



**HAL**  
open science

# Imagerie ultrasonore multi-éléments de solides anisotropes et multiplement diffusants par analyse de la matrice de réflexion

Cecile Brutt

► **To cite this version:**

Cecile Brutt. Imagerie ultrasonore multi-éléments de solides anisotropes et multiplement diffusants par analyse de la matrice de réflexion. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2021. Français. NNT : 2021UPSLS084 . tel-03574386

**HAL Id: tel-03574386**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-03574386>**

Submitted on 15 Feb 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à l'ESPCI Paris

**Imagerie de solides anisotropes et multiples diffusants  
par analyse de la matrice de réflexion**

Soutenue par

**Cécile BRÜTT**

Le 17/12/2021

École doctorale n°564

**Physique en Île-de-France**

Spécialité

**Physique**

Composition du jury :

Emmanuel MOULIN

Professeur, IEMN, Valenciennes *Président du jury*

Jean-Marc CONOIR

Directeur de recherche, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Paris *Rapporteur*

Bing TIE

Chargée de recherche (HDR), CentraleSupélec, Gif-sur-Yvette *Rapporteuse*

Odile ABRAHAM

Ingénieure divisionnaire des TPE, GeoEND, Bouguenais *Examinatrice*

Frédéric PRIMA

Professeur, Institut de recherche de Chimie Paris, Paris *Examineur*

Claire PRADA

Directrice de recherche, Institut Langevin, Paris *Directrice de thèse*

Arnaud DERODE

Professeur, Institut Langevin, Paris *Co-directeur de thèse*

Alexandre AUBRY

Chargé de recherche, Institut Langevin, Paris *Co-encadrant de thèse*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Claire Prada, Alexandre Aubry, Arnaud Derode et Benoît Gérardin pour leur encadrement à l'Institut Langevin ainsi qu'à Safran durant toute la durée de ma thèse. Les connaissances scientifiques et le soutien que vous m'avez apportés durant ces 3 années ont fait de ma thèse une expérience très enrichissante et formatrice.

J'adresse mes remerciements à mes rapporteurs Jean-Marc Conoir et Bing Tie pour avoir relu attentivement mon manuscrit, ainsi qu'à mes examinateurs Emmanuel Moulin, Odile Abraham et Frédéric Prima pour leur implication. Je remercie l'ensemble des membres du jury d'avoir fait le déplacement pour ma soutenance pour permettre d'échanger sur mes travaux en présentiel.

Je remercie Michaël Piellard, Pierre Delaleau, Immanuel Von Thüngen et Jérôme Delfosse pour les riches discussions concernant la métallurgie du titane qui m'ont permis d'appréhender cette facette du sujet. Un grand merci également à William Lambert et Romain Pierrot pour leurs contributions tout au long de ma thèse, ainsi qu'à Sébastien Robert et Jérôme Laurent pour leur aide concernant les mesures avec une sonde 2D.

Enfin, je remercie l'ensemble des membres de l'Institut Langevin ainsi que mes collègues chez Safran pour le partage de leurs connaissances et leur soutien.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Contrôle non-destructif d'alliages de titane par ultrasons multi-éléments</b>	<b>3</b>
1.1 Utilisation des alliages de titane pour l'aéronautique	4
1.1.1 Microstructure des alliages de titane	4
1.1.2 Émergence et contrôle de défauts	7
1.2 Contrôle non-destructif des billettes de titane par ultrasons	10
1.2.1 Techniques mono-éléments	11
1.2.2 Limitations des techniques mono-éléments	14
1.2.3 Influence de la microstructure sur les mesures ultrasonores	15
1.3 Méthodes multi-éléments proposées pour améliorer la détection de défauts dans les alliages métalliques	17
1.3.1 Définition de la matrice de réflexion	18
1.3.2 État de l'art des méthodes matricielles pour le contrôle non-destructif	19
1.3.3 Techniques d'imagerie ultrasonore	21
1.4 Théorie et simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques dans les polycristaux	24
1.4.1 Équations fondamentales de la propagation	24
1.4.2 Simulations par éléments finis	25
1.4.3 Simulation par méthode de Monte-Carlo	27
1.5 Conclusion	27
Références bibliographiques	29
<b>2 Matrices de réflexion en milieu complexe</b>	<b>35</b>
2.1 Propagation d'ondes dans un milieu complexe	36
2.1.1 Milieu complexe et série de Born	37
2.1.2 Grandeurs moyennes	39
2.1.3 Matrice <b>T</b> et notion de diffuseur	43
2.1.4 Section efficace de diffusion	46
2.2 Simulation numérique du champ diffusé	48
2.2.1 Paramètres de la simulation	48
2.2.2 Série de Born numérique et convergence	49
2.2.3 Conservation de l'énergie	51
2.3 Propriétés des matrices de réflexion dans la base canonique	54
2.3.1 Propriétés de la matrice de diffusion simple	54

2.3.2	Propriétés de la diffusion multiple . . . . .	56
2.3.3	Matrices apparentes . . . . .	59
2.3.4	Influence de la diffusion récurrente sur le pic de rétrodiffusion cohérente . . . . .	63
2.4	Propriétés des matrices de réflexion dans la base focalisée . . . . .	65
2.4.1	Nouvelles méthodes d'analyse de la matrice de réflexion en milieu complexe . . . . .	65
2.4.2	Propriétés de la matrice de réflexion dans la base focalisée . . . . .	66
2.4.3	Simulation numérique de la matrice de réflexion dans la base focalisée . . . . .	67
2.4.4	Influence de la diffusion récurrente sur l'imagerie . . . . .	69
2.5	Conclusion . . . . .	72
	Références bibliographiques . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Effet de la diffusion multiple sur les propriétés de la matrice de réflexion</b> . . . . .	<b>77</b>
3.1	Estimateurs de la proportion de diffusion simple dans la base canonique . . . . .	78
3.1.1	Formulation de l'estimateur de diffusion simple . . . . .	78
3.1.2	Validité de l'ETDC . . . . .	81
3.1.3	Résidus de diffusion multiple dans la matrice filtrée . . . . .	81
3.1.4	Illustration de la projection sur l'ETDC . . . . .	84
3.1.5	Pente et lien avec le libre parcours moyen de diffusion . . . . .	87
3.2	Construction d'un ETDC dans la base focalisée . . . . .	88
3.2.1	État de l'art de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée . . . . .	89
3.2.2	Définition d'un ETDC en base focalisée . . . . .	91
3.2.3	Comparaison des estimateurs $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}_f$ . . . . .	94
3.3	Matrices expérimentales . . . . .	95
3.3.1	Milieu modèle : fils de nylon . . . . .	95
3.3.2	Billetteries de titane . . . . .	99
3.4	Cohérence spatiale du champ rétrodiffusé . . . . .	103
3.4.1	Calcul de la corrélation spatiale du champ . . . . .	103
3.4.2	Lien avec la base focalisée . . . . .	106
3.5	Conclusion . . . . .	109
	Références bibliographiques . . . . .	111
<b>4</b>	<b>Détermination locale de la direction du fibrage</b> . . . . .	<b>113</b>
4.1	État de l'art . . . . .	114
4.2	Algorithme de détermination de la direction du fibrage par mesure de l'intensité rétrodiffusée . . . . .	117
4.2.1	Théorie . . . . .	117
4.2.2	Algorithme proposé pour une sonde 2D . . . . .	119
4.3	Simulation numérique de la matrice de réflexion en milieu anisotrope . . . . .	120
4.3.1	Paramètres de la simulation . . . . .	120
4.3.2	Résultats de la simulation . . . . .	121
4.4	Résultats expérimentaux . . . . .	123
4.4.1	Billette d'alliages de titane . . . . .	123
4.4.2	Fils de nylon . . . . .	123
4.5	Effet de la diffusion multiple sur les mesures d'anisotropie . . . . .	125
4.5.1	Effet dans le plan $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$ . . . . .	125

---

4.5.2	Manifestation de la diffusion multiple dans le plan $\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{out}}$ . . . . .	127
4.6	Conclusion . . . . .	130
	Références bibliographiques . . . . .	132
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>135</b>





# Introduction générale

Le contrôle non-destructif (CND) est un domaine qui regroupe un ensemble de techniques visant à vérifier l'intégrité de matériaux ou de structures sans les modifier. Il peut être réalisé en utilisant des différents types d'ondes : optique, rayons X, thermique ou encore acoustique. Cette thèse se concentre sur le contrôle non-destructif par ultrasons pour inspecter les pièces en profondeur. Les premières applications industrielles utilisaient des transducteurs mono-éléments et un traitement du signal très basique pour détecter des défauts. Depuis une trentaine d'années, la recherche a permis des avancées importantes dans la technologie des réseaux de transducteurs. Couramment utilisés en imagerie médicale, ceux-ci commencent à émerger dans les contrôles industriels. En effet, ils offrent la possibilité de focaliser de façon adaptative et en tout point au sein de pièces complexes, permettant ainsi d'abaisser les seuils de détection et d'augmenter les zones accessibles au contrôle. Cette thèse, dans la continuité de celle d'Aurélien Baelde, étudie l'apport des techniques multi-éléments au contrôle ultrasonore de pièces en alliages de titane. Elle s'intéresse aux propriétés de la matrice des réponses inter-éléments, autrement appelée matrice de réflexion, acquise à l'aide d'une barrette linéaire ou d'un réseau de transducteurs bidimensionnel.

L'utilisation des alliages de titane est croissante dans le domaine de l'aéronautique grâce à leurs propriétés mécaniques intéressantes. Des contrôles sont effectués à plusieurs stades de la fabrication des pièces (billette, pré-usiné, pièce usinée) pour maximiser la détection des défauts. En raison du risque d'endommagement lié aux expositions répétées à des conditions difficiles (fortes pressions, températures élevées, etc.), les pièces peuvent également être contrôlées au cours de leur utilisation. Les alliages de titane sont des milieux polycristallins dans lesquels la propagation ultrasonore peut s'avérer complexe, les zones cristallines présentant des impédances acoustiques différentes. L'objectif de cette thèse est d'analyser la réponse ultrasonore de pièces en alliages de titane et de traiter les signaux reçus pour caractériser leur microstructure. Deux phénomènes physiques engendrés par la microstructure sont étudiés : la génération de diffusion multiple et l'anisotropie de la diffusion liée au fibrage.

Dans la thèse précédente, Aurélien Baelde avait mis en évidence deux propriétés importantes des alliages de titane : le premier est qu'aux fréquences ultrasonores d'inspection, la diffusion multiple est significative et contribue aux signaux rétrodiffusés. Ceci entraîne un bruit de structure complexe qui peut masquer l'écho d'un éventuel défaut. En se basant sur les travaux d'Aubry *et al.*, il a introduit un estimateur de la proportion de diffusion multiple calculée à partir de la matrice des réponses inter-éléments et l'a appliqué aux alliages de titane. Le second résultat est la possibilité de mesurer la direction privilégiée de la mi-

crostructure (fibrage) grâce à une mesure de l'intensité rétrodiffusée. Une partie importante du travail présenté dans ce manuscrit aura consisté à comprendre et modéliser ces résultats grâce à une simulation numérique simple mettant en jeu un champ scalaire et des diffuseurs isotropes. Le but de ce modèle n'est pas de reproduire la microstructure très complexe des alliages de titane, mais au contraire de simplifier le problème pour mettre en avant les propriétés des grandeurs d'intérêt. Il apporte un éclairage sur les résultats expérimentaux, à la fois sur les problématiques de diffusion multiple et d'anisotropie.

Le premier chapitre présente tout d'abord la microstructure des alliages de titane, très complexe à plusieurs échelles (colonies, grains, macrozones, etc.) et dépendante du forgeage. Elle influence très largement les propriétés des signaux ultrasonores rétrodiffusés, par la présence de diffusion multiple et d'anisotropie. L'enjeu majeur du CND est de parvenir à détecter les défauts malgré cette complexité. Un état de l'art des types de défauts et de leurs origines est proposé, puis les méthodes de CND par ultrasons développées à la fois dans un contexte industriel et dans le domaine de la recherche sont présentées. Enfin, une revue de techniques de simulation numérique utilisées pour comprendre la réponse d'un milieu polycristallin à une onde ultrasonore est réalisée.

Le second chapitre présente la problématique de la diffusion multiple d'un point de vue théorique et rappelle les équations régissant la propagation d'une onde en milieu complexe. Une simulation numérique permettant le calcul des matrices de réflexion en régime de diffusion multiple pour un milieu modèle composé d'un ensemble de diffuseurs fluides isotropes dont les positions sont choisies aléatoirement est ensuite décrite. L'avantage de cette simulation est qu'elle permet de calculer les matrices de réflexion par ordre de diffusion (simple, double, triple, etc.) en plus de la matrice de diffusion totale. Cela permet d'étudier les propriétés de chaque ordre de diffusion ainsi que la corrélation entre diffusion simple et diffusion multiple. Ce chapitre met également en avant le rôle majeur de la diffusion récurrente, composante de la diffusion multiple dont les propriétés s'apparentent à de la diffusion simple.

Le troisième chapitre se base sur la simulation numérique pour étudier les estimateurs de la proportion de diffusion simple introduits par Aubry *et al.* et Baelde *et al.* et leurs biais. La simulation permet également d'établir une relation entre la décroissance de ces estimateurs avec le temps et le libre parcours moyen de diffusion. Les estimateurs de la proportion de diffusion simple sont ensuite étudiés dans un nouvel espace de matrices, la base focalisée, qui permet de les obtenir localement. Ces grandeurs sont également calculées à partir de mesures effectuées dans un milieu modèle (forêt de fils de nylon) et des demi-billetes en alliages de titane. Enfin, la dernière partie du chapitre étudie la corrélation spatiale du champ rétrodiffusé, dont les propriétés renseignent également sur le poids de la diffusion multiple.

Le quatrième chapitre porte sur la seconde thématique : la détermination de l'orientation privilégiée de la microstructure, appelée fibrage. L'utilisation d'une sonde matricielle permet de représenter la matrice de réflexion dans un espace d'ondes planes qui renseigne sur l'orientation tridimensionnelle locale du fibrage. La théorie sous-jacente est tout d'abord présentée et la simulation numérique est à nouveau exploitée pour confirmer la validité de l'algorithme lorsque la diffusion simple domine. Une ouverture sur la détermination de la direction du fibrage en régime de diffusion multiple est finalement proposée.

# Chapitre 1

## Contrôle non-destructif d'alliages de titane par ultrasons multi-éléments

### Sommaire

---

<b>1.1 Utilisation des alliages de titane pour l'aéronautique</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1.1 Microstructure des alliages de titane . . . . .	4
1.1.2 Émergence et contrôle de défauts . . . . .	7
<b>1.2 Contrôle non-destructif des billettes de titane par ultrasons</b> . . . . .	<b>10</b>
1.2.1 Techniques mono-éléments . . . . .	11
1.2.2 Limitations des techniques mono-éléments . . . . .	14
1.2.3 Influence de la microstructure sur les mesures ultrasonores . . . . .	15
<b>1.3 Méthodes multi-éléments proposées pour améliorer la détection de défauts dans les alliages métalliques</b> . . . . .	<b>17</b>
1.3.1 Définition de la matrice de réflexion . . . . .	18
1.3.2 État de l'art des méthodes matricielles pour le contrôle non-destructif . . . . .	19
1.3.3 Techniques d'imagerie ultrasonore . . . . .	21
<b>1.4 Théorie et simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques dans les polycristaux</b> . . . . .	<b>24</b>
1.4.1 Équations fondamentales de la propagation . . . . .	24
1.4.2 Simulations par éléments finis . . . . .	25
1.4.3 Simulation par méthode de Monte-Carlo . . . . .	27
<b>1.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>Références bibliographiques</b> . . . . .	<b>29</b>

---

Ce premier chapitre décrit la microstructure des alliages de titane, matériaux polycristallins complexes dont la structure dépend très largement des conditions de température lors du forgeage. Des défauts de la matière peuvent apparaître à différentes étapes de l'élaboration des pièces en titane et les ultrasons sont souvent décrits comme un moyen efficace de détection de ces défauts. Plusieurs thèses ont été menées sur ce sujet depuis les années 90 et ont conduit au développement de techniques dont les performances dépassent largement celles de l'inspection conventionnelle en contrôle non-destructif (retournement temporel, méthode DORT). Plus récemment, l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs a permis la simulation réaliste de la propagation d'ondes dans les polycristaux, permettant ainsi de mieux comprendre les phénomènes impactant la détection des défauts. Une revue de ces techniques est proposée et sert de socle au développement de méthodes qui seront utilisées dans les prochains chapitres.

## 1.1 Utilisation des alliages de titane pour l'aéronautique

Le titane est un élément chimique abondant sur Terre et aux propriétés physiques intéressantes : il s'agit d'un matériau léger (de densité deux fois plus faible que l'acier), biocompatible, supportant de fortes contraintes mécaniques et résistant à la corrosion grâce à la mince couche d'oxyde qui se forme à sa surface. Il est de plus en plus utilisé sous forme d'alliages dans le domaine aéronautique, en particulier pour la conception des éléments de moteur ou de trains d'atterrissage. Néanmoins, son prix élevé et sa difficulté d'approvisionnement le mettent en concurrence avec d'autres matériaux, tels que les composites ou les superalliages à base de nickel. Récemment, des avancées sur la fabrication additive de pièces en titane ont mis en avant de nouveaux procédés de création de pièces complexes. Ainsi, ce matériau est d'un grand intérêt industriel et son contrôle par des procédés non-destructifs est un enjeu critique pour le domaine aéronautique.

### 1.1.1 Microstructure des alliages de titane

Le titane pur existe à l'état solide sous deux formes cristallines nommées  $\alpha$  et  $\beta$ , illustrées Fig. 1.1. La transition entre ces deux phases s'effectue à une température de 882°C et est nommée transus  $\beta$ . La phase  $\alpha$  est présente à une température inférieure au transus  $\beta$  sous forme hexagonale compacte. La phase  $\beta$  est stable à une température supérieure au transus  $\beta$  et est de structure cubique centrée. La transition est displacive, c'est-à-dire sans diffusion, elle ne nécessite qu'un petit déplacement des atomes par cisaillement. Si la pièce en titane ne subit pas de forgeage et si son refroidissement est assez lent, les relations de Burgers [1] lient les directions cristallographiques entre les phases  $\alpha$  et  $\beta$ . Au total, il existe 12 variants  $\alpha$ , c'est-à-dire 12 orientations possibles de la phase  $\alpha$  pour une phase  $\beta$  donnée. Les alliages de titane peuvent contenir à la fois de la phase  $\alpha$  et  $\beta$ , grâce à l'addition d'éléments chimiques dans la matrice de titane qui stabilisent l'existence d'une proportion de phase  $\beta$  sous le transus  $\beta$ .

La concentration relative de ces deux phases influence grandement les propriétés de l'alliage [2, 3] (cf. Fig. 1.2). Le choix des éléments chimiques ajoutés à la matrice de titane permet de modifier cette concentration : certains éléments favorisent la phase  $\alpha$  en augmentant la tem-

pérature du transus (éléments  $\alpha$ -gènes : aluminium, oxygène, carbone, azote...) et d'autres la phase  $\beta$  en diminuant la température du transus (éléments  $\beta$ -gènes : manganèse, vanadium, molybdène, niobium, cobalt, tungstène, fer, silicium, nickel, cuivre...) [4].

