des coordonnées  $x_2$  telles que  $|x_2| < h_2$ .

La prise en compte des conditions aux limites en  $x_1 = 0$  (cf. Eqs. (6.1) – (6.4)) permet ainsi d'obtenir  $2(N_p + N'_p - 1) - 1$  équations indépendantes. Les conditions de continuité de  $u_1$  et  $u_2$  dans la partie centrale du guide fournissent respectivement  $N'_p$  et  $N'_p - 1$  équations indépendantes. Les conditions d'annulation et de continuité de  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  fournissent quant à elles  $N_p$  et  $N_p - 2$  équations indépendantes, respectivement. Les inconnues du problème sont au nombre de  $N_m^{(1)} + N_m^{(2)}$ . On compte en effet  $N_m^{(1)}$  coefficients de réflexion, correspondants à la conversion du mode incident dans les  $N_m^{(1)}$  modes déterminés dans la partie 1 du guide et se propageant (ou s'atténuant) dans le sens des  $x_1$  décroissants. S'y ajoutent  $N_m^{(2)}$  coefficients de transmission, associés à la conversion du mode incident dans les  $N_m^{(2)}$  modes de la partie 2 du guide et se propageant (ou s'atténuant) dans le sens des  $x_1$  croissants. En pratique, on choisit  $N_m^{(2)} = N_m^{(1)} = 150$  tandis que les paramètres  $N_p$  et  $N'_p$  sont fixés en fonction du rapport  $h_2/h_1$ , de façon à obtenir un nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues. Enfin, la résolution du système se fait à partir d'une pseudo-inversion de Moore-Penrose.

### 6.A.2 Simulation de la propagation des ondes élastiques

La propagation des ondes de Lamb dans les différents milieux considérés est simulée en utilisant le logiciel Simsonic [11, 12], développé par Emmanuel Bossy à l'institut Langevin. Il s'agit d'une méthode de différences finies dans le domaine temporel (DFDT), résolvant les équations de l'élasto-dynamique dans les solides (cf. Eqs. (5.1) – (5.3)).

Chacune des configurations est simulée en définissant la géométrie et l'excitation du système. La discrétisation de ces deux paramètres se fait en définissant le pas  $\delta x$  du maillage spatial et la vitesse de propagation maximale des ondes élastiques  $c_M$  au sein

## CHAPITRE 6. RÉFRACTION NÉGATIVE DES ONDES DE LAMB ET MILIEUX COMPLÉMENTAIRES

---

du système. L'échantillonnage temporel  $\delta t$  est déterminé à partir de ces paramètres de façon à assurer la convergence du schéma numérique, en vertu de la condition C.F.L. (Courant Friedrichs Levy) [17] :

$$\delta t = \frac{\delta x}{\sqrt{3} c_M}. \quad (6.5)$$

Sous réserve d'un maillage adapté, la résolution numérique pas à pas permet de simuler la propagation des ondes élastiques pour une géométrie quelconque, comportant d'éventuelles hétérogénéités et anisotropies. On notera toutefois que la résolution néglige la viscosité ainsi que les effets de non-linéarités liés à la propagation.

### 6.A.3 Décomposition modale

Dans cette annexe, nous décrivons la méthode développée par Pagneux *et al.* [13] afin d'obtenir une décomposition du champ selon les différents modes de Lamb et ce, dans chacune des directions de propagation d'un guide d'onde bidimensionnel.

En considérant que la base formée par l'ensemble des modes de Lamb est complète [18], les composantes  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{12}$  des champs de déplacement et de contraintes se décomposent sur l'ensemble des modes selon l'équation,

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x_1) \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(x_2) \\ u_2^{(n)}(x_2) \\ \sigma_{11}^{(n)}(x_2) \\ \sigma_{12}^{(n)}(x_2) \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(x_1) \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{(n)}(x_2) \\ \tilde{u}_2^{(n)}(x_2) \\ \tilde{\sigma}_{11}^{(n)}(x_2) \\ \tilde{\sigma}_{12}^{(n)}(x_2) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

En exprimant les relations de symétrie entre les composantes du champ de déplacement d'une part,

$$u_1^{(n)} = -\tilde{u}_1^{(n)}, \quad u_2^{(n)} = \tilde{u}_2^{(n)}, \quad (6.7)$$

et celles du champ de contraintes d'autre part,

$$\sigma_{11}^{(n)} = -\tilde{\sigma}_{11}^{(n)}, \quad \sigma_{12}^{(n)} = \tilde{\sigma}_{12}^{(n)}, \quad (6.8)$$

il est possible de réécrire la relation (6.6) :