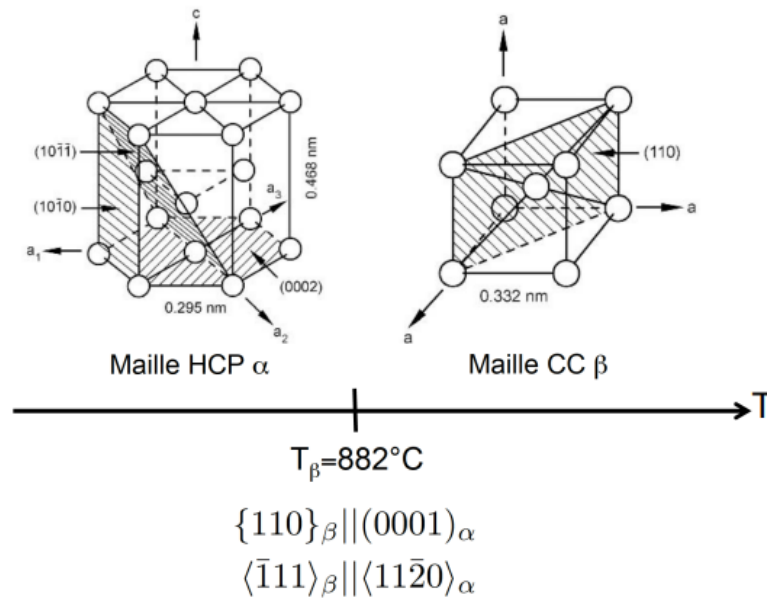


FIGURE 1.1 – Mailles élémentaires des deux phases  $\alpha$  et  $\beta$  et les relations d'orientation, issu de [2].

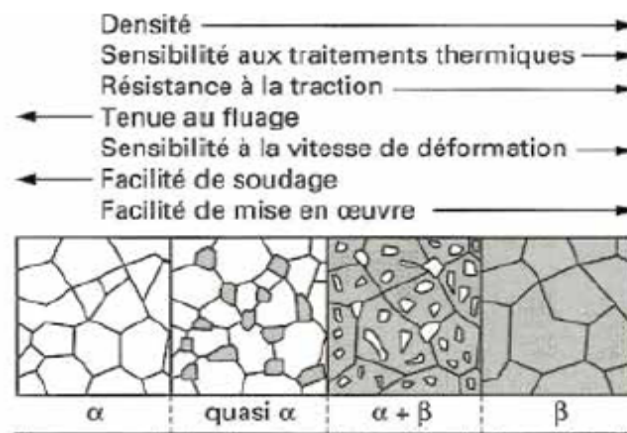


FIGURE 1.2 – Comportement des phases  $\alpha$  et  $\beta$ , issu de [3].

- ▶ Les alliages contenant majoritairement des éléments  $\alpha$ -gènes sont dits « proches  $\alpha$  » ; ils sont stables à haute température.
- ▶ Ceux contenant une proportion proche d'éléments  $\alpha$ -gènes et  $\beta$ -gènes sont dits «  $\alpha + \beta$  ». C'est le cas du TA6V (ou Ti-6Al-4V), l'alliage de titane le plus utilisé dans l'industrie et très largement exploité dans le domaine aéronautique du fait de ses très bonnes résistances mécanique et à la corrosion. Les éléments additionnels sont l'aluminium

(environ 6%) et le vanadium (environ 4%) et en plus faible quantité le carbone, le fer, l'oxygène et l'azote.

- ▶ Les alliages contenant principalement des éléments  $\beta$ -gènes sont dits « proches  $\beta$  ». Ce sont des alliages difficiles à élaborer et chers, mais très résistants mécaniquement. Le Ti17 est l'un de ces alliages les plus utilisés ; les éléments ajoutés à la matrice de titane sont majoritairement l'aluminium, l'étain, le zirconium, le molybdène et le chrome.

### Composition de la microstructure

Lors du forgeage, le titane est chauffé à une température supérieure au transus  $\beta$  : la matière est alors constituée de grains  $\beta$  de taille centimétrique. En refroidissant, la phase  $\alpha$  s'organise sous forme de lamelles qui se positionnent à plusieurs positions (cf. Fig. 1.3) :

- ▶ le long de joints des ex-grains  $\beta$  (phase  $\alpha_{GB}$  - *grain boundary*) ;
- ▶ à partir des joints de grains vers l'intérieur d'un ex-grain  $\beta$  (phase  $\alpha_{WGB}$  - *Widmanstätten grain boundary*) ;
- ▶ au centre d'un ex-grain  $\beta$  (phase  $\alpha_{WI}$  - *Widmanstätten intragranular*).

Ce processus de croissance conserve la trace de anciens grains  $\beta$ . L'ensemble des lamelles adjacentes qui possèdent les mêmes orientations cristallographiques et morphologiques est appelée « colonie ». Entre ces dernières, il subsiste des résidus de phase  $\beta$  initiale.

Lors de la solidification, l'alliage est constitué de très gros ex-grains  $\beta$  occupés de colonies de lamelles très épaisses du fait du refroidissement lent (cf. Fig. 1.3)(b)). Des opérations de déformations à chaud (corroyage) sont nécessaires afin d'obtenir une microstructure adéquate pour la fabrication de pièces aéronautiques. Lors de ce processus de corroyage dit *de conversion*, les alliages de titane subissent plusieurs cycles de déformation à des températures situées au-dessus ou en-dessous du transus selon les propriétés souhaitées. L'un des objectifs de ce procédé est de casser les ex-grains  $\beta$  ayant des dimensions centimétriques : une taille caractéristique de l'ordre de la dizaine ou centaine de micromètres est essentielle pour que le matériau ait des propriétés mécaniques suffisantes. Ce processus permet également d'obtenir des microstructures particulières selon les applications visées.

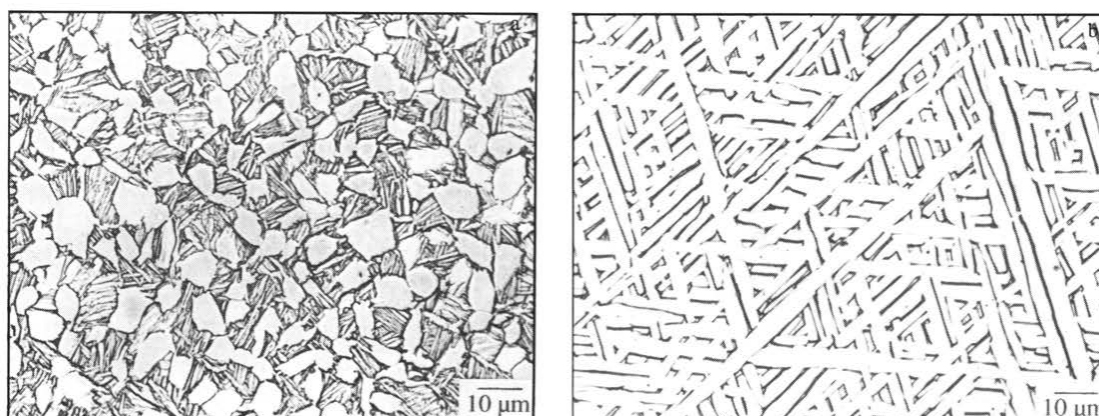


FIGURE 1.3 – Différentes morphologies de la phase  $\alpha$  dans le TA6V pour différents processus thermo-mécaniques, issu de [4].

Les alliages de titane sont donc des matériaux multi-échelles : lamelle ( $\approx 10 \mu\text{m}$ ), colonie ( $\approx 100 \mu\text{m}$ ), grain ou cristallite (domaine continu de même orientation cristallographique) et même macrozone (région de plusieurs ex-grains  $\beta$  qui possèdent une orientation cristallographique proche, souvent millimétrique voire centimétrique). Ces microstructures d'une grande complexité ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et de modélisation pour mieux les comprendre et les prédire [5–8].

### Morphologie et cristallographie de la microstructure

Les grains des alliages de titane sont malléables : ils se déforment et se déplacent lors du forgeage, ce qui crée des directions d'orientation privilégiées dans le matériau. Le fibrage correspond à l'orientation morphologique préférentielle de ces grains, qui est souvent similaire à la direction d'écoulement de la matière lors du forgeage. Il peut être observé grâce à des micrographies (cf. Fig. 1.4(a) et (b)) ou, à plus grande échelle, à partir de macrographies (Fig. 1.5). La micrographie d'une billette de TA6V (Fig. 1.4(a)) montre une orientation privilégiée des grains de long de l'axe de la billette, définissant ainsi un fibrage marqué. Au contraire, dans une billette de Ti17 (Fig. 1.4(b)), les grains apparaissent isotropes.

Dans certains cas, les plans cristallographiques peuvent également avoir tendance à s'aligner lors du forgeage : cela définit alors une texture cristallographique. La cristallographie de la microstructure peut être visualisée par microscopie optique ou par EBSD (*Electron Backscatter Diffraction*) sur une zone de l'ordre de  $1 \text{ mm}^2$  [9] (cf. Fig. 1.4(c) et (d)). L'un des deux échantillons d'alliage de titane (TA6V) présente des macrozones allongées, donc anisotropes ; au contraire, l'alliage de Ti17 présente une orientation équiaxe, donc isotrope. Ainsi, la billette de TA6V présente une texture cristallographique alignée avec le fibrage morphologique tandis que le Ti17 ne possède ni fibrage ni texture cristallographique marqués. La cristallographie semble avoir une forte influence sur les paramètres mécaniques du matériau : Bridier *et al.* [10] ont montré que le module d'Young de la phase  $\alpha$  pure peut varier de près de 50% en fonction de l'axe de sollicitation et la direction principale de la structure hexagonale de la phase  $\alpha$  (axe  $c$  de la figure 1.1).

### 1.1.2 Émergence et contrôle de défauts

Le 19 juillet 1989, un crash meurtrier du vol United Airlines 232 a eu lieu aux États-Unis. Le rapport du Conseil national de la sécurité des transports américain (*National Transportation Safety Board*, NTSB) a établi que le disque de soufflante d'un moteur s'est désintégré en morceaux qui ont endommagé le circuit hydraulique de l'avion, nécessaire au contrôle des commandes de vol [11]. La pièce défaillante a été retrouvée et présentait une crique de fatigue. Celle-ci a pour origine microscopique un défaut appelé hard- $\alpha$ , zone de phase  $\alpha$  stabilisée par un élément chimique (oxygène, azote...) inséré dans l'alliage de titane à chaud (cf. Fig. 1.6). Ce type de défaut est très difficile à détecter car les propriétés de cette phase  $\alpha$  enrichie diffèrent peu de la phase  $\alpha$  standard ; pourtant, un hard- $\alpha$  de seulement quelques millimètres est source de fissures lorsque la pièce est sollicitée mécaniquement [12].



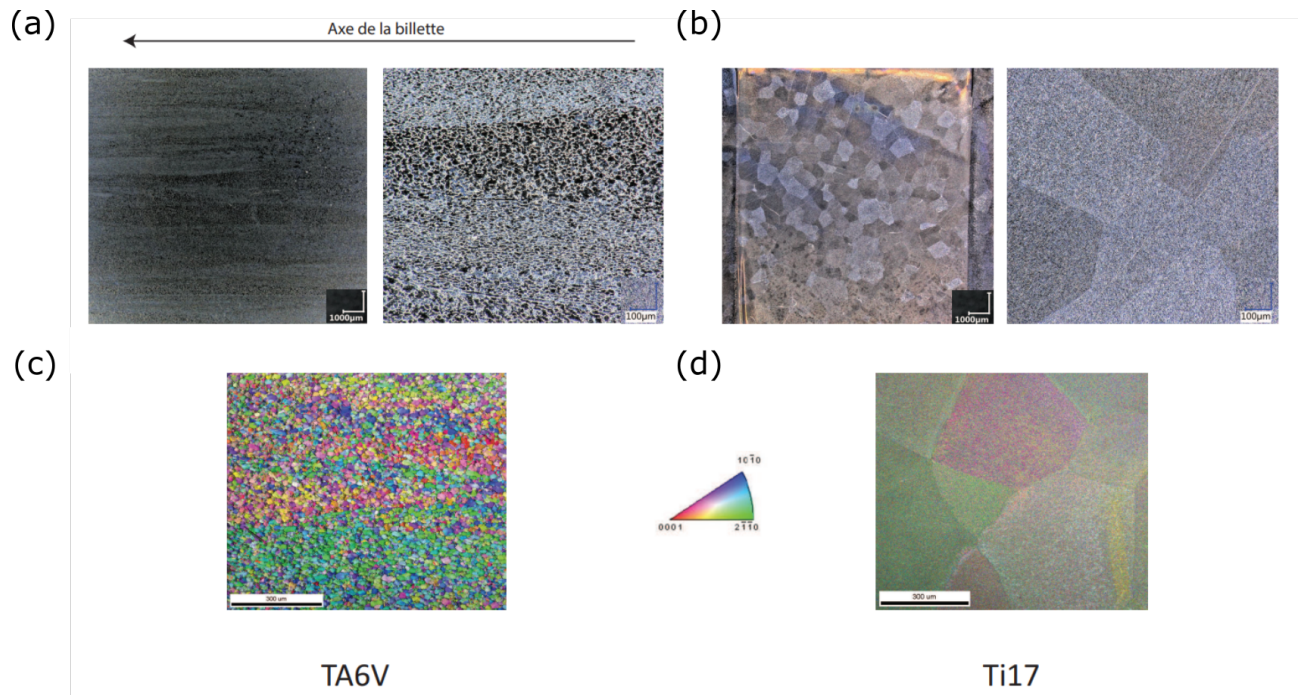


FIGURE 1.4 – Observation par microscopie optique ((a) et (b)) et EBSD ((c) et (d)) de deux échantillons d'alliages de titane, qui présentent une structure isotrope (Ti17, droite) et anisotrope (TA6V, gauche), issu de [9].

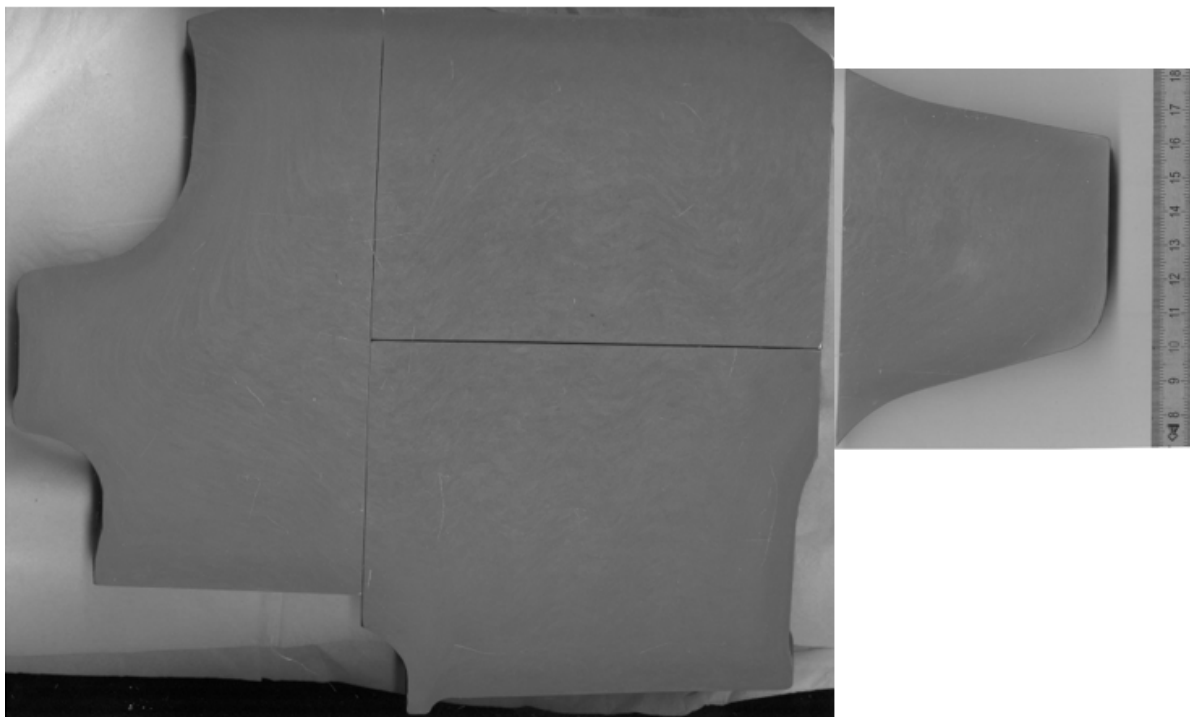


FIGURE 1.5 – Macrographie d'une pièce en TA6V : le fibrage est visible au centre de la pièce.

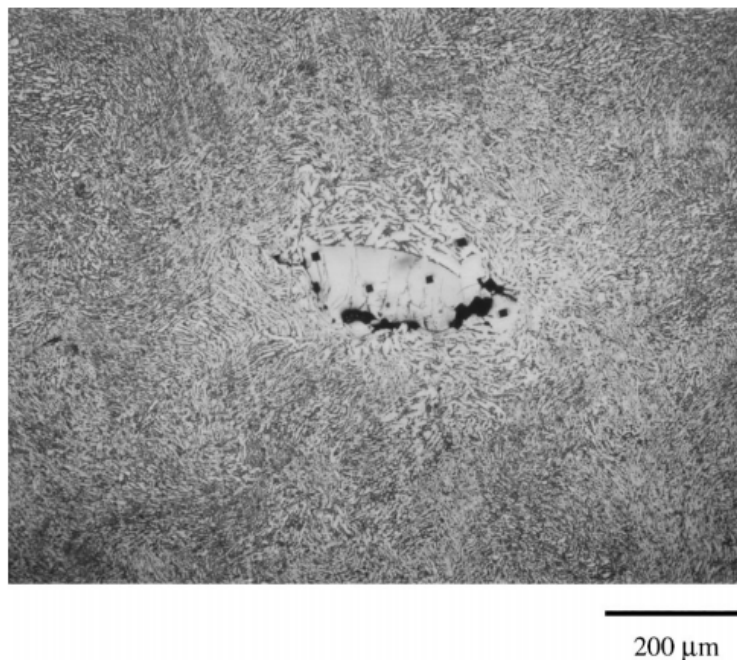


FIGURE 1.6 – Hard- $\alpha$  stabilisé par un excès d'azote dans un alliage de titane, issu de [12].

Le 30 septembre 2017, un autre accident a eu lieu sur un avion AIRBUS A380-861 menant à l'atterrissage d'urgence de l'appareil au Canada. Un rapport complet du Bureau d'Enquêtes et d'Analyses pour la sécurité de l'aviation civile (BEA) [13] a été rédigé afin de déterminer l'origine du problème et de fournir des recommandations aux avionneurs et équipementiers aéronautiques. Ce rapport met en évidence que l'accident est dû à une fissure dans une pièce de TA6V, le moyeu de la soufflante d'un moteur. L'origine de cette fissure est une macrozone de taille relativement importante, appelée *Microtextured Region* (MTR) et orientée dans une direction favorable à l'apparition de défauts (cf. Fig. 1.7). La fissure s'est propagée par effet *cold dwell* (fluage à froid), c'est-à-dire sous contrainte continue pendant un temps long [14]. Le TA6V n'était pas connu pour être soumis à l'effet *cold dwell* de part sa structure  $\alpha + \beta$ ; il s'agit d'une première mise en cause de ce type d'alliage dans cette problématique. Le Biavant *et al.* [15] ont étudié les fissures de fatigue dans le TA6V et ont montré que les macrozones sont en effet des zones favorables à leur amorçage. Le processus de création de macrozones reste incertain, mais les auteurs supposent qu'il est lié à la présence d'ex-grains  $\beta$ .

Après chacun de ces accidents, les experts ont demandé aux motoristes d'améliorer leurs procédés de fabrication de ces pièces critiques et la détection de défauts, notamment dans les pièces en alliages de titane. Les défauts peuvent apparaître à plusieurs étapes de la fabrication des pièces :

- Les lingots d'alliages de titane sont élaborés par fusion d'éponges de titane et des éléments additionnels qui permettent d'obtenir les propriétés souhaitées. C'est à cette étape, lorsque l'alliage est à l'état fondu, que des défauts de type hard- $\alpha$  ou des ségrégations peuvent apparaître.

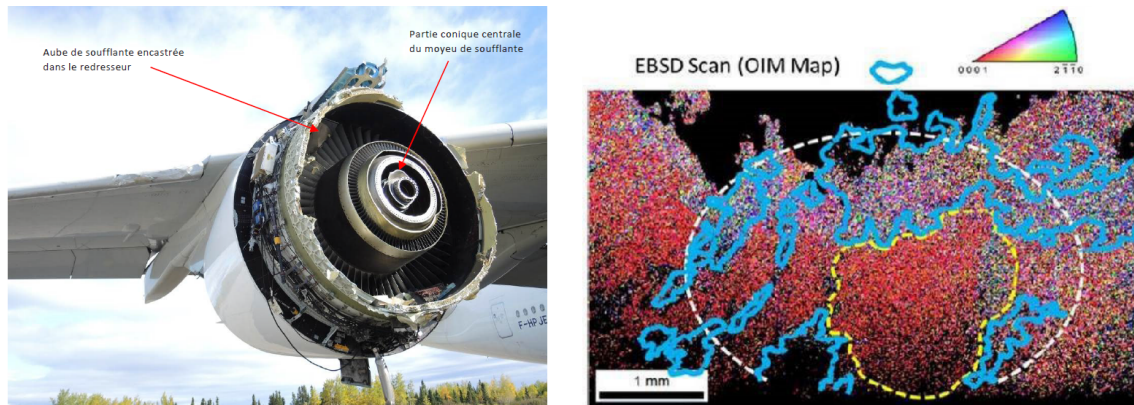


FIGURE 1.7 – Extraits du rapport du BEA [13] : photographie de l'avion (gauche) et EBSD de la pièce mise en cause avec visualisation de la macrozone (pointillés jaunes, figure de droite).

- ▶ Les lingots sont ensuite étirés en billettes de diamètre inférieur. Lors du processus, le fibrage peut suivre la direction d'élongation mécanique de manière très prononcée. La texture cristallographique peut également devenir davantage anisotrope, conduisant potentiellement à des MTR.
- ▶ Les billettes à nouveau forgées, pré-usinées puis usinées avant de prendre leur forme finale. Les étapes d'usinage sont critiques pour l'état de surface.
- ▶ Lors de l'utilisation de la pièce, des contraintes mécaniques peuvent favoriser l'apparition de défaut à partir de sites fragiles, comme des fissures ou des criques [7, 10, 15].

L'amorçage et la propagation des fissures dans un alliage de titane sous l'effet de la fatigue sont des processus très complexes, qui ont fait l'objet de plusieurs études [15, 16]. Ils dépendent à la fois du forgeage - donc de la microstructure - et du type de contraintes mécaniques appliquées au matériau. Le Biavant-Guerrier *et al.* [15] ont montré que les macrozones sont des zones d'amorçage de fissures privilégiées dans le TA6V; ces fissures croissent ensuite par propagation ou par coalescence. Dans le Ti17, Delfosse *et al.* [16] ont montré que des microstructures particulières étaient source de microfissures, qui pouvaient ensuite croître par coalescence. Dans ces deux études, des travaux de modélisation ont été réalisés pour mieux comprendre l'effet de la microstructure sur la fragilité mécanique des alliages de titane.

## 1.2 Contrôle non-destructif des billettes de titane par ultrasons

L'inspection par ondes ultrasonores est une technique privilégiée pour le contrôle non-destructif volumique de pièces en alliages de titane. La fréquence des sondes couramment utilisées pour réaliser les inspections (de 2 à 10 MHz) est choisie pour que la longueur d'onde soit de l'ordre du millimètre, ce qui correspond à la taille des défauts recherchés. En effet, il est admis dans la littérature [17] que les ondes ultrasonores interagissent préférentiellement avec des objets de dimensions comparables à la longueur d'onde. Le petit diamètre des billettes

(inférieur à 33 cm [18]) permet l'inspection par ultrasons jusqu'à leur centre afin de détecter des fissures ou des vides qui seraient présents, par exemple autour des hard- $\alpha$ . Le BEA indique également que le contrôle par ultrasons est à privilégier pour améliorer la détection des MTR [13].

### 1.2.1 Techniques mono-éléments

Les ondes ultrasonores sont des ondes élastiques, qui résultent d'une déformation locale de la matière. Une sonde ultrasonore est composée d'un ou plusieurs éléments piézoélectriques qui peuvent à la fois émettre et détecter une onde. Un signal ultrasonore représente l'amplitude du champ de pression détectée au cours du temps. L'inspection d'une pièce consiste tout d'abord à émettre une onde grâce à un ou plusieurs éléments piézoélectriques; cette onde se propage dans le matériau de densité  $\rho_0$  à la vitesse  $c_0$  supposée homogène. Lorsqu'elle rencontre un milieu d'impédance acoustique  $Z_1 = \rho_1 c_1$  différente de l'impédance  $Z_0 = \rho_0 c_0$  du milieu de propagation initial, elle est diffusée dans différentes directions. Si une partie de l'onde est rétrodiffusée en direction d'un élément piézoélectrique utilisé comme capteur, celle-ci est détectée et un pic d'amplitude est présent dans le signal mesuré. La plupart des inspections sont réalisées *en immersion*, c'est-à-dire que la pièce est placée dans une cuve d'eau pour simplifier et automatiser le processus de contrôle.

Dans le cas très simple où une onde longitudinale rencontre une unique interface plane normale à sa direction de propagation, le coefficient de réflexion en pression s'écrit

$$r_\phi = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_0 + Z_1}. \quad (1.1)$$

Ainsi, plus la rupture d'impédance est importante, plus l'onde rétrodiffusée est d'amplitude élevée et plus la détection est aisée. Un contraste titane/air, présent pour une fissure ou un vide par exemple, est donc détecté plus facilement qu'un hard- $\alpha$  (contraste entre deux alliages de titane de composition chimique légèrement différente). Margetan *et al.* [19] ont montré qu'une inclusion présentant 1% en masse supplémentaire d'azote présente une augmentation de densité de l'ordre de 1% et de vitesse longitudinale de 3%. Un hard- $\alpha$  ayant une variation de quelques pourcents de la masse d'azote, les variations d'impédance acoustique sont donc très faibles.

### Types d'ondes acoustiques

Dans un milieu élastique solide homogène et isotrope, deux types d'ondes de volume existent : les ondes longitudinales (ondes de pression) et les ondes transverses. Ces deux ondes diffèrent par leur polarisation et possèdent une vitesse de propagation et une atténuation différentes. Lors d'une inspection en immersion, la sonde génère une onde longitudinale qui se propage dans l'eau; si son incidence n'est pas normale à l'interface avec la pièce, deux ondes sont générées dans le solide : une onde longitudinale et une onde transverse (conversion de modes). Ces dernières peuvent se propager dans le matériau si leur angle d'incidence est inférieur à l'angle critique et si elles ne sont pas trop atténuées. De plus, à chaque fois que l'une de ces ondes rencontre une rupture d'impédance, une onde longitudinale et une onde

transverse sont générées. Le contrôle d'une pièce peut être réalisé à l'aide des ondes longitudinales ou transverses, voire une combinaison des deux pour augmenter la probabilité de détection d'un défaut.

### Technique d'inspection normalisée

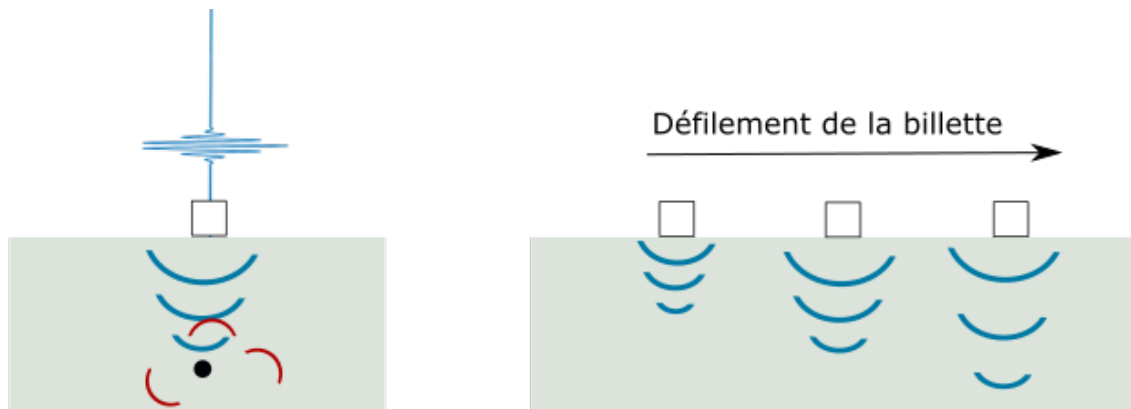


FIGURE 1.8 – Gauche : schéma d'inspection par mono-élément (onde incidente en bleu, défaut en noir et onde diffusée en rouge); droite : imagerie multi-zones avec 3 transducteurs mono-éléments focalisés à 3 profondeurs différentes.

La technique d'inspection de billettes de titane couramment utilisée dans l'industrie est une méthode multizones, proposée par Nieters *et al.* [18] en 1995 (cf. Fig. 1.8). Elle requiert l'utilisation de plusieurs sondes mono-éléments (un seul élément piezoélectrique par sonde) pilotées individuellement. Pour augmenter la probabilité de détection d'un défaut, chaque mono-élément génère un faisceau ultrasonore focalisé à une profondeur donnée afin de concentrer l'énergie acoustique dans une petite zone. L'intérêt de la focalisation réside dans le fait que si une rupture d'impédance est présente, davantage d'énergie est rétrodiffusée par rapport à un transducteur non focalisé. La billette défile sous les transducteurs à grande vitesse tout en tournant autour de son axe (jusqu'à 30 tours par minute [18]), ce qui permet d'inspecter la totalité de son volume. Pour chaque transducteur, une cartographie des maxima d'amplitude par zone est affichée au cours du temps et une personne repère les indications correspondant à un niveau considéré comme anormal de signal rétrodiffusé et donc potentiellement à un défaut. La figure 1.9 montre les signaux enregistrés par 5 sondes mono-éléments focalisées à des profondeurs différentes [18]. Les signaux des voies 1 à 4 présentent seulement des petites variations dues au bruit électronique et au bruit de structure (voir section 1.2.3), tandis que l'on observe un pic d'amplitude significatif sur le signal enregistré sur la voie 5, signature d'une rupture d'impédance anormale. Selon la forme et de l'amplitude du signal, des personnes expérimentées peuvent estimer la taille du défaut et sa nature; cette détermination reste néanmoins subjective et difficilement automatisable.

Une inspection est également réalisée sur les pièces d'alliages de titane de forme plus complexe (pré-usiné). Le plan d'inspection détaille les différentes positions où la sonde doit être placée pour s'assurer que les tirs acoustiques permettent d'en contrôler l'ensemble. Il prend en compte la géométrie de la pièce (la propagation des ultrasons peut être gênée dans les

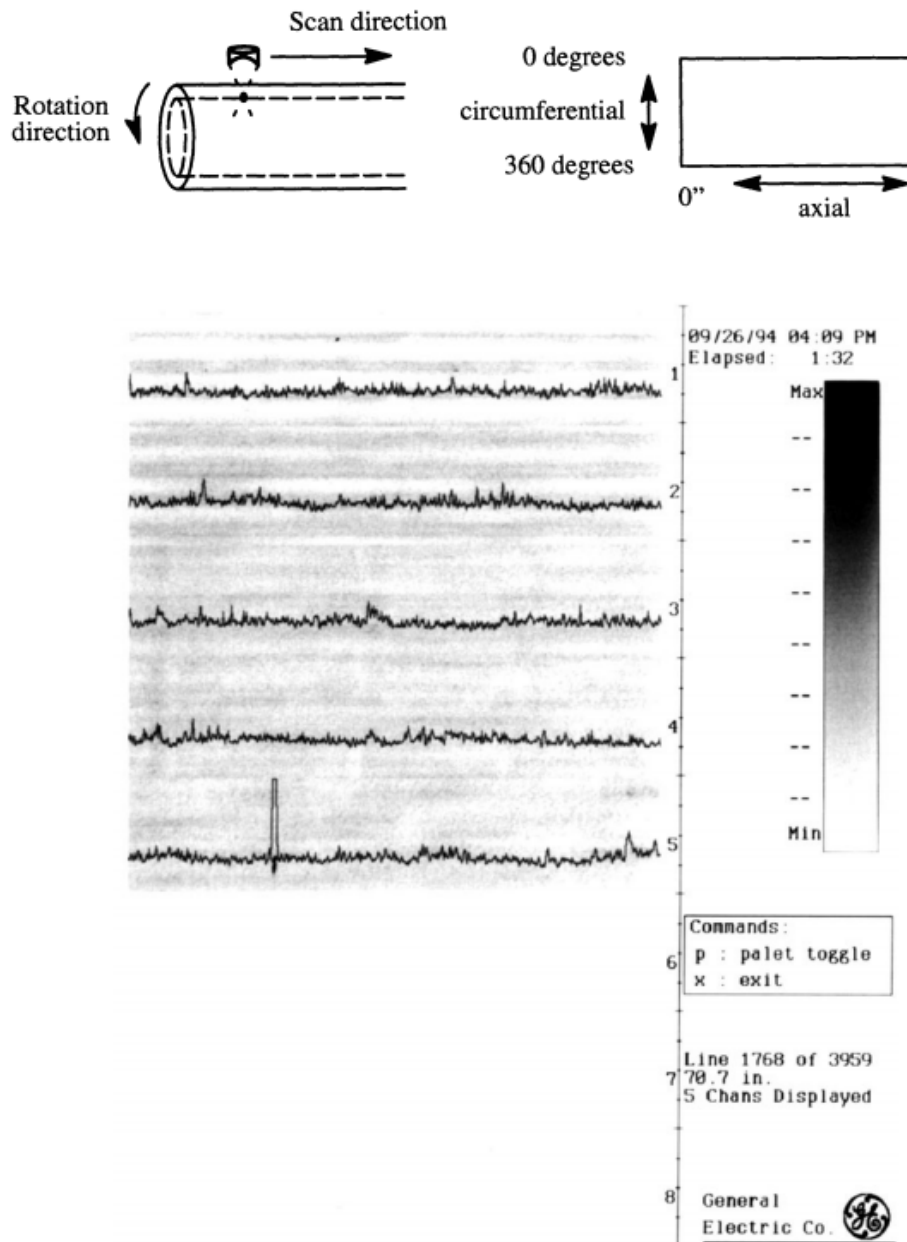


FIGURE 1.9 – Signaux temporels d’inspection d’une billette de TA6V à 5 profondeurs différentes grâce à 5 transducteurs de fréquence centrale 5 MHz, issu de [18]. Le 5<sup>e</sup> signal fait apparaître une indication de défaut.

angles) mais également son fibrage. En effet, les fissures ont une probabilité plus élevée d’apparaître dans le sens du fibrage; comme ces défauts sont très anisotropes, il est préférable de positionner la sonde perpendiculairement aux plans d’apparition des fissures afin d’en

maximiser la probabilité de détection.

## 1.2.2 Limitations des techniques mono-éléments

Les techniques de contrôle non-destructif utilisant une sonde mono-élément sont très courantes dans l'industrie, notamment du fait de leur relative simplicité. Cependant, elles souffrent de limites pour la détection et la caractérisation de défauts.

### Déviaton du plan de fibrage nominal

Le plan de contrôle d'une pièce est établi en fonction du plan de fibrage, qui dépend lui-même du forgeage de la pièce. En effet, le fibrage est sensible à toute l'histoire thermo-mécanique de l'alliage et peut être difficile à prévoir. Deux méthodes sont utilisées pour le déterminer :

- ▶ une méthode destructive consistant à découper une pièce forgée pour en observer le fibrage via une macrographie (cf. Fig. 1.5) ;
- ▶ une méthode de simulation du fibrage prenant en compte les déformations et contraintes appliquées au matériau lors du forgeage.

Pour utiliser ces deux méthodes en pratique, une hypothèse forte est nécessaire : toutes les pièces issues de la même gamme de forgeage possèdent des fibrages identiques. Ainsi, une déviation des paramètres (température, pression...) qui mènerait à un changement de fibrage peut ne pas être détectée immédiatement. Un contrôle du fibrage en routine pour toutes les pièces améliorerait la fiabilité de la connaissance de la microstructure des pièces.

### Caractérisation d'un défaut

La seule information obtenue sur les signaux est le temps d'arrivée et la forme du pic d'amplitude, ce qui est peu pour caractériser un défaut. Un calcul de profondeur est possible à partir du temps de vol si la vitesse dans le matériau est connue précisément. La taille du défaut, son type et sa forme sont des paramètres plus difficiles, voire impossibles à déterminer avec si peu d'informations. Ainsi, le contrôle consiste à rejeter les pièces qui présentent des défauts sans en déterminer les caractéristiques. De nouvelles mesures peuvent être réalisées *a posteriori* avec d'autres méthodes de contrôle non-destructif pour le caractériser plus précisément ; la pièce peut également être découpée pour rendre le défaut visible. Cette caractérisation est essentielle pour comprendre la source du défaut et, si possible, corriger le processus qui en est la cause.

### Ruptures d'impédance dues à la microstructure

Les alliages de titane sont des matériaux polycristallins. Deux phénomènes amenant à des ruptures d'impédance existent dans la microstructure :

- ▶ un contraste de phase, entre les phases  $\alpha$  et  $\beta$  possédant des constantes élastiques différentes. Ces interfaces se situent au niveau des joints des ex-grains  $\beta$ , mais également entre les colonies. Ces contributions peuvent créer un signal rétrodiffusé plus ou moins fort selon le rapport entre la longueur d'onde et la taille caractéristique de la microstructure ;

- un contraste cristallographique, chaque zone d'orientation cristallographique différente induisant une différence de vitesse de l'onde acoustique et donc un signal rétro-diffusé.