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \\ \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_n(x_1) u_1^{(n)}(x_2) \\ b_n(x_1) u_1^{(n)}(x_2) \\ b_n(x_1) \sigma_{11}^{(n)}(x_2) \\ a_n(x_1) \sigma_{12}^{(n)}(x_2) \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

où les coefficients  $a_n(x)$  et  $b_n(x)$ , sont définis par :

$$a_n(x) = A_n(x) - B_n(x), \quad (6.10)$$

et

$$b_n(x) = A_n(x) + B_n(x). \quad (6.11)$$

La relation de biorthogonalité introduite dans le chapitre précédent [cf. sous-partie 5.2.2, p. 123] permet alors d'écrire,

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_1) \mathbf{X}_n(x_2), \quad (6.12)$$

$$\mathbf{Y} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x_1) \mathbf{Y}_n(x_2), \quad (6.13)$$

et

$$(X_n|Y_n) = J_n \delta_{nm}, \quad (6.14)$$

où,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -\sigma_{11}(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} u_1^{(n)}(x_1, x_2) \\ \sigma_{12}^{(n)}(x_1, x_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} -\sigma_{11}^{(n)}(x_1, x_2) \\ u_2^{(n)}(x_1, x_2) \end{bmatrix},$$

et où le produit scalaire est défini par :

$$(X|Y) = \int_{-h}^h (-u_1 \sigma_{11} + \sigma_{12} u_2) dx_2.$$

Il est ainsi possible d'accéder aux coefficients  $a_n$  et  $b_n$  :

$$a_n J_n = (X|Y_n) \quad \text{et} \quad b_n J_n = (X|Y_n).$$

Les équations (6.10) et (6.11) fournissent les coefficients  $A_n$  et  $B_n$ , c'est-à-dire à l'amplitude de chacun des modes se propageant (ou étant atténués) respectivement dans le sens des  $x_1$  croissants et décroissants.

## Références bibliographiques

- [1] S. Bramhavar, C. Prada, A.A. Maznev, A.G. Every, T.B. Norris, and T.W. Murray. Negative refraction and focusing of elastic lamb waves at an interface. *Phys. Rev. B*, 83(1) :014106, 2011.
- [2] F.D. Philippe, T.W. Murray, and C. Prada. Focusing on plates : controlling guided waves using negative refraction. *Sci. Rep.*, 5 :11112, 2015.
- [3] C. Schaal and A. Mal. Lamb wave propagation in a plate with step discontinuities. *Wave Motion*, 66 :177–189, 2016.
- [4] B. Poddar and V. Giurgiutiu. Scattering of lamb waves from a discontinuity : An improved analytical approach. *Wave Motion*, 65 :79–91, 2016.
- [5] P.J. Torvik. Reflection of wave trains in semi-infinite plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 41(2) :346–353, 1967.
- [6] B.A. Auld and E.M. Tsao. A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate. *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, 24(5) :317–326, 1977.
- [7] R.D. Gregory and I. Gladwell. The reflection of a symmetric Rayleigh-Lamb wave at the fixed or free edge of a plate. *J. Elasticity*, 13(2) :185–206, 1983.
- [8] J.M. Galán and R. Abascal. Numerical simulation of Lamb wave scattering in semi-infinite plates. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 53(5) :1145–1173, 2002.
- [9] B. Morvan, N. Wilkie-Chancellor, H. Duflo, A. Tinel, and J. Duclos. Lamb wave reflection at the free edge of a plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(3) :1417–1425, 2003.
- [10] V. Pagneux. Revisiting the edge resonance for lamb waves in a semi-infinite plate. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120(2) :649–656, 2006.
- [11] <http://www.simsonic.fr>.
- [12] E. Bossy, M. Talmant, and P. Laugier. Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models. *J. Acoust. Soc. Am.*, 115(5) :2314–2324, 2004.
- [13] V. Pagneux and A. Maurel. Lamb wave propagation in inhomogeneous elastic waveguides. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 458(2024) :1913–1930, aug 2002.
- [14] Y. Lai, H. Chen, Z.-Q. Zhang, and C.T. Chan. Complementary media invisibility cloak that cloaks objects at a distance outside the cloaking shell. *Phys. Rev. Lett.*, 102(9) :093901, 2009.
- [15] J.B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Phys. Rev. Lett.*, 85(18) :3966, 2000.
- [16] D.E. Muller. A method for solving algebraic equations using an automatic computer. *Math. Tables Aids Comput.*, 10(56) :208–215, 1956.
- [17] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Math. Ann.*, 100(1) :32–74, 1928.
- [18] P. Kirrmann. On the completeness of lamb modes. *Journal of Elasticity*, 37(1) :39–69, 1995.