Le poids de ces contributions est difficile à déterminer de façon générale et n'est que peu étudié dans la littérature. Il serait nécessaire de connaître les constantes élastiques des phases  $\alpha$  et  $\beta$ , ainsi que les surfaces des lenteurs associées. Les signaux ultrasonores ne se limitent donc pas à un pic d'amplitude lié à la présence d'un défaut : la microstructure elle-même est source d'un bruit (dit « bruit de structure ») qui peut gêner la détection d'un défaut (cf. Fig. 1.9). Si l'interaction entre l'onde et la microstructure génère un bruit trop important, le signal issu du défaut peut être masqué et sa détection impossible. L'information disponible lors d'une acquisition avec une sonde mono-élément ne suffit pas pour distinguer le signal du défaut du bruit.

### 1.2.3 Influence de la microstructure sur les mesures ultrasonores

Les contrastes de phase et de cristallographie de la microstructure compliquent très fortement la propagation d'une onde acoustique dans un alliage de titane. Ainsi, même en l'absence de défaut, un transducteur reçoit un signal complexe issu de la microstructure elle-même.

#### Speckle acoustique

Lors de la propagation d'une onde dans un milieu complexe, l'ensemble des signaux rétro-diffusés par la microstructure se superposent et interfèrent. Étant donné la complexité du milieu, ils sont souvent considérés comme aléatoires même si leur génération est déterministe. Il s'agit de tavelures, souvent dénommées par l'anglicisme *speckle* (cf. Fig. 1.10). Ce phénomène est présent pour tous les types d'ondes, que ce soit dans le domaine optique, acoustique, ou encore sismique. Lorsque l'on souhaite détecter un défaut présent dans une pièce en alliage de titane, le speckle constitue un bruit dans les signaux enregistrés, puisqu'il provient de la microstructure et non du défaut. Il diminue ainsi le rapport d'amplitude entre le niveau du signal à l'endroit du défaut et en dehors de la zone défectueuse [20].

Néanmoins, le speckle contient beaucoup d'informations sur la microstructure. Il peut être utile d'exploiter le bruit de structure, par exemple pour déterminer la direction du fibrage (cf. Chap. 4). Le terme de « signal » ou de « bruit » n'est donc qu'un choix arbitraire qui dépend de la problématique adoptée.

#### Effets de l'anisotropie

L'anisotropie a une influence différente sur les paramètres qui décrivent une onde acoustique se propageant dans le milieu. Différents effets de la microstructure des alliages de TA6V et Ti17 sur les ondes acoustiques longitudinales ont été étudiés [9, 17, 21–23]. Les conclusions de ces études sont les suivantes :

- la vitesse de propagation des ondes ne dépend que très peu de la direction de propagation dans la gamme de fréquences du mégahertz (1% de différence); une légère



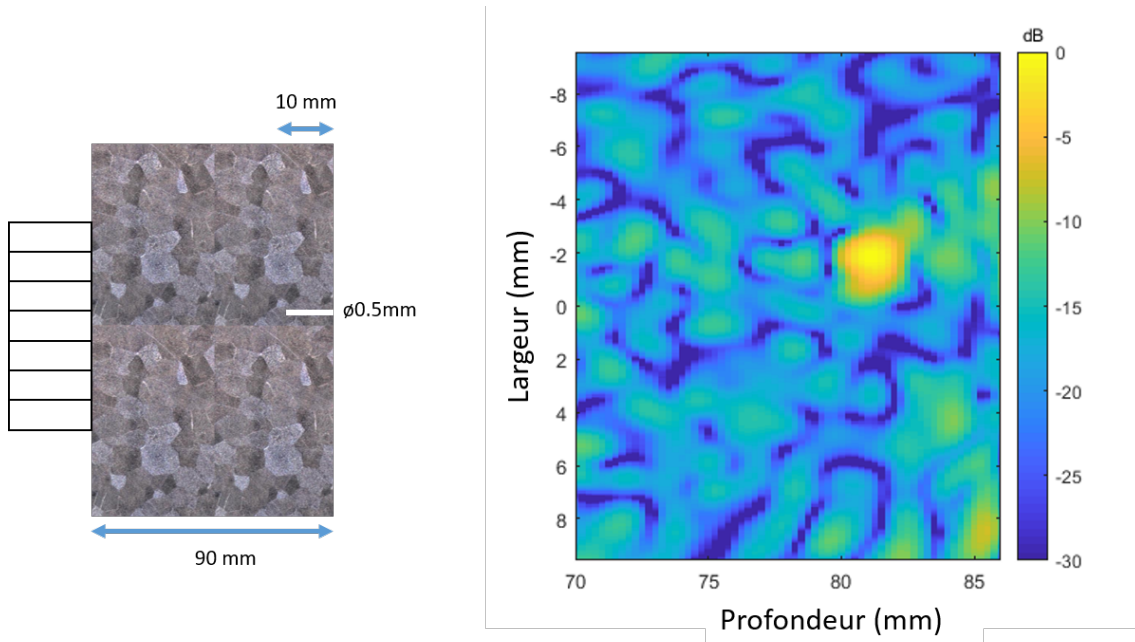


FIGURE 1.10 – Défaut et speckle acoustique dans une image échographique d'une pièce de TA6V inspectée à 10 MHz.

variation de vitesse avec la profondeur a également été mesurée dans des billettes de titane [19];

- ▶ l'atténuation est maximale lorsque l'onde se propage selon la direction principale des ex-grains  $\beta$ ;
- ▶ la diffusion est minimale lorsque l'onde se propage selon la direction principale des ex-grains  $\beta$ .

Ainsi, la vitesse peut être supposée constante, ce qui est idéal pour obtenir des images fiables de pièces en alliages de titane (cf. section 1.3.3). La valeur de cette vitesse dépend directement des paramètres élastiques du matériau, donc de la nature de l'alliage étudié. La valeur de la vitesse de l'onde longitudinale est de l'ordre de  $c_L=6100$  m/s et  $c_T=3100$  m/s pour l'onde transverse. Ces vitesses peuvent être facilement ajustée dans une pièce qui contient un « repère » tel qu'un défaut de profondeur connue ou le fond de la pièce. Notons  $z_0$  la distance entre la sonde et ce « repère » et  $t_{(L,T)}$  le temps où le pic d'amplitude correspondant apparaît sur le signal temporel dans la polarisation considérée. La vitesse réelle dans le matériau est telle que

$$c_{(L,T)} = \frac{2z_0}{t_{(L,T)}}. \quad (1.2)$$

Des méthodes plus avancées de détermination de la vitesse de l'onde existent [24-26] et sont utiles dans le cas d'une pièce qui ne présente pas de défaut connu.

L'anisotropie de la microstructure joue un rôle important sur les propriétés de diffusion et d'atténuation de l'onde acoustique. Dans un cadre de contrôle non-destructif, il est nécessaire de connaître le fibrage de la pièce pour pouvoir émettre l'onde acoustique perpendiculairement à celui-ci. De plus, les fissures se développent préférentiellement dans la direction

d'élongation de la matière et sont donc plus visibles par un tir perpendiculaire. Actuellement, le fibrage est supposé connu et des plans d'inspection sont réalisés pour chaque type de pièces pour optimiser la détection de fissures. Une nouvelle méthode non-destructive de caractérisation de la direction du fibrage est présentée au chapitre 4. Néanmoins, cette direction de tir maximise également la rétrodiffusion par la microstructure, qui peut être problématique pour la détection d'autres types de défauts.

### 1.3 Méthodes multi-éléments proposées pour améliorer la détection de défauts dans les alliages métalliques

Les développements récents pour l'inspection de pièces par ultrasons sont effectués grâce à un réseau de transducteurs composé de plusieurs éléments piézoélectriques attenants et contrôlables par une électronique multi-voies. Celui-ci possède plusieurs avantages par rapport à une sonde mono-élément :

- ▶ la sonde étant composée typiquement de 32 à 256 éléments piézoélectriques, la quantité d'information exploitable est bien supérieure ;
- ▶ l'onde peut être focalisée à la profondeur souhaitée en appliquant des lois de retard électroniques, ce qui permet d'inspecter de plus grandes zones et d'utiliser des techniques d'imagerie ;
- ▶ un traitement de signal avancé peut être réalisé sur l'ensemble des signaux enregistrés, ce qui permet, par exemple, de compenser des aberrations du front d'onde dues à une courbure ou une rugosité de l'interface, ou encore une connaissance imparfaite de la vitesse de l'onde dans le milieu.

Ici, nous nous intéresserons à des mesures en réflexion effectuées avec une sonde multi-éléments linéaire (1D) ou matricielle rectangulaire (2D) à des fréquences dans la gamme du mégahertz, avec les caractéristiques présentées Table 1.1. Dans toute la suite, nous noterons  $N$  le nombre d'éléments de la sonde,  $f_0$  sa fréquence centrale et  $x_i$  la position de l'émetteur ou du récepteur n°  $i$  ; la référence de profondeur  $z = 0$  est prise au niveau de l'interface entre la sonde et le milieu d'intérêt.

	Sonde linéaire	Sonde linéaire	Sonde matricielle
Fréquence centrale	1.5 MHz	3 MHz	8 MHz
Dimension des éléments	0.25 x 12 mm	0.25 x 8 mm	0.5 x 0.5 mm
Pas inter-élément	0.5 mm	0.4 mm	0.6 mm
Nombre d'éléments	64	64	121

TABLE 1.1 – Propriétés des sondes ultrasonores utilisées dans le manuscrit.

### 1.3.1 Définition de la matrice de réflexion

Une sonde multi-éléments est constituée de  $N$  transducteurs pouvant émettre et recevoir des ondes de manière quasiment indépendante (un faible couplage électronique et mécanique peuvent subsister entre eux; pour les sondes linéaires utilisées, il est inférieur à -40 dB). Historiquement, la matrice de réflexion (aussi appelée matrice des réponses inter-éléments) a été acquise de la manière suivante [27] :

- ▶ Le premier élément de la sonde émet un signal impulsionnel (idéalement, une impulsion de Dirac) qui est rétrodiffusé par le matériau; l'ensemble des  $N$  récepteurs enregistrent alors les signaux reçus au cours du temps.
- ▶ Le processus est répété pour l'ensemble des éléments de la sonde.

La matrice de réflexion contient l'ensemble des réponses reçues pour chaque émetteur :  $K_{ij}(t)$  représente le signal temporel (A-scan) reçu par le  $j^e$  élément lorsque le  $i^e$  a émis un signal impulsionnel. Cette technique d'acquisition est connue sous le nom de *Full Matrix Capture* (FMC) dans le domaine du contrôle non-destructif et correspond à une acquisition dans la base des transducteurs. Dans la suite du manuscrit, nous parlerons d'acquisition dans la base canonique. Le principe de réciprocité implique que les matrices de réflexion dans cette base sont symétriques.

Une électronique multi-voies est utilisée pour piloter les émissions de chacun des éléments. Les voies ne sont pas nécessairement activées une par une : plusieurs éléments de la sonde peuvent émettre une onde suivant une séquence spatio-temporelle déterminée (cf. Fig. 1.11). Lorsque la loi de retard appliquée est linéaire, les éléments émettent une onde les uns après les autres, ce qui crée une onde plane par superposition. La direction de l'onde plane émise dépend de la pente de la loi de retard. Lorsque cette loi est parabolique, une onde convergente ou divergente est émise par la sonde; le point de focalisation est déterminé par la courbure de la parabole.

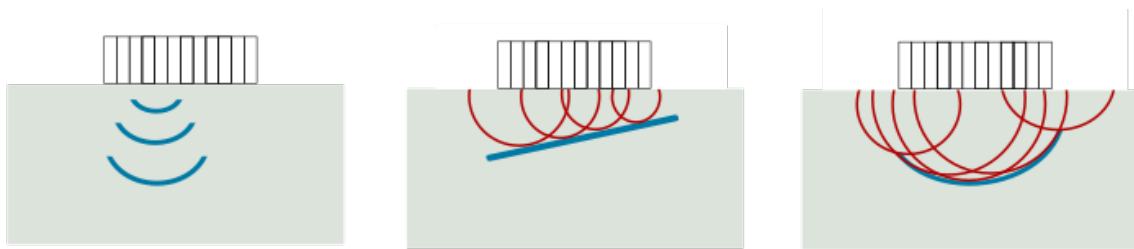


FIGURE 1.11 – Schéma des ondelettes créées par les émetteurs dans la base canonique, d'ondes planes et focalisée.

Tout comme pour le choix de la base dans un problème mathématique, la base choisie pour mesurer la matrice de réflexion doit être la plus adaptée à la géométrie du problème posé et aux traitements appliqués à la matrice. La matrice de réflexion  $\mathbf{K}$  peut être mesurée dans plusieurs bases (dont certaines sont représentées Fig. 1.12) que nous nommerons ainsi :

- ▶ la base de Hadamard : les éléments émettent le même signal, à un facteur multiplicatif (+1 ou -1) près, pour former une base orthogonale [28] et augmenter le rapport signal sur bruit;

- ▶ la base des ondes planes :  $K_{ij}(t)$  représente alors le signal temporel reçu dans la direction correspondant au vecteur d'onde  $k_j$  lorsque l'onde est émise dans la direction correspondant au vecteur d'onde  $k_i$  ;
- ▶ la base focalisée :  $K_{ij}(t)$  représente alors le signal temporel reçu au point  $r_j$  lorsque l'onde est focalisée en émission en un point  $r_i$ .

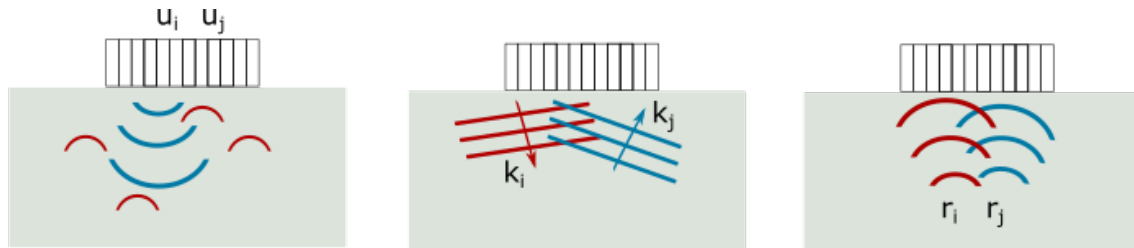


FIGURE 1.12 – Schémas d'acquisitions en base canonique, en base d'ondes planes et en base focalisée.

Les acquisitions peuvent être effectuées dans une base différente en émission et en réception, la base canonique étant le plus souvent utilisée en réception. Il est également possible de changer de base numériquement ; cette méthode est appliquée afin d'obtenir l'expression de la matrice dans la base focalisée à la section 2.4.1.

### 1.3.2 État de l'art des méthodes matricielles pour le contrôle non-destructif

L'amplitude du bruit de structure dans les matériaux polycristallins est un frein à la détection de défauts à forte profondeur. Depuis les années 1990, des méthodes de traitement du signal acoustique basées sur les mesures de la matrice de réflexion ont vu le jour pour faire ressortir du bruit l'écho d'un défaut.

La technique de retournement temporel a été introduite en 1992 par Fink *et al.* [29] et exploite la réciprocity de l'équation des ondes. Cette méthode consiste tout d'abord à insonifier le milieu puis à enregistrer les échos venant de la pièce. Dans le cas du contrôle non-destructif des alliages de titane, ces échos peuvent provenir d'un défaut ou bien de la microstructure outre les échos liés aux interfaces. Ces signaux sont enregistrés, retournés temporellement et ré-émis dans le milieu (cf. Fig. 1.13). Les parties du signal correspondant à un défaut se comportent différemment de celles provenant de la microstructure :

- ▶ si un écho provenant d'un défaut ponctuel est entièrement contenu dans le signal, l'onde se refocalise sur le défaut et une nouvelle onde rétrodiffusée est générée ;
- ▶ si l'écho provient de la microstructure (dont la taille caractéristique est très petite devant la longueur d'onde), aucune focalisation n'est observée.

Ainsi, le rapport signal-sur-bruit du défaut augmente, tout comme sa détectabilité. Le retournement temporel peut être appliqué de manière itérative pour augmenter progressivement le rapport signal-sur-bruit du réflecteur le plus échogène.

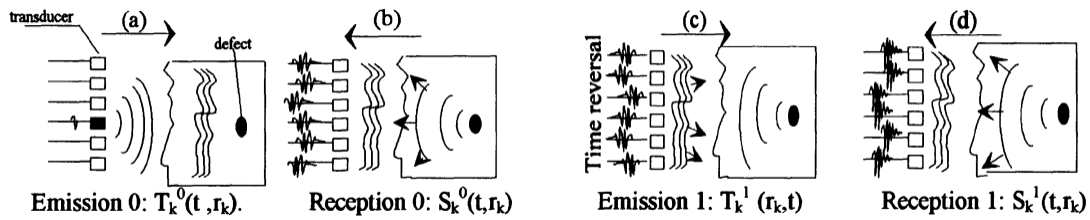


FIGURE 1.13 – Procédé de retournement temporel, issu de [30] : une onde est émise dans le milieu, réfléchiée sur un défaut et enregistrée par les éléments de la sonde; elle est ensuite retournée temporellement et renvoyée dans le milieu pour focaliser précisément sur le défaut.

Chakroun *et al.* [31] ont étudié en 1995 la détection d'un défaut de type hard- $\alpha$  dans une pièce en titane à l'aide d'une sonde ultrasonore focalisée de fréquence centrale 5 MHz. Ils ont montré que, grâce au retournement temporel itératif, il est possible de faire ressortir la signature d'un défaut de 15 dB supplémentaire par rapport à une méthode de détection classique. Le défaut étudié était un trou à fond plat de 0.4 mm situé à 20 mm de profondeur dans une pièce en TA6V. En 1998, Miette *et al.* [30] ont utilisé le retournement temporel pour la détection de défauts profonds dans des échantillons de TA6V et de Ti17. Ils ont également mis en avant la possibilité d'« apprendre » les lois de focalisation nécessaires sur des échantillons de calibration et ont ensuite appliqué les lois de retard à la pièce à inspecter. Ce procédé permet une application industrialisable de la technique de contrôle par retournement temporel.

Kerbrat *et al.* [32] ont comparé cette technique à la méthode DORT (Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel) introduite par Prada *et al.* [33]. Cette méthode consiste à étudier les valeurs singulières de la matrice de réflexion dans le domaine fréquentiel. Lorsque le milieu est composé de réflecteurs ponctuels résolus, il a été montré qu'à chaque réflecteur est associée une valeur singulière d'autant plus grande que sa réflectivité est importante et un vecteur singulier correspondant à la loi de phase nécessaire pour focaliser une onde sur ce réflecteur (cf. Fig. 1.14). Les valeurs singulières de moindre amplitude peuvent correspondre au bruit de la microstructure. Lorsque la décomposition en valeurs singulières est réalisée sur une large gamme de fréquences, il est possible de calculer les vecteurs propres temporels par transformée de Fourier inverse; ces derniers ont permis à Kerbrat *et al.* de caractériser la détectabilité d'un défaut et d'en réaliser l'imagerie par repropagation numérique. Cette comparaison avec le retournement temporel met en évidence la meilleure détectabilité des défauts avec la méthode DORT dans une pièce en alliage de titane.

Cette méthode a été étudiée et améliorée par Shahjahan *et al.* [34], qui ont développé la technique MSF DORT (Multiple Scattering Filter DORT) pour la détection de défauts dans des milieux multiples diffusants comme les aciers à gros grains. Cette méthode consiste à n'utiliser que les vecteurs singuliers associés à des valeurs singulières « anormales », qui pourraient correspondre à un défaut. Elle s'appuie sur la théorie mathématique qui prédit la distribution des valeurs singulières de la matrice de réflexion en régime de diffusion multiple (loi du quart de cercle). Cette loi mathématique permet de définir un seuil au delà duquel les valeurs propres ont de forte chance d'être associées à un défaut et non à la microstructure. La méthode a permis une meilleure détectabilité des défauts que la méthode DORT clas-

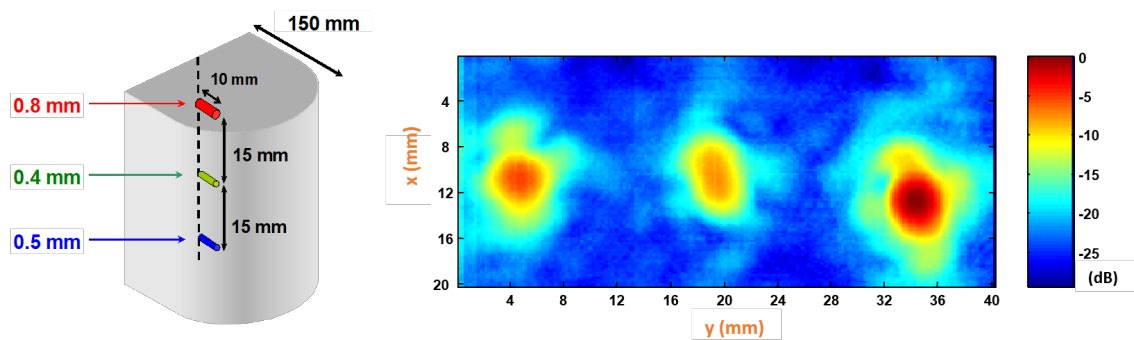


FIGURE 1.14 – Échantillon de billette de TA6V utilisé par Kerbrat *et al.* [32] comportant des défauts de diamètre 0.5, 0.4 et 0.8 mm, situés à 140 mm à cœur de billette. Les défauts sont détectés grâce à la décomposition en valeurs singulières de la matrice de réflexion. L'image est obtenue par propagation du vecteur singulier associé à la plus grande valeur singulière.

sique; malgré tout, des artefacts peuvent apparaître dans l'image et laisser supposer à tort la présence d'un défaut. Le filtrage des valeurs singulières obtenues par la méthode DORT a eu d'autres applications, comme le filtrage des ondes de surface par Lopez-Villaverde *et al.* [28].

La méthode DORT a également été appliquée au cas d'une matrice de réflexion acquise dans une base focalisée en émission (FDORT, Robert *et al.* [35]); la matrice de réflexion est alors mesurée dans une base hybride, avec une émission dans la base focalisée et une réception dans la base canonique. Dans un contexte de contrôle non-destructif, Bannouf *et al.* [36] ont montré que les valeurs singulières correspondant à un défaut dans un acier à gros grains peuvent se détacher des valeurs singulières du bruit grâce à la focalisation en émission, en particulier lorsque le défaut est situé hors de l'axe de la sonde.

### 1.3.3 Techniques d'imagerie ultrasonore

À partir de la matrice de réflexion, des images échographiques peuvent être construites par différentes méthodes dont la focalisation en tout point (FTP) aussi appelée *Total Focusing Method* (TFM), l'imagerie en ondes planes (*Plane Wave Imaging*, PWI) et les méthodes dans le domaine  $f - k$ . Une étude des performances de ces méthodes a été réalisée par Zhuang *et al.* [37]. Ces méthodes reposent sur deux hypothèses :

- ▶ la vitesse de l'onde dans le matériau est constante et parfaitement connue, notée  $c_0$ ;
- ▶ les signaux reçus par la sonde proviennent uniquement de la diffusion simple.

Les méthodes dans le domaine  $f - k$  ont l'avantage de nécessiter moins de ressources de calcul pour imager un milieu [37, 38]; elles consistent à étudier la transformée de Fourier 3D (spatiale 2D et temporelle) de la matrice de réflexion. Cette thèse ne portant pas sur la comparaison des méthodes d'imagerie, nous présenterons uniquement les méthodes TFM et PWI.

## Imagerie TFM

L'imagerie TFM est une méthode intuitive à mettre en oeuvre à partir de la matrice des réponses inter-éléments. L'algorithme est le suivant : une grille de pixels  $(x_p, z_p)$  est choisie et le temps de vol  $\tau_i$  entre chaque couple élément de la sonde - pixel est calculé. La somme de ce temps pour l'élément émetteur  $i$  et l'élément récepteur  $j$  est notée  $\tau_{ij}$  et correspond à l'instant du signal temporel  $K_{ij}(t)$  auquel un diffuseur placé à ce pixel apporterait sa contribution.

$$\tau_i(\mathbf{P}) = \frac{\sqrt{(x_i - x_p)^2 + z_p^2}}{c_0} \quad (1.3a)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{P}) = \tau_i(\mathbf{P}) + \tau_j(\mathbf{P}). \quad (1.3b)$$

S'il y a effectivement un diffuseur à cet endroit dans le matériau, le signal rétrodiffusé est fort donc l'amplitude du pixel est élevée. L'image est obtenue en sommant de manière cohérente les contributions de chaque couple émetteur/récepteur :

$$A(\mathbf{P}) = \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K_{ij}(\tau_{ij}(\mathbf{P})) \right|, \quad (1.4)$$

avec  $A(\mathbf{P})$  l'amplitude de l'image au point  $\mathbf{P} (x_p, z_p)$ . L'imagerie TFM est une imagerie confocale, puisque l'onde est focalisée en émission et en réception au même point correspondant à la position du pixel. Le temps de vol  $\tau_{ij}$  étant dépendant de la polarisation de l'onde considérée (longitudinale ou transverse), deux images d'un même milieu peuvent être générées avec la même matrice de réflexion.

## Imagerie multi-modes

Les temps de vol en imagerie TFM classique sont calculés pour des chemins directs entre la sonde et le défaut et pour des ondes longitudinales ou transverses. Les méthodes d'imagerie TFM multi-modes [39] proposent une approche plus complète, en considérant des chemins complexes comprenant par exemple des réflexions sur le fond de la pièce. À chaque rebond, les chemins sont calculés grâce aux lois de Snell-Descartes :

$$k_{i(L,T)} \sin(\theta_i) = k_{r(L,T)} \sin(\theta_r),$$

$$k_{(L,T)} = \frac{\omega}{c_{(L,T)}} \quad (1.5)$$

avec  $\omega$  la fréquence centrale de l'onde,  $(\theta_i, \theta_r)$  les angles incidents et réfléchis et  $(k_i, k_r)$  les vecteurs d'ondes incidents et réfléchis qui peuvent être calculés pour l'onde longitudinale (indice L) ou transverse (indice T).

De telles trajectoires permettent de visualiser un défaut sous plusieurs angles et donc d'augmenter sa probabilité de détection. Les ondes longitudinales et transverses peuvent également être combinées dans les différentes parties du trajet pour accéder à une gamme angulaire encore supérieure (changement d'angle à la réflexion), comme l'illustre la figure 1.15.

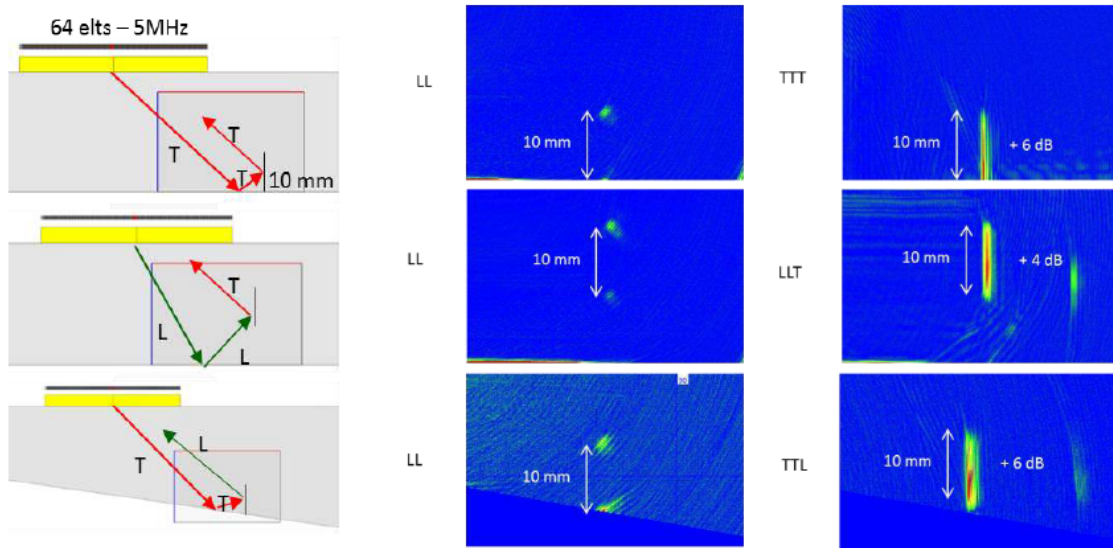


FIGURE 1.15 – Gauche : schéma de 3 trajets acoustiques utilisant les conversions de modes; droite : 6 images TFM multimodes montrant l'intérêt d'utiliser plusieurs modes pour bien visualiser un défaut. Les figures sont tirées de Reverdy *et al.* [40].

### Imagerie en ondes planes

L'imagerie en ondes planes, ou *Plane Wave Imaging* (PWI) a été introduite en 2009 par Montaldo *et al.* [41] dans le domaine de l'imagerie médicale. Cette méthode novatrice a permis de réaliser de l'imagerie ultra-rapide grâce à la diminution du nombre d'émissions à effectuer pour obtenir une bonne résolution. Cette méthode repose sur l'utilisation de lois de retard appliquées à l'ensemble des transducteurs pour émettre une onde plane dans la direction souhaitée. Ainsi, l'énergie envoyée est plus importante et une grande largeur du milieu est insonifiée. En émettant avec un seul élément, l'amplitude du champ décroît avec la distance de propagation à cause de la diffraction, alors qu'elle est quasiment constante pour une onde plane. La loi de retard à appliquer à l'élément  $i$  pour envoyer une onde dans la direction  $\theta_l$  est :

$$\tau_{il} = \frac{x_i \sin(\theta_l)}{c_0} - \min_{x_i} \left( \frac{x_i \sin(\theta_l)}{c_0} \right). \quad (1.6)$$

En réception, la matrice de réflexion peut être acquise dans la base d'ondes planes utilisée en émission ou dans la base canonique (cf. Eq. (1.3)).

### Diffusion multiple et imagerie

L'une des hypothèses fondamentales pour imager un milieu est l'approximation de Born (ou de diffusion simple), qui permet, en champ lointain, d'aboutir à une relation univoque entre temps d'écho et profondeur. Toute contribution issue de la diffusion multiple ne respectera pas l'hypothèse et conduira à une image erronée (cf. Fig. 1.16).

Dans un cas où le régime de diffusion simple domine, la présence de diffusion multiple peut diminuer le rapport signal-sur-bruit d'un défaut et la précision de localisation sans toutefois l'empêcher; dans le cas plus critique où la contribution de diffusion multiple devient



prépondérante, l'image peut présenter des artefacts (présence d'une haute intensité sans la présence d'un défaut, ou au contraire absence de haute intensité à l'endroit du défaut). Ainsi, la proportion de diffusion multiple vis-à-vis de la diffusion simple est un indicateur de la fiabilité des images échographiques. L'un des objectifs de cette thèse est d'étudier cet indicateur et d'en identifier les limites grâce à une simulation numérique.

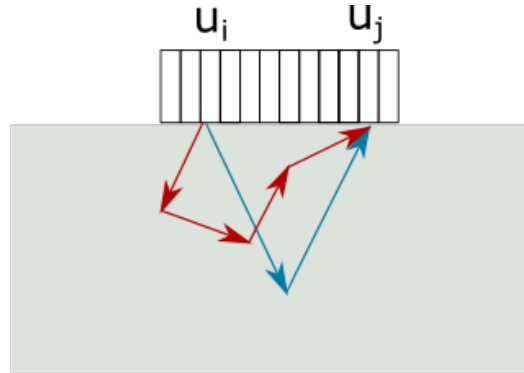


FIGURE 1.16 – Chemins de même temps de vol correspondant à de la diffusion simple (bleu) et multiple (rouge).

## 1.4 Théorie et simulation numérique de la propagation d'ondes acoustiques dans les polycristaux

La propagation d'ondes dans les polycristaux fait l'objet d'études théoriques [42–44] mais également numériques. Plusieurs codes ont été développés pour simuler la propagation dans les polycristaux par la méthode des éléments finis (*ATHENA* [45], *OOFE* [46, 47], *Field II* [48], etc.) en résolvant les équations de l'élastodynamique grâce à différentes méthodes.

### 1.4.1 Équations fondamentales de la propagation

Pour décrire la propagation d'ondes dans les milieux polycristallins, on peut utiliser une approche « mécanique », c'est-à-dire basée sur le tenseur des constantes élastiques. Les calculs théoriques portent sur l'atténuation, la vitesse effective et la diffusion par des polycristaux. Ces grandeurs ont souvent des expressions complexes mettant en jeu le tenseur des constantes élastiques  $\mathbf{c}$ , qui relie le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  (force par unité de surface) à celui des déformations  $\boldsymbol{\epsilon}$  (supposées faibles) suivant la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (1.7)$$

$\sigma_{ij}$  représente la projection suivant l'axe  $i$  de la force agissant sur un élément de surface perpendiculaire à l'axe  $j$ . Une onde élastique est un déplacement local de la matière, noté  $\mathbf{u}$ . Celui-ci satisfait l'équation d'onde qui s'exprime en fonction du tenseur des contraintes :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j \partial x_k}, \quad (1.8)$$

avec  $\rho$  la masse volumique du solide supposée homogène et  $\mathbf{x}$  les coordonnées spatiales. Dans le cas d'étude d'une onde plane progressive se propageant selon la direction  $\mathbf{n}$ , l'équation se réécrit sous la forme de l'équation de Christoffel et la diagonalisation du tenseur de Christoffel renseigne sur les polarisations et vitesses des ondes dans le milieu [49].

Dans les équations mécaniques, un transducteur est modélisé par un terme source et les conditions aux bords du volume sont prises en compte. Les alliages de titane ont la spécificité de comporter deux phases cristallographiques de propriétés mécaniques différentes. Un relevé des valeurs utilisées dans la littérature a été effectué par Martin *et al.* [50] et est présenté Table 1.2. La phase  $\alpha$ , de structure cristallographique hexagonale, n'a que 5 composantes indépendantes, tandis que la phase  $\beta$ , de structure cubique, en possède 3.

Phase	Références	Alliage	$C_{1111}$	$C_{1122}$	$C_{1133}$	$C_{3333}$	$C_{2323}$
$\alpha$	[Brandes et Brook, 1992] [Petry <i>et al.</i> , 1991]	Pure	168	95	69	191	48
$\alpha$	[Brandes et Brook, 1992]	Pure	160	90	66	181	46.5
$\alpha$	[Simmons et Wang, 1971]	?	162	92	69	180	47
$\beta$	[Brandes et Brook, 1992] [Petry <i>et al.</i> , 1991]	Pure	134	110	110	134	55
$\beta$	[Reid <i>et al.</i> , 1973]	Ti-40at.%Nb	156.5	111.6	111.6	156.5	39.6
$\beta$	[Herbig, 2011]	TiBeta21S	153	101	101	153	57
$\beta$	[Ledbetter <i>et al.</i> , 2004]	Pure	97.7	82.7	82.7	97.7	37.5
$\beta$	[Fréour <i>et al.</i> , 2002]	Ti17	174	116	116	174	41
$\beta$	[Fréour <i>et al.</i> , 2011]	Ti17	167	115	115	167	44
$\beta$	[Tane <i>et al.</i> , 2008]	Ti-29Nb-Ta-Zr	65.1	40.5	40.5	65.1	32.4
$\beta$	[Tane <i>et al.</i> , 2008]	Ti-25Nb-Ta-Zr	90.8	55.9	55.9	90.8	35.8

TABLE 1.2 – Coefficients du tenseur des contraintes  $\mathbf{c}$  pour les phases  $\alpha$  et  $\beta$  (GPa) [50].

Les calculs des paramètres de propagation d'une onde élastique dépendent de la symétrie des cristaux étudiés et de certaines approximations (prise en compte ou non de la diffusion multiple, direction des cristaux supposée aléatoire, etc.). Han et Thompson [17] ont proposé un calcul du coefficient de diffusion par les alliages de titane en régime de diffusion simple, en prenant en compte les deux phases  $\alpha$  et  $\beta$  et la microstructure (grains et colonies). Le résultat est une expression complexe faisant intervenir les constantes élastiques des deux phases, leur corrélation spatiale et leur densité.

### 1.4.2 Simulations par éléments finis

Pour s'affranchir de la complexité des calculs théoriques exacts, une approche numérique peut être utilisée. La simulation par la méthode des éléments finis se base sur la construction de grains de cristallographie et de forme adaptées au matériau d'intérêt. Les grains sont le plus souvent simulés à partir de diagrammes de Voronoi : des points nommés « centres » sont tirés aléatoirement et les grains constituent les surfaces plus proches d'un centre que de

n'importe quel autre. Certains logiciels comme *Dream 3D* [51] sont spécialisés dans la synthèse numérique de microstructures avec des statistiques de grains déterminées. Contrairement aux études théoriques, les simulations numériques permettent de prendre en compte la diffusion multiple dans le calcul des ondes rétrodiffusées et de quantifier son effet sur l'onde ballistique [47, 52].

Des études numériques et théoriques de la rétrodiffusion d'une onde par les alliages de titane ont été réalisées [17, 42] pour quantifier l'effet de la taille de grains, de leur orientation ou encore de leur forme. L'effet de l'interface entre deux grains sur la transmission des ondes longitudinales et transverses a été étudié théoriquement et numériquement par Tie *et al.* [53]. Ils montrent que dans un matériau polycristallin, le coefficient de diffusion dépend non seulement de la taille des grains par rapport à la longueur d'onde, mais également de l'orientation cristallographique. Récemment, Huang *et al.* [54] ont publié un article calculant les incertitudes et erreurs de la simulation par éléments finis de solides polycristallins. Un avantage de la simulation par éléments finis est le réalisme de la microstructure simulée. Au prix d'une grande puissance de calcul, les logiciels permettent de représenter une distribution de tailles et de directions de grains semblables aux structures existantes. Les derniers développements sur GPU ont permis de diminuer considérablement les temps de calcul des simulations par éléments finis, permettant ainsi l'accès aux simulations en 3D, comme présenté Fig. 1.17 [55].