---

## Conclusion et perspectives générales

---

Au cours de nos travaux, nous nous sommes intéressés au contrôle de la propagation des ondes élastiques guidées dans les environnements complexes. Pour ce faire, nous avons suivi deux approches distinctes. Dans un premier temps, nous avons tiré profit de la complexité du milieu afin de manipuler les ondes à partir d'un contrôle cohérent du front d'onde incident. Dans un deuxième temps, ce contrôle s'est opéré en concevant le milieu de propagation spécialement à cet effet.

La possibilité de manipuler les ondes à travers des milieux complexes repose sur la mesure de la matrice de transmission. En milieu diffusant, l'étude de cette matrice sous le prisme de la théorie des matrices aléatoire a permis la prédiction du caractère bimodal de cette dernière. En d'autres termes, les canaux de propagation que peut emprunter une onde à travers un milieu diffusant, sont soit totalement ouverts soit complètement fermés. Toutefois, ce résultat prépondérant, en totale contradiction avec l'approche diffusive, n'avait jamais été vérifié étant donné les conditions expérimentales drastringues qu'il sous-tend. Dans le deuxième chapitre de ce manuscrit, nous présentons un système physique et des méthodes expérimentales permettant non seulement de remplir ces conditions, mais aussi de mesurer le champ à l'intérieur du milieu désordonné. Dès lors, il nous a été possible de mettre en évidence le caractère bimodal de cette matrice, puis de mesurer le champ associé aux canaux ouverts et fermés, de façon à illustrer le mécanisme d'interférence par lequel les prédictions classiques sont mises en défaut. Ces travaux s'inscrivent dans une dynamique encouragée par l'essor des *modulateurs spatiaux de lumière* et des possibilités qui en découlent en optique. L'apport des techniques de contrôle de front d'onde optique devrait permettre d'ajouter au système physique étudié la possibilité d'un contrôle cohérent du front d'onde. Il serait alors possible de générer physiquement les différents canaux propres.

Au cours des dernières années, la question du contrôle cohérent des fronts d'onde a été étendue au domaine temporel. C'est dans ce cadre que s'inscrit le troisième chapitre de ce manuscrit. Le système physique étudié dans la première partie de nos travaux permet d'accéder à toute l'information temporelle disponible sur le milieu considéré à travers la matrice des *temps de vol*. Nous avons ainsi pu mettre en évidence l'existence de canaux cohérents temporellement et spatialement dans des milieux réverbérants. En transmission, ces canaux permettent un transfert mieux contrôlé et sécurisé de l'information. En réflexion, ils constituent un outil complémentaire à la méthode DORT pour l'imagerie en milieu multi-cibles. La séparation est alors basée sur les *temps de*

## Conclusion générale

---

*retard* plutôt que sur la réflectivité des diffuseurs. Ces travaux offrent de nombreuses perspectives, tant fondamentales que pratiques. La maîtrise du temps de résidence d'un paquet d'onde au sein d'un milieu complexe est primordiale pour des applications telles que le stockage d'énergie, l'absorption cohérente ou la conception de laser aléatoires. Ces perspectives sont d'autant plus envisageable que l'accès aux *canaux particuliers* est peu sensible à l'unitarité de la matrice de diffusion.

La volonté de contrôler la propagation d'une onde en concevant le milieu à cet effet a donné naissance aux concepts de réfraction négative et de lentille parfaite. La notion de *milieux complémentaires* en a découlé quelques années plus tard avec, notamment, la possibilité d'annuler la propagation d'une onde sur une zone de l'espace. Les premières réalisations expérimentales de milieux à indices négatifs reposent sur l'utilisation de métamatériaux, architecturés à l'échelle sub-longueur d'onde. Toutefois, leur application demeure contrariée par les pertes associées à leur structure résonante. Face à ces difficultés, nous avons choisi d'utiliser une stratégie alternative, tirant profit des propriétés dispersives des ondes élastiques guidées dans les plaques. En effet, l'existence de modes de Lamb à vitesse de phase négative a récemment été mise à profit pour mettre en évidence les phénomènes de réfraction et de réflexion négative pour les ondes guidées.