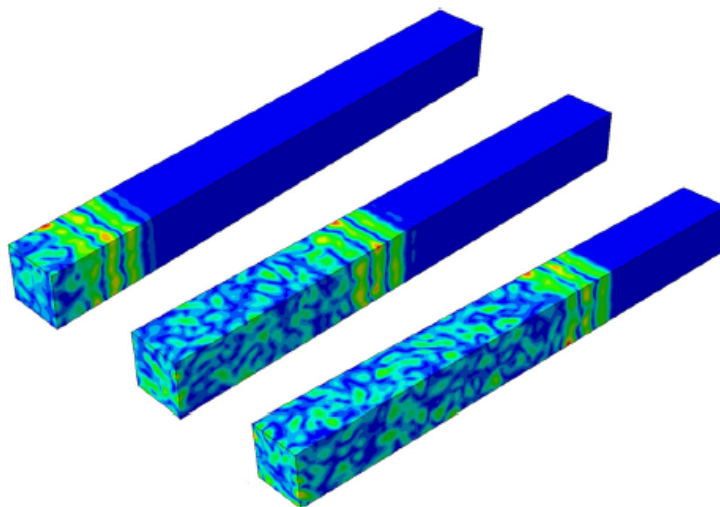


FIGURE 1.17 – Simulation 3D par éléments finis de la propagation d'une onde plane dans un matériau polycristallin, issu de [55].

Un pan des simulations en contrôle non-destructif consiste à calculer numériquement les réponses de défauts de tailles et de formes différentes dans un échantillon au bruit de structure fort. Une base de données est ainsi établie dans la configuration choisie. S'il est possible de trouver un espace dans lequel les réponses des défauts sont suffisamment différentes, alors il est possible de caractériser un défaut inconnu [20]. Dans un cas moins favorable, il est possible de calculer la probabilité que le défaut appartienne aux différentes familles et aux différentes gammes de dimensions. Cependant, l'espace des réponses des défauts est mo-

difié si la taille des grains ou la longueur d'onde varient et de nouvelles simulations doivent être effectuées pour calculer le nouvel espace.

### 1.4.3 Simulation par méthode de Monte-Carlo

Les méthodes de Monte-Carlo sont des méthodes numériques qui ont également été utilisées pour modéliser le bruit de structure dans les polycristaux. Yalda *et al.* [56] ont proposé une méthode basée sur la linéarité de la réponse du milieu : ils calculent la réponse individuelle de grains d'orientations cristallographiques aléatoires et font l'hypothèse que la réponse du milieu est la somme des réponses individuelles. L'hypothèse de diffusion simple est sous-jacente à ce modèle; dans des milieux où la diffusion multiple est négligeable, leur méthode permet de connaître les propriétés statistiques du bruit de structure.

Margerin *et al.* [57] ont développé la méthode de Monte-Carlo pour simuler la propagation d'ondes dans un milieu solide en prenant en compte la diffusion multiple et les conversions de modes. La simulation est utilisée afin de mieux comprendre la répartition de l'énergie entre les ondes longitudinales et transverses dans un contexte de géophysique.

## 1.5 Conclusion

Cette première partie présente les matériaux d'intérêt de la thèse que sont les alliages de titane. Leur microstructure très complexe est un problème de taille pour comprendre la propagation des ondes acoustiques dans le volume de ces matériaux. Les ruptures d'impédance dues à la microstructure sont source d'un bruit de structure complexe qui s'ajoute à l'écho d'un éventuel défaut. Pour étudier ce bruit de structure qui renseigne sur les propriétés de l'alliage ou pour augmenter le rapport signal-sur-bruit d'un défaut, il est nécessaire de réaliser l'inspection des pièces avec un réseau de transducteurs et non plus avec des mono-éléments utilisés historiquement.

La complexité de la microstructure est également source de diffusion multiple lors de la propagation de l'onde acoustique dans le milieu. Les chemins de diffusion multiple ne satisfont pas aux hypothèses nécessaires à créer une image du milieu et créent des artefacts ou diminuent le rapport signal-sur-bruit d'un défaut. Le prochain chapitre a pour but de rappeler les équations qui régissent la propagation d'une onde acoustique en régime de diffusion multiple et de mettre en avant des propriétés différentes des chemins de diffusion simple. Ces propriétés seront visualisées grâce à une simulation numérique permettant de séparer les matrices de réflexion issues de chemins de diffusion simple et multiple. Une définition de la proportion de diffusion simple et multiple sera étudiée pour quantifier la probabilité d'obtenir des artefacts dans les images. La simulation numérique étudiée n'a pas pour but de reproduire fidèlement la réponse d'un milieu polycristallin, au contraire des simulations mentionnées dans ce chapitre. Il s'agit d'une simplification extrême d'un milieu complexe, mais qui conserve les propriétés physiques des matrices de réflexion.

La détermination de la direction du fibrage par des méthodes non-destructives représente

également un défi et constitue un réel intérêt industriel. Le chapitre 4 de cette thèse est consacré à ce sujet et présente une méthode utilisant une sonde multi-éléments matricielle. Elle est appliquée aux alliages de titane, mais pourrait être également utilisée pour des fibres composites dont l'utilisation dans le domaine aéronautique est en plein essor.

## Bibliographie

- [1] W. G. Burgers, "On the process of transition of the cubic-body-centered modification into the hexagonal-close-packed modification of zirconium," *Physica*, vol. 1, pp. 561–586, May 1934. [4](#)
- [2] G. Lütjering and J. C. Williams, *Titanium. Engineering Materials and Processes*, Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, second ed., 2007. [4](#), [5](#)
- [3] Y. Combres, *Propriétés Du Titane et de Ses Alliages*. 1999. [4](#), [5](#)
- [4] Y. Combres and B. Champin, "La transformation des alliages de titane : : Etat actuel et perspectives," *Matériaux & Techniques*, vol. 79, no. 5-6, pp. 31–42, 1991. [5](#), [6](#)
- [5] J. da Costa Teixeira, *Étude expérimentale et modélisation des évolutions microstructurales au cours des traitements thermiques post forgeage dans l'alliage de titane Ti17*. PhD thesis, 2005. [7](#)
- [6] C. Buirette, *Étude Des Mécanismes de Propagation de Fissure Dans Un Alliage de Titane TA6V Soudé Par Faisceau d'électrons*. PhD thesis, Dec. 2011.
- [7] T. Duval, *Analyse Multi-Échelles Des Relations Microstructure/Propriétés Mécaniques Sous Sollicitation Monotone et Cyclique Des Alliages de Titane -Métastable*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2013. [10](#)
- [8] M. Salib, *Étude Cinétique et Cristallographique de La Précipitation de La Phase  $\alpha$  Aux Joints de Grains  $\beta\beta$  Dans Un Alliage de Titane*. These de doctorat, Université de Lorraine, Mar. 2015. [7](#)
- [9] A. Baelde, *Propagation Des Ondes Ultrasonores Dans Les Alliages de Titane à Fort Fibrage : Cohérence Spatiale et Diffusion Multiple*. PhD thesis, Université Paris VI, Nov. 2017. [7](#), [8](#), [15](#)
- [10] F. Bridier, *Analyse Expérimentale Des Modes de Déformation et d'endommagement Par Fatigue à 20°C d'alliages de Titane. Aspects Cristallographiques à Différentes Échelles*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique & Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées, 2006. [7](#), [10](#)
- [11] NTSB, "United Airlines Flight 232, McDonnell Douglas DC-10- 10, Sioux Gateway Airport, Sioux City, Iowa, July 19, 1989," 1990. [7](#)
- [12] J. P. Bellot, D. Ablitzer, B. Foster, A. Mitchell, S. Hans, and E. Hess, "Dissolution of hard-alpha inclusions in liquid titanium alloys," *Metallurgical and Materials Transactions B*, vol. 28, pp. 1001–1010, Dec. 1997. [7](#), [9](#)
- [13] BEA, "Rapport d'enquête - Accident de l'avion AIRBUS A380-861 équipé de moteurs Engine Alliance GP7270 immatriculé F-HPJE exploité par Air France survenu le 30 septembre 2017 en croisière au-dessus du Groenland (Danemark)," Sept. 2020. [9](#), [10](#), [11](#)

- [14] I. F. von Thungen, *Effet Dwell : Relation Microstructure-Microtexture-Propriétés Mécaniques de l'alliage de Titane Ti6242*. PhD thesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, Nov. 2016. [9](#)
- [15] K. L. Biavant-Guerrier, *Etude de l'amorçage de Fissures de Fatigue Dans Le Ti-6Al-4V*. Thèse de doctorat, Mar. 2000. [9](#), [10](#)
- [16] J. Delfosse, *Forgeage  $\beta$  Du Ti17 Propriétés En Fatigue*. Thèse de doctorat, Apr. 2005. [10](#)
- [17] Y. K. Han and R. B. Thompson, "Ultrasonic backscattering in duplex microstructures : Theory and application to titanium alloys," *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 28, pp. 91–104, Jan. 1997. [10](#), [15](#), [25](#), [26](#)
- [18] E. J. Nieters, R. S. Gilmore, R. C. Trzaskos, J. D. Young, D. C. Copley, P. J. Howard, M. E. Keller, and W. J. Leach, "A Multizone Technique for Billet Inspection," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 2137–2144, Boston, MA : Springer US, 1995. [11](#), [12](#), [13](#)
- [19] F. J. Margetan, M. Gigliotti, L. Brashe, and W. Leach, "Fundamental Studies : Inspection Properties for Engine Titanium Alloys," tech. rep., IOWA STATE UNIV AMES CENTER FOR NONDESTRUCTIVE EVALUATION, Dec. 2002. [11](#), [16](#)
- [20] L. Bai, A. Velichko, and B. Drinkwater, "Grain scattering noise modelling and its use in the detection and characterisation of defects using ultrasonic arrays," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, July 2019. [15](#), [26](#)
- [21] P. D. Panetta, R. B. Thompson, and F. J. Margetan, "Use of Electron Backscatter Diffraction in Understanding Texture and the Mechanisms of Backscattered Noise Generation in Titanium Alloys," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Volume 17A* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 89–96, 1998. [15](#)
- [22] S. Ahmed and R. B. Thompson, "Influence of Columnar Microstructure on Ultrasonic Backscattering," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 1617–1624, Boston, MA : Springer US, 1995.
- [23] A. P. Arguelles, C. M. Kube, P. Hu, and J. A. Turner, "Mode-converted ultrasonic scattering in polycrystals with elongated grains," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 140, pp. 1570–1580, Sept. 2016. [15](#)
- [24] W. Lambert, L. A. Cobus, M. Couade, M. Fink, and A. Aubry, "Reflection Matrix Approach for Quantitative Imaging of Scattering Media," *Physical Review X*, vol. 10, p. 021048, June 2020. [16](#)
- [25] P. Stähli, M. Kuriakose, M. Frenz, and M. Jaeger, "Forward model for quantitative pulse-echo speed-of-sound imaging," Feb. 2019.
- [26] M. Jakovljevic, S. Hsieh, R. Ali, G. Chau Loo Kung, D. Hyun, and J. J. Dahl, "Local speed of sound estimation in tissue using pulse-echo ultrasound : Model-based approach," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 144, pp. 254–266, July 2018. [16](#)

- 
- [27] R. Chiao and L. Thomas, "Analytic evaluation of sampled aperture ultrasonic imaging techniques for NDE," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 41, pp. 484–493, July 1994. [18](#)
- [28] E. Lopez Villaverde, S. Robert, and C. Prada, "Ultrasonic imaging of defects in coarse-grained steels with the decomposition of the time reversal operator," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 140, pp. 541–550, July 2016. [18](#), [21](#)
- [29] M. Fink, "Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 39, pp. 555–566, Sept. 1992. [19](#)
- [30] V. Miette, L. Sandrin, F. Wu, and M. Fink, "Optimisation of time reversal processing in titanium inspections," in *1996 IEEE Ultrasonics Symposium. Proceedings*, vol. 1, pp. 643–647 vol.1, Nov. 1996. [20](#)
- [31] N. Chakroun, V. Miette, M. Fink, F. Wu, G. Mangenet, and L. Befly, "Ultrasonic Inspection of Titanium Alloys with a Time Reversal Mirror," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Volume 14* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 2105–2112, Springer US, 1995. [20](#)
- [32] E. Kerbrat, C. Prada, D. Cassereau, and M. Fink, "Imaging in the presence of grain noise using the decomposition of the time reversal operator," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, pp. 1230–1240, Mar. 2003. [20](#), [21](#)
- [33] C. Prada and M. Fink, "Eigenmodes of the time reversal operator : A solution to selective focusing in multiple-target media," *Wave Motion*, vol. 20, pp. 151–163, Sept. 1994. [20](#)
- [34] S. Shahjahan, A. Aubry, F. Rupin, B. Chassignole, and A. Derode, "A random matrix approach to detect defects in a strongly scattering polycrystal : How the memory effect can help overcome multiple scattering," *Applied Physics Letters*, vol. 104, p. 234105, June 2014. [20](#)
- [35] J.-L. Robert and M. Fink, "The time-reversal operator with virtual transducers : Application to far-field aberration correction," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 124, pp. 3659–3668, Dec. 2008. [21](#)
- [36] S. Bannouf, *Développement et Optimisation de Méthodes d'imagerie Synthétique Pour Le Contrôle Non-Destructif Par Ultrasons de Composants Industriels Complexes*. PhD thesis, Université Paris-Diderot - Paris VII, May 2013. [21](#)
- [37] Z. Zhuang, J. Zhang, G. Lian, and B. W. Drinkwater, "Comparison of Time Domain and Frequency-Wavenumber Domain Ultrasonic Array Imaging Algorithms for Non-Destructive Evaluation," *Sensors (Basel, Switzerland)*, vol. 20, Sept. 2020. [21](#)
- [38] L. Merabet, S. Robert, and C. Prada, "2-D and 3-D Reconstruction Algorithms in the Fourier Domain for Plane-Wave Imaging in Nondestructive Testing," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 66, pp. 772–788, Apr. 2019. [21](#)



- [39] J. Zhang, B. W. Drinkwater, P. D. Wilcox, and A. J. Hunter, "Defect detection using ultrasonic arrays : The multi-mode total focusing method," *NDT & E International*, vol. 43, pp. 123–133, Mar. 2010. [22](#)
- [40] F. Reverdy and G. Benoist, "Advantages and Complementarity of Phased-Array Technology and Total Focusing Method," in *19th World Conference on Non-Destructive Testing*, p. 8, 2016. [23](#)
- [41] G. Montaldo, M. Tanter, J. Bercoff, N. Benech, and M. Fink, "Coherent plane-wave compounding for very high frame rate ultrasonography and transient elastography," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 56, pp. 489–506, Mar. 2009. [23](#)
- [42] S. Hirsekorn, "The scattering of ultrasonic waves by polycrystals," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 72, pp. 1021–1031, Sept. 1982. [24](#), [26](#)
- [43] J. H. Rose, "Ultrasonic Backscattering from Polycrystalline Aggregates using Time-Domain Linear Response Theory," vol. Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. JOB, p. 6, 1991.
- [44] F. J. Margetan, R. B. Thompson, and I. Yalda-Mooshabad, "Modeling Ultrasonic Microstructural Noise in Titanium Alloys," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Volumes 12A and 12B* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 1735–1742, Boston, MA : Springer US, 1993. [24](#)
- [45] B. Chassignole, V. Duwig, M. A. Ploix, P. Guy, and R. El Guerjouma, "Modelling the attenuation in the ATHENA finite elements code for the ultrasonic testing of austenitic stainless steel welds," *Ultrasonics*, vol. 49, pp. 653–658, Dec. 2009. [24](#)
- [46] B. Tie and D. Aubry, "Adaptive time discontinuous Galerkin method for numerical modeling of wave propagation in shell and 3D structures," *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, vol. 15, pp. 729–757, May 2012. [24](#)
- [47] X. Bai, *Modélisation Par Éléments Finis de La Propagation Des Ondes Ultrasonores Dans Des Matériaux Polycristallins*. These de doctorat, Université Paris-Saclay (ComUE), Feb. 2017. [24](#), [26](#)
- [48] J. Jensen, "FIELD : A program for simulating ultrasound systems," *Medical and Biological Engineering and Computing*, vol. 34, pp. 351–352, Jan. 1996. [24](#)
- [49] D. Royer and E. Dieulesaint, *Elastic Waves in Solids I : Free and Guided Propagation*. Springer Science & Business Media, Nov. 1999. [25](#)
- [50] G. Martin, *Simulation Numérique Multi-Échelles Du Comportement Mécanique Des Alliages de Titane Bêta-Métastable Ti5553 et Ti17*. PhD thesis, École nationale supérieure des Mines de Paris, Oct. 2013. [25](#)

- 
- [51] S. P. Donegan, J. C. Tucker, A. D. Rollett, K. Barmak, and M. Groeber, "Extreme value analysis of tail departure from log-normality in experimental and simulated grain size distributions," *Acta Materialia*, vol. 15, no. 61, pp. 5595–5604, 2013. [26](#)
- [52] S. Shahjahan, F. Rupin, A. Aubry, B. Chassignole, T. Fouquet, and A. Derode, "Comparison between experimental and 2-D numerical studies of multiple scattering in Inconel600® by means of array probes," *Ultrasonics*, vol. 54, pp. 358–367, Jan. 2014. [26](#)
- [53] B. Tie, D. Solas, J. Thébault, C. Rey, T. Baudin, and A.-S. Mouronval, "Modélisation numérique de la propagation des ultrasons dans des milieux polycristallins," in *10ème Congrès Français d'Acoustique* (S. F. d'Acoustique-SFA, ed.), (Lyon, France), pp. –, Apr. 2010. [26](#)
- [54] M. Huang, G. Sha, P. Huthwaite, S. I. Rokhlin, and M. J. S. Lowe, "Maximizing the accuracy of finite element simulation of elastic wave propagation in polycrystals," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 148, pp. 1890–1910, Oct. 2020. [26](#)
- [55] A. Van Pamel, C. R. Brett, P. Huthwaite, and M. J. S. Lowe, "Finite element modelling of elastic wave scattering within a polycrystalline material in two and three dimensions," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 138, pp. 2326–2336, Oct. 2015. [26](#)
- [56] I. Yalda, F. J. Margetan, and R. B. Thompson, "Predicting ultrasonic grain noise in polycrystals : A Monte Carlo model," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 99, pp. 3445–3455, June 1996. [27](#)
- [57] L. Margerin, M. Campillo, and B. Tiggelen, "Monte Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves," *Journal of Geophysical Research*, vol. 105, pp. 7873–7892, Apr. 2000. [27](#)



# Chapitre 2

## Matrices de réflexion en milieu complexe

### Sommaire

---

<b>2.1 Propagation d'ondes dans un milieu complexe</b> . . . . .	<b>36</b>
2.1.1 Milieu complexe et série de Born . . . . .	37
2.1.2 Grandeurs moyennes . . . . .	39
2.1.3 Matrice T et notion de diffuseur . . . . .	43
2.1.4 Section efficace de diffusion . . . . .	46
<b>2.2 Simulation numérique du champ diffusé</b> . . . . .	<b>48</b>
2.2.1 Paramètres de la simulation . . . . .	48
2.2.2 Série de Born numérique et convergence . . . . .	49
2.2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	51
<b>2.3 Propriétés des matrices de réflexion dans la base canonique</b> . . . . .	<b>54</b>
2.3.1 Propriétés de la matrice de diffusion simple . . . . .	54
2.3.2 Propriétés de la diffusion multiple . . . . .	56
2.3.3 Matrices apparentes . . . . .	59
2.3.4 Influence de la diffusion récurrente sur le pic de rétrodiffusion cohé- rente . . . . .	63
<b>2.4 Propriétés des matrices de réflexion dans la base focalisée</b> . . . . .	<b>65</b>
2.4.1 Nouvelles méthodes d'analyse de la matrice de réflexion en milieu complexe . . . . .	65
2.4.2 Propriétés de la matrice de réflexion dans la base focalisée . . . . .	66
2.4.3 Simulation numérique de la matrice de réflexion dans la base focalisée	67
2.4.4 Influence de la diffusion récurrente sur l'imagerie . . . . .	69
<b>2.5 Conclusion</b> . . . . .	<b>72</b>
<b>Références bibliographiques</b> . . . . .	<b>74</b>

---

Comme présenté au chapitre précédent, les alliages de titane peuvent être des milieux multiplement diffusants pour les ondes acoustiques aux fréquences d'inspection. Pourtant, le contrôle ultrasonore est la seule méthode non-destructive qui permet une inspection volumique en routine. Ainsi, il est nécessaire de comprendre la propagation des ondes ultrasonores dans ces milieux multiplement diffusants. Ce chapitre présente la théorie de la propagation d'ondes en milieu complexe dans le cas scalaire, ainsi qu'une simulation développée pour calculer les matrices de réflexion pour un milieu modèle simple.

La première partie du chapitre pose tout d'abord les fondements du développement de Born et de l'équation de Lippman-Schwinger. Puis, nous nous intéressons au champ moyen et à l'intensité moyenne, grandeurs permettant de définir des paramètres importants pour décrire le milieu tels que les libre parcours moyen de diffusion et de transport. La matrice de diffusion d'un diffuseur unique est introduite puis intégrée dans les équations de la diffusion. Enfin, une simulation des matrices de réflexion pour différents ordres de diffusion est proposée et permet d'étudier les propriétés des matrices de diffusion simple et multiple.

## 2.1 Propagation d'ondes dans un milieu complexe

La théorie présentée ici s'appuie sur l'utilisation des fonctions de Green, introduites initialement en 1828 [1] dans le domaine des ondes électromagnétiques. Il s'agit d'une méthode très générale pour résoudre des équations linéaires aux dérivées partielles comme l'équation des ondes.

La notation adoptée pour décrire une onde plane harmonique se propageant dans un milieu homogène de référence à la vitesse  $c_0$  est la suivante :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.1)$$

avec  $\psi_0$  l'amplitude de l'onde,  $\omega$  sa pulsation et  $\mathbf{k}$  son vecteur d'onde de module  $k_0 = \omega/c_0$ . En milieu homogène, la propagation du champ de pression acoustique créé par une distribution de sources  $S(\mathbf{r}, t)$  est régie par l'équation des ondes

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Par définition, la fonction de Green temporelle en milieu homogène est la solution de l'équation (2.2) lorsque le terme source est une distribution de Dirac  $\delta$  spatio-temporelle. Cette fonction est notée  $G_0$  et satisfait l'équation de Green temporelle

$$\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t). \quad (2.3)$$

L'équation des ondes peut également être étudiée dans le domaine fréquentiel en appliquant une transformée de Fourier temporelle à l'équation (2.2), ce qui conduit à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \psi(\mathbf{r}, \omega) = S(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.4)$$

qui a pour équation de Green fréquentielle associée :

$$\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + k_0^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.5)$$

La fonction de Green fréquentielle en milieu homogène  $G_0$  est solution de l'équation de Green (2.5) et s'écrit :

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \begin{cases} -\frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & \text{à 2D scalaire,} \\ -\frac{\exp(ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \text{à 3D scalaire,} \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $\mathcal{H}_0^{(1)}$  est la fonction de Hankel d'ordre 0.

### 2.1.1 Milieu complexe et série de Born

Un milieu fluide hétérogène peut être décrit par sa densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et sa vitesse  $c(\mathbf{r}, t)$ . En faisant l'hypothèse que la densité du milieu au repos est invariante dans le temps ( $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t)$ ), l'équation de Helmholtz s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \psi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla \psi(\mathbf{r}, \omega). \quad (2.7)$$

Cette expression peut s'écrire :

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \psi(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \mu(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.8)$$

avec

$$\mu(\mathbf{r}) = 1 - c_0^2 / c(\mathbf{r})^2 + 1 / (k_0^2 \rho_0) \nabla \rho_0 \nabla, \quad (2.9)$$

potentiel adimensionné décrivant l'hétérogénéité du milieu. Le premier terme de l'expression de  $\mu$ , correspondant à un contraste de vitesse, est un simple scalaire, tandis que le second, correspondant à contraste de densité, est un opérateur. Dans la suite, nous considérerons un milieu dans lequel les variations spatiales de densité au repos peuvent être ignorées [2] : le potentiel  $\mu$  décrivant l'hétérogénéité se réduit alors à un simple scalaire. De part sa forme, l'équation (2.8) peut donc être considérée comme une équation d'ondes en milieu homogène avec un terme source dû aux hétérogénéités. L'équation de Green correspondant à l'équation d'ondes en milieu hétérogène (2.8) est la suivante :

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = k_0^2 \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.10)$$

La fonction de Green en milieu hétérogène s'écrit donc :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 \\ &= G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \mu(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) ne constitue pas une expression explicite de  $\mathbf{G}$ , mais plutôt une relation de récursivité que doit satisfaire  $\mathbf{G}$  : en effet  $\mathbf{G}$  apparaît à la fois dans le membre de droite

et de gauche. En substituant  $\mathbf{G}$  par cette expression récursive et en itérant le procédé, on aboutit à une expression explicite contenant une infinité de termes successifs; il s'agit du développement de Born, qui s'écrit :

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \\
 &+ k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \mu(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}_1 \\
 &+ k_0^4 \iint G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \mu(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \mu(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Le premier terme de l'équation (2.12) est la fonction de Green en milieu homogène et décrit la propagation sans diffuseur. Le second terme fait intervenir une intégrale simple portant sur la position d'un diffuseur : il caractérise la diffusion simple, c'est-à-dire les chemins au cours desquels l'onde n'interagit qu'avec un unique diffuseur. Par ce même raisonnement, tous les termes d'ordres supérieurs font intervenir au moins deux diffuseurs : il s'agit de termes de diffusion multiple (cf. Fig. 2.1). En imagerie échographique, l'une des hypothèses fondatrices est que la diffusion multiple est négligeable. Cela revient à tronquer ce développement au second terme, ce qui constitue l'approximation de Born.

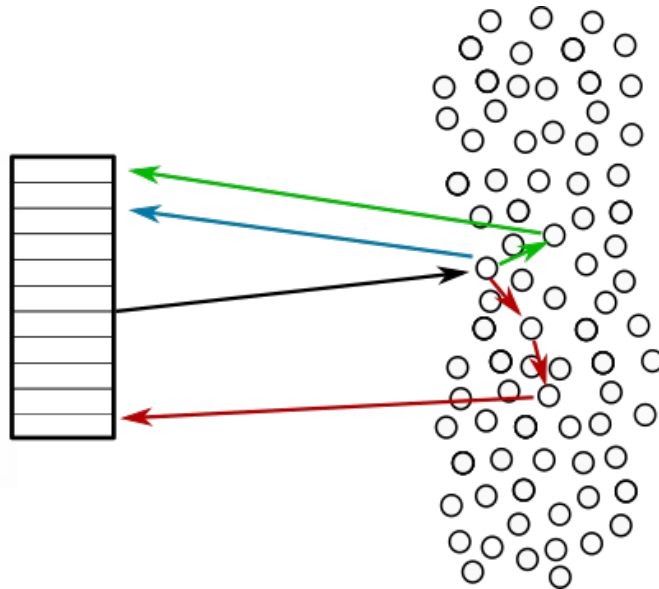


FIGURE 2.1 – Exemples de chemins de diffusion simple (bleu), double (vert) et triple (rouge).

Dans le cas où l'on ne considère pas une source ponctuelle mais une distribution de sources  $S(\mathbf{r})$ , le champ résultant s'écrit  $\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ . Il obéit donc comme  $\mathbf{G}$  à une équation récursive appelée équation de Lippmann-Schwinger :

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + k_0^2 \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \mu(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \tag{2.13}$$

De manière analogue à l'équation (2.12), cette expression se développe par substitution répétée de  $\psi(\mathbf{r})$  dans le membre de droite.

Les développements de cette section ont été réalisés avec des notations acoustiques et dans un contexte scalaire; ils se généralisent néanmoins aux ondes vectorielles en prenant en compte la polarisation au prix d'une plus grande complexité des notations [3].

## 2.1.2 Grandeurs moyennes

La théorie précédente met en équation l'évolution du champ acoustique pour une réalisation d'un milieu hétérogène. Considérant ce milieu particulier comme une réalisation du processus aléatoire  $\mu(\mathbf{r})$ , il est intéressant de calculer les paramètres essentiels du champ  $\psi(\mathbf{r})$ , à commencer par sa valeur moyenne statistique.

Théoriquement, il faut effectuer une moyenne statistique (ou moyenne d'ensemble) sur les réalisations du milieu. Ainsi, pour obtenir des grandeurs spatiales moyennes, il serait nécessaire d'avoir de nombreux échantillons aux propriétés statistiques identiques. En pratique, deux parties d'un même échantillon peuvent être considérées comme distinctes si les signaux reçus sont décorrélés. Dans le cadre d'un signal mesuré spatialement stationnaire, le principe d'ergodicité introduit par Boltzmann peut être utilisé pour remplacer la moyenne sur les réalisations par une moyenne spatiale.

### Champ moyen

En pratique, les signaux  $K_{ij}(t)$  de la matrice de réflexion acquise dans la base canonique nous fournissent différentes réalisations du milieu. Ainsi, une moyenne des différents signaux de la matrice de réflexion nous donne accès à un estimateur du « champ moyen » (cf. Fig. 2.2). Une autre manière d'obtenir différentes réalisations du milieu est de faire des acquisitions en différentes positions de la pièce à inspecter.

La fonction de Green  $\mathbf{G}$  peut être décomposée en une fonction de Green moyenne  $\langle \mathbf{G} \rangle$  et des fluctuations  $\delta\mathbf{G}$  de moyenne nulle :  $\mathbf{G} = \langle \mathbf{G} \rangle + \delta\mathbf{G}$ . Le calcul de la fonction de Green moyenne s'obtient en moyennant l'équation de Born (2.11) sur les réalisations. Il s'effectue grâce à une approche diagrammatique qui ne sera pas décrite ici [4]. La fonction de Green moyenne prend la forme de celle d'un milieu homogène atténuant : le vecteur d'onde est complexe et noté  $k_{eff}$ .

$$\langle G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \rangle = \begin{cases} -\frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(1)}(k_{eff} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) & \text{à 2D scalaire,} \\ -\frac{\exp(ik_{eff} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} & \text{à 3D scalaire.} \end{cases} \quad (2.14)$$

La partie réelle de  $k_{eff}$  permet de décrire la vitesse effective du front d'onde cohérent dans le milieu (vitesses de phase,  $c_\phi$  et de groupe,  $c_{gr}$ ) et sa partie imaginaire l'atténuation effective :



$$c_\phi = \frac{\omega}{\text{Re}\{k_{eff}\}}, \quad (2.15a)$$

$$\frac{1}{c_{gr}} = \frac{\partial \text{Re}\{k_{eff}\}}{\partial \omega}, \quad (2.15b)$$

$$\ell_{ext}(\omega) = \frac{1}{2 \text{Im}\{k_{eff}\}}, \quad (2.15c)$$

avec  $\ell_{ext}(\omega)$  le libre parcours moyen d'extinction, qui rend compte à la fois de l'atténuation par absorption et de la diffusion. À 3D et à 2D en champ lointain, le champ moyen décroît exponentiellement avec la distance de propagation, avec une distance caractéristique  $\ell_{ext}(\omega)$ . Dans toute cette thèse, nous considérons un milieu sans atténuation; ainsi le libre parcours moyen d'extinction sera égal au libre parcours moyen de diffusion, noté  $\ell_s(\omega)$ .

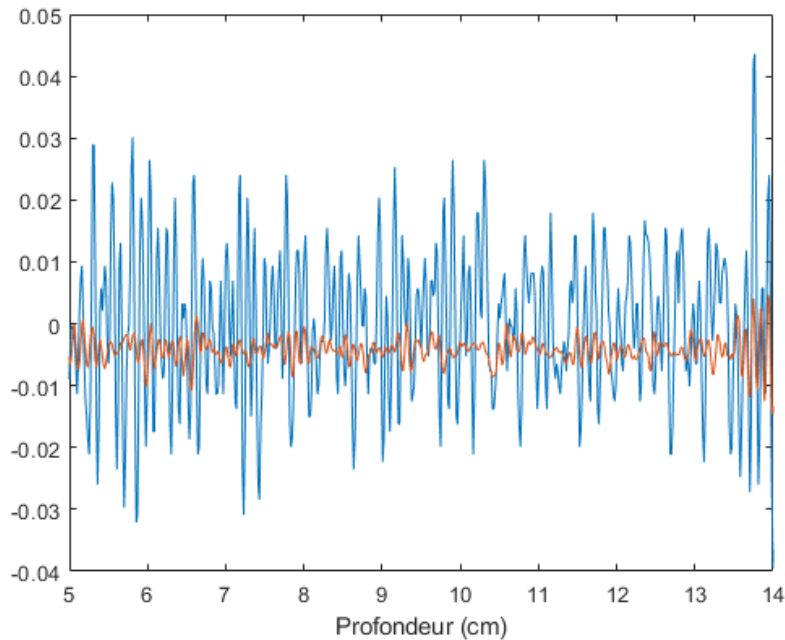


FIGURE 2.2 – Une réalisation d'une réponse inter-éléments dans une billette de Ti17 (bleu) et moyenne sur l'ensemble des 64 récepteurs (rouge) pour le tir avec l'élément central, faisant apparaître l'écho de fond cohérent à la profondeur 13 cm.

La comparaison de  $\ell_s$  à l'épaisseur traversée  $L$  permet de définir plusieurs régimes de diffusion :

- ▶ Si  $L \ll \ell_s$ , la diffusion simple domine largement la diffusion multiple et l'approximation de Born est valable.
- ▶ Si  $L \approx \ell_s$ , la diffusion simple et la diffusion multiple sont du même ordre de grandeur; le front cohérent reste discernable, même sur une seule réalisation du désordre.
- ▶ Si  $L \gg \ell_s$ , la diffusion multiple domine à tel point que le champ moyen  $\langle \mathbf{G} \rangle$  peut être négligé par rapport aux fluctuations  $\delta \mathbf{G}$ .

### Intensité moyenne

L'intensité moyenne est une grandeur étudiée surtout en optique où l'amplitude du champ n'est pas facilement accessible. Elle se définit comme  $\langle I \rangle = \langle \psi \psi^* \rangle$  et fait donc intervenir la corrélation moyenne des chemins de diffusion. Dans un milieu complexe, l'intensité moyenne suit l'équation de Bethe-Salpether [4], qui peut se simplifier en équation du transfert radiatif (ETR). L'ETR se simplifie aux temps longs ( $t \gg \ell^*/c_0$ ) en une équation de la diffusion, dans laquelle apparaît un nouveau paramètre caractéristique du milieu : le libre parcours moyen de transport  $\ell^*$ , qui peut être interprété physiquement comme la distance à laquelle l'onde a perdu l'information sur sa direction initiale. Son expression s'obtient à partir du libre parcours moyen de diffusion :

$$\ell^* = \frac{\ell_s}{1 - \langle \cos \theta \rangle}, \quad (2.16)$$

avec  $\langle \cos \theta \rangle$  le cosinus moyen de l'angle de diffusion d'un diffuseur individuel.

Dans un régime diffusif, l'équation de la diffusion a pour paramètre le coefficient de diffusion  $D$ , qui fait intervenir le libre parcours moyen de transport :

$$D = \frac{c_0 \ell^*}{d}, \quad (2.17)$$

avec  $d$  la dimension de l'espace ( $d$  vaut 2 à 2D et 3 à 3D).

### Rétrodiffusion cohérente

L'approche diffuse rend bien compte des phénomènes observés en transmission, mais non en rétrodiffusion dans le cas où le récepteur est proche de la source. En effet, le phénomène de rétrodiffusion cohérente, qui réhausse l'intensité moyenne reçue à proximité de l'émetteur en présence de diffusion multiple, ne peut être expliqué par l'équation de la diffusion. Les calculs décrivant cet effet sont présentés dans la littérature [5] et seuls les arguments qualitatifs sont repris ici. Le calcul de l'intensité moyenne fait intervenir la corrélation des chemins de diffusion. Plusieurs contributions de natures différentes existent :

- ▶ l'interférence de deux chemins quelconques : leur différence de marche est aléatoire, donc cette contribution est nulle en moyenne;
- ▶ l'interférence entre deux chemins identiques (contribution incohérente ou diffuson, Fig. 2.3(a));
- ▶ l'interférence entre deux chemins réciproques (contribution cohérente ou cooperon, Fig. 2.3(b)) qui n'existe qu'en présence de diffusion multiple. En régime de diffusion simple, les chemins réciproques sont confondus avec les chemins identiques.

Tous les chemins identiques résistent à la moyenne, car leur différence de phase est nulle pour toute distance émetteur-récepteur. Au contraire, les chemins réciproques ont une contribution qui résiste à la moyenne seulement lorsque la différence de marche entre les deux chemins est petite devant la longueur d'onde, c'est-à-dire lorsque l'émetteur est proche du récepteur.