Dans le chapitre 5, nous étudions théoriquement puis expérimentalement le phénomène de réflexion négative des ondes de Lamb sur le bord libre d'une plaque. Celle-ci est rendue possible par la résonance ZGV de la plaque et la coexistence au delà de cette fréquence de deux modes à vitesse de phase de signe opposé. Nous montrons notamment que non seulement, au dessus du point ZGV, la conversion entre ces deux modes est préférentielle, mais qu'elle tend à devenir parfaite lorsqu'on s'approche de celui-ci. L'étude expérimentale nous permet ensuite de démontrer les propriétés focalisantes qu'engendre la réflexion négative sur les bords libres d'une plaque. Enfin, nous démontrons expérimentalement qu'au voisinage du point ZGV, le bord libre se comporte comme un conjugeur de phase passif. Cette propriété est mise à profit pour montrer comment la réflexion négative peut masquer la présence de désordre dans une plaque, telle qu'une interface à la forme complexe ou un nuage de diffuseurs.

Le dernier chapitre s'attache à étudier l'approche des *milieux complémentaires* à partir de la réfraction négative des modes de Lamb. De façon à optimiser le processus de réfraction négative, nous commençons par optimiser la conversion entre modes *prograde* et *rétrograde* sur une discontinuité d'épaisseur. Dans la suite, nous examinons numériquement et expérimentalement l'approche des milieux complémentaires. Cette étude nous permet notamment d'annuler la propagation des ondes et de camoufler certaines zones du milieu de propagation. De futurs travaux s'inscriront dans la suite de cette thèse. Dans un premier temps, ces résultats, pour la plupart numériques devront être confirmés expérimentalement. Un second objectif sera ensuite d'étudier l'approche des *milieux complémentaires* en l'associant aux concepts de transformations conformes. L'épaisseur de la plaque permet en effet de contrôler la vitesse de phase des modes de Lamb. Ce faisant, il sera possible d'étendre le concept des milieux complémentaires à des milieux de taille finie. Enfin, le dernier point consiste à étendre ces travaux au contrôle du champ évanescent, dans l'esprit de la lentille parfaite initialement suggérée par Pendry.





## Résumé

Quelle que soit la nature des ondes utilisées et des milieux traversés, le contrôle de la propagation ondes est d'un intérêt majeur pour de nombreuses applications. D'une part, la complexité du milieu peut être exploitée en exerçant un contrôle cohérent du front d'onde incident. D'autre part, on peut forcer une onde à se propager suivant un chemin désiré en concevant soi-même le milieu de propagation. Dans cette thèse, nous étudions ces deux aspects à partir d'expériences ultrasons-laser mettant en jeu la propagation d'ondes de Lamb dans des plaques.

La propagation des ondes à travers un milieu diffusant est tout d'abord étudiée à partir de sa matrice de diffusion. Une prédiction théorique importante est l'existence de canaux de propagation totalement ouverts ou fermés. Une première partie de ces travaux consiste à démontrer expérimentalement ce résultat en mettant en évidence la possibilité de transmettre totalement une onde à travers un milieu désordonné. Dans un second temps, la mesure d'une matrice des temps de vol nous permet d'étudier ces canaux dans le domaine temporel. Ceux-ci donnent lieu à des paquets d'onde dont la cohérence spatiale et temporelle est conservée tout au long de leur propagation dans le milieu.

Le second volet de cette thèse consiste à tirer profit des phénomènes de réflexion et réfraction négative afin de contrôler la propagation des ondes de Lamb. D'une part, la réflexion négative est mise à profit pour réaliser une conjugaison de phase passive des ondes de Lamb. D'autre part, le concept des milieux complémentaires est exploré afin d'annuler la diffraction des ondes et ainsi camoufler certaines zones du milieu de propagation.

## Abstract

Whatever their nature or the propagation medium, controlling the propagation of waves is of fundamental interest for many applications. On the one hand, one can tame wave-fields in order to take advantage of the complexity of the medium. On the other hand, one can force waves along desired paths through a careful design of manmade materials. In this thesis, we study those two aspects on the basis of laser-ultrasonic experiments involving the propagation of Lamb waves in elastic plates.

The control of wave propagation through complex systems is first investigated by means of the scattering matrix approach. In diffusive media, theorists have demonstrated the existence of propagation channels either closed or open through which the wave can travel. The first part of this work present a direct experimental evidence of this result as well as the ability to fully transmit a wave through a disordered medium. In a second part, the measurement of the time-delay matrix allows the study of such channels in the time domain. They are shown to give rise to particle-like wave packets that remain focused in time and space throughout their trajectory in the medium.

The second part of this thesis consists in studying the concepts of negative reflection and refraction for the manipulation of Lamb wave propagation. On the one hand, negative reflection is taken advantage of to perform a passive phase conjugation of Lamb waves. On the other hand, the notion of complementary media is investigated in order to cancel the diffraction of waves and cloak some areas of the plate.