Le cooperon s'ajoute donc au fond constant dû au diffuson et crée le pic de rétrodiffusion cohérente [6, 7], signature de la présence de diffusion multiple. La hauteur du pic nous donne

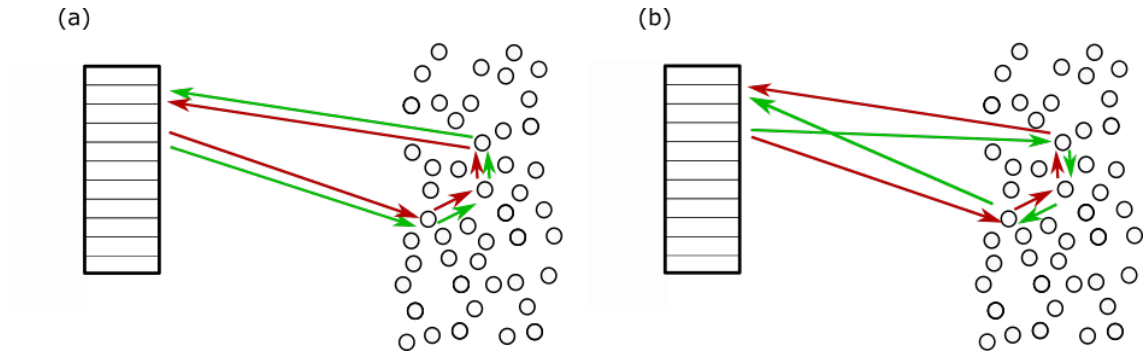


FIGURE 2.3 – Chemins (a) identiques et (b) réciproques en présence de diffusion multiple.

un indicateur de la proportion de diffusion multiple : s'il n'est pas visible, la contribution de la diffusion multiple à l'intensité totale est négligeable; si sa hauteur est égale à la contribution du diffuson, la contribution de la diffusion simple à l'intensité totale est négligeable. Une hauteur intermédiaire indique un régime moyen où cohabitent diffusion simple et multiple. Ce pic est visible dans l'alliage de titane Ti17 à 3 MHz, comme illustré par la figure 2.4 qui montre l'intensité moyenne en fonction de la distance émetteur-récepteur aux profondeurs 6 et 10 cm.

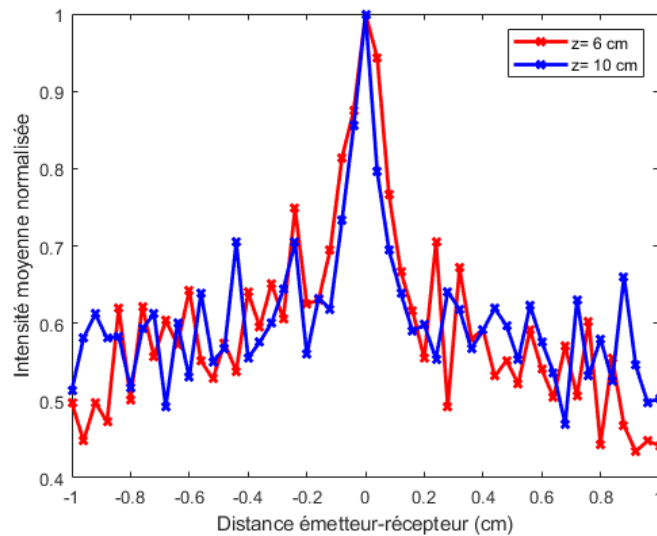


FIGURE 2.4 – Pics de rétrodiffusion cohérente dans la billette de Ti17 aux profondeurs 6 et 10 cm (fenêtrage temporel de 2  $\mu$ s).

En champ lointain et en régime monochromatique, la largeur caractéristique du pic de rétrodiffusion cohérente est  $\lambda/\sqrt{Dt}$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde,  $D$  le coefficient de diffusion et  $t$  le temps passé par l'onde dans le milieu diffusant. Sur la figure 2.4, la largeur du pic est d'environ 2 mm pour les profondeurs 6 et 10 cm, ce qui correspond à  $\lambda$  à 3 MHz. La figure 2.5 illustre l'intensité moyenne en fonction de la distance émetteur-récepteur au cours du temps. Dans les alliages de titane, la décroissance de la largeur du pic au cours du temps n'est que peu observable à faible profondeur à cause de l'écho d'interface et des ondes de surface. En revanche, le pic disparaît au fond de la pièce (autour d'une profondeur de 12 cm), ce qui

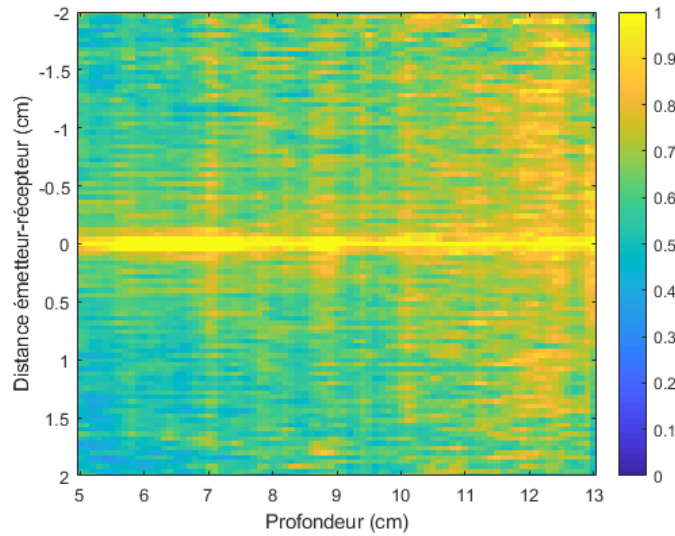


FIGURE 2.5 – Intensité moyenne normalisée dans la billette de Ti17 en fonction de la profondeur observée à 3 MHz.

est le signe d'une augmentation significative de la diffusion simple à cette profondeur sans doute due à l'écho de fond.

### 2.1.3 Matrice $\mathbf{T}$ et notion de diffuseur

Les équations précédentes ont été écrites dans un milieu au désordre continu. Dans toute la suite de la thèse, nous nous restreindrons à un milieu composé de diffuseurs discrets, c'est-à-dire tel qu'il existe un nombre fini de zones de l'espace où  $\mu \neq 0$ . Posons  $V$  tel que  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = k_0^2 \mu(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Les équations (2.11) et (2.13) peuvent se réécrire en adoptant l'écriture matricielle plus légère

$$\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} \leftrightarrow \iint V(\mathbf{r}_1, \mathbf{x}) G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) V(\mathbf{y}, \mathbf{r}_2) dx dy, \quad (2.18)$$

ce qui nous conduit finalement à l'écriture compacte de ces équations (développement de Born) :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0 + \dots \\ \boldsymbol{\psi} &= \boldsymbol{\psi}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V}\boldsymbol{\psi}_0 + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

#### Définition de la matrice $\mathbf{T}$

Imaginons le milieu comme un seul diffuseur très étendu : il n'existe alors pas de diffusion multiple avec un autre diffuseur. La relation entre les champs incident  $\boldsymbol{\psi}_0$ , diffusé et total  $\boldsymbol{\psi}$  est donné par la matrice  $\mathbf{T}$  du système, telle que  $\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0\mathbf{V} + \dots$  :

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0 + \mathbf{G}_0\mathbf{T}\boldsymbol{\psi}_0. \quad (2.20)$$

La complexité de la série de Born est intégrée à la matrice  $\mathbf{T}$ , qui contient tous les chemins de diffusion simple et multiple **à l'intérieur** du diffuseur étendu (cf. Fig. 2.6(a)).

Si le milieu est composé de  $N_s$  diffuseurs, dont le  $i^e$  est caractérisé par une matrice  $\mathbf{T}$  notée  $\mathbf{T}_i$  (cf. Fig. 2.6(b)), le champ total s'écrit comme la somme des contributions individuelles des diffuseurs et de leurs interactions :

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^{N_s} \mathbf{G}_0 \mathbf{T}_i \psi_0 + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_s} \mathbf{G}_0 \mathbf{T}_i \mathbf{G}_0 \mathbf{T}_j \psi_0 + \dots \quad (2.21)$$

Cette équation est exacte, quelle que soit la définition de « diffuseur » adoptée (ponctuel ou non, élémentaire ou non). Les termes du membre de droite représentent respectivement les champs incident, issu de la diffusion simple et des différents ordres de diffusion entre ces diffuseurs. L'équation (2.21) constitue la relation fondamentale qui sera utilisée en simulation dans la suite.

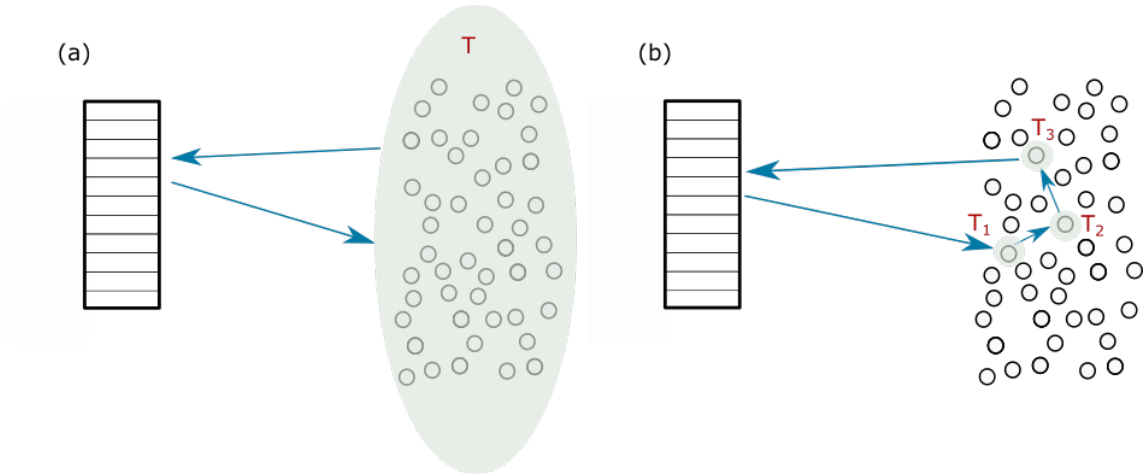


FIGURE 2.6 – Illustration de la matrice  $\mathbf{T}$  (a) du milieu complet (2.20), (b) des diffuseurs individuels (2.21).

### Matrice $\mathbf{T}_i$ d'un diffuseur unique

Calculons à présent la valeur de  $\mathbf{T}_i$  pour un diffuseur sphérique de rayon  $a$  petit devant la longueur d'onde dans le fluide et dans le diffuseur, situé à la position  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ . Ce diffuseur, considéré comme fluide, présente un contraste de vitesse avec le milieu environnant, mais pas de densité. La vitesse de l'onde dans le diffuseur est notée  $c_s$ . Par définition de la fonction de Green et d'après l'équation (2.11), le champ de pression  $\psi(\mathbf{r}, \omega)$  obéit à l'équation de Lippman-Schwinger qui relie le champ total au champ incident :

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \int_{\mathcal{V}} \mathbf{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mu(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.22)$$

avec  $\mathcal{V} = 4/3\pi a^3$  le volume de la particule à 3D et  $\mathcal{V} = \pi a^2$  sa surface à 2D.

Le champ total de l'équation (2.22) s'écrit comme la somme du champ incident  $\psi_0(\mathbf{r}, \omega)$  et du champ diffusé :

$$\psi_d(\mathbf{r}, \omega) = k_0^2 \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mu(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'. \quad (2.23)$$

La particule étant petite, faisons l'hypothèse que le champ est constant dans son volume  $\mathcal{V}$ . L'équation (2.22) se simplifie alors :

$$\psi(\mathbf{r}_s, \omega) = \psi_0(\mathbf{r}_s, \omega) + k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \psi(\mathbf{r}_s, \omega) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (2.24)$$

qui s'inverse pour donner l'expression du champ à l'intérieur de la particule :

$$\psi(\mathbf{r}_s, \omega) = \frac{\psi_0(\mathbf{r}_s, \omega)}{1 - k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'}. \quad (2.25)$$

La matrice  $\mathbf{T}_i$  d'un diffuseur décrit entièrement la diffusion par la particule, car elle relie le champ incident au champ diffusé. Elle est caractérisée par l'équation (2.20) qui s'écrit sous forme intégrale :

$$\psi_d(\mathbf{r}, \omega) = \iint_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \omega) \mathbf{T}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \psi_0(\mathbf{r}_2, \omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (2.26)$$

avec  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  les points "d'entrée" et "de sortie" dans le diffuseur. Pour une particule sub-longueur d'onde comme celle étudiée ici :

$$\mathbf{T}_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \mathcal{T}_0(\omega) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s), \quad (2.27)$$

avec  $\mathcal{T}_0(\omega)$  la réponse fréquentielle du diffuseur. En optique,  $\mathcal{T}_0(\omega) = k_0^2 \alpha(\omega)$ , avec  $\alpha(\omega)$  la polarisabilité de la particule. Elle a la dimension d'un volume à 3D et d'une surface à 2D.

Ainsi :

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathcal{T}_0(\omega) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \psi_0(\mathbf{r}_s, \omega), \quad (2.28)$$

et en réinjectant l'équation (2.25) :

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0(\mathbf{r}, \omega) + \mathcal{T}_0(\omega) \left( 1 - k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' \right) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \psi_0(\mathbf{r}_s, \omega). \quad (2.29)$$

Réécrivons l'équation de Lippman-Schwinger (2.22) en un point  $\mathbf{r}$  suffisamment éloigné de la particule pour que la fonction de Green  $G_0$  puisse être considérée constante dans le volume de la particule :

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 \mathcal{V} \mu(\mathbf{r}_s) G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) \psi(\mathbf{r}_s, \omega). \quad (2.30)$$

Ainsi, par identification des termes dans les deux dernières équations, on trouve :

$$\mathcal{T}_0(\omega) \left( 1 - k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' \right) = k_0^2 \mathcal{V} \mu(\mathbf{r}_s). \quad (2.31)$$

L'expression de la réponse fréquentielle du diffuseur est donc la suivante :

$$\mathcal{T}_0(\omega) = \frac{k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \mathcal{V}}{1 - k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'}. \quad (2.32)$$

### Calcul de $\mathcal{T}_0(\omega)$ à 2D et à 3D

À 3D, on a :

$$\int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' = \frac{-1}{4\pi} \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \approx -\frac{a^2}{2} - \frac{ik_0 \mathcal{V}}{4\pi}, \quad (2.33)$$

d'où l'expression de  $\mathcal{T}_0$  à 3D :

$$\mathcal{T}_0(\omega) \approx \frac{k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \mathcal{V}}{1 + \frac{ik_0^3 \mathcal{V} \mu(\mathbf{r}_s)}{4\pi}}. \quad (2.34)$$

À 2D, il est nécessaire de calculer  $\frac{-i\pi}{2} \int_0^a r \mathcal{H}_0^{(1)}(k_0 r) dr$ , sans utiliser le développement en champ lointain de la fonction de Hankel. Au vu de l'expression (2.32) établie pour de petites particules ( $k_0 a \ll 1$ ), seule la partie imaginaire de  $k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'$  ne sera pas négligeable ; la partie réelle pourra être négligée devant 1.

Lorsque  $k_0 a \ll 1$ , les fonctions de Bessel ont le comportement asymptotique suivant :

$$J_0(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1)} = 1, \quad (2.35a)$$

$$Y_0(x) \approx \frac{2}{\pi} \left( \log\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right), \quad (2.35b)$$

avec  $\gamma$  la constante d'Euler-Mascheroni.

Or,

$$G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) = \frac{-i}{4} (J_0(x) + iY_0(x)), \quad (2.36)$$

avec  $x = k_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_s|$ . Ainsi, seule l'intégrale de  $J_0$  est non négligeable pour le calcul et

$$\text{Im} \int_{\mathcal{V}} G_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}' \approx \frac{-i\pi a^2}{4}, \quad (2.37)$$

d'où à 2D :

$$\mathcal{T}_0(\omega) \approx \frac{k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) \mathcal{V}}{1 + \frac{ik_0^2 \mathcal{V} \mu(\mathbf{r}_s)}{4}}. \quad (2.38)$$

Ainsi, une expression analytique simple de la matrice  $\mathbf{T}$  d'un diffuseur peut être obtenue dans le cas de petits diffuseurs. Cette grandeur sera utilisée dans la section suivante pour exprimer numériquement le lien entre l'onde incidente et l'onde diffusée par un diffuseur.

#### 2.1.4 Section efficace de diffusion

Dans ce document, aucune absorption par la particule n'est considérée. Ainsi, l'ensemble de l'énergie incidente sur la particule doit être diffusée par celle-ci et le flux du vecteur de Poynting à travers une surface qui entoure le diffuseur ne dépend pas de la présence ou non de celui-ci.

Plaçons-nous dans le cas d'une onde plane incidente dans la direction  $\mathbf{u}_0$  :  $\psi_0(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i k_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}}$ . Le vecteur de Poynting acoustique moyenné sur un période temporelle s'écrit :

$$\langle \mathbf{J}_0 \rangle = \frac{1}{2\omega\rho_0} \text{Im}(\psi_0(\mathbf{r})^* \nabla \psi_0(\mathbf{r})) = \frac{k_0 |\psi_0|^2}{2\omega\rho_0} \mathbf{u}_0. \quad (2.39)$$

Lorsque l'onde incidente arrive sur le diffuseur placé au point  $\mathbf{r}_s$ , elle est diffusée dans différentes directions de l'espace. La section efficace totale de diffusion  $\sigma_s(\mathbf{u}_0, \omega)$  est définie comme le rapport entre la puissance diffusée et la densité de puissance incidente. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\sigma_s(\mathbf{u}_0, \omega) = \frac{\oint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{J}_d \rangle \cdot d\mathbf{S}}{|\langle \mathbf{J}_0 \rangle|}, \quad (2.40)$$

avec  $\mathbf{J}_d$  le vecteur de Poynting de l'onde diffusé et  $\mathcal{S}$  la sphère (3D) ou le cercle (2D) de rayon  $R$  qui entoure le diffuseur. Considérons que cette surface est très éloignée des diffuseurs : le champ diffusé  $\psi_d$  est localement une onde plane et le vecteur de Poynting acoustique moyen relatif à l'onde diffusée est :

$$\langle \mathbf{J}_d \rangle = \frac{1}{2\omega\rho_0} \text{Im}(\psi_d(\mathbf{r})^* \nabla \psi_d(\mathbf{r})). \quad (2.41)$$

Or, on rappelle que, d'après l'équation (2.26),  $\psi_d(\mathbf{r})$  s'exprime en fonction de la réponse fréquentielle  $\mathcal{T}_0$  du diffuseur. Pour une petite particule sphérique (3D) ou cylindrique (2D), le champ en un point  $\mathbf{r}$  de la surface  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$\psi_d(\mathbf{r}) = \mathcal{T}_0 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \psi_0(\mathbf{r}_s), \quad (2.42)$$

d'où

$$\oint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{J}_d \rangle \cdot d\mathbf{S} = \frac{k_0 |\mathcal{T}_0|^2 |\psi_0|^2}{2\omega\rho_0} \oint_{\mathcal{S}} |G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)|^2 \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.43)$$

L'expression de la section efficace totale de diffusion est alors :

$$\sigma_s(\mathbf{u}_0, \omega) = |\mathcal{T}_0|^2 \oint_{\mathcal{S}} |G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)|^2 \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.44)$$

### Expression de la section efficace à 3D scalaire

À 3D, l'élément de surface est  $d\mathbf{S} = r^2 dr d\theta d\phi$ ; la dépendance en  $r^2$  se simplifie avec celle du carré de la fonction de Green (2.6) et l'intégrale est égale à l'angle solide complet soit  $4\pi$ . D'où l'expression de la section efficace de diffusion :

$$\sigma_s(\omega) = \frac{|\mathcal{T}_0(\omega)|^2}{4\pi}. \quad (2.45)$$



### Expression de la section efficace à 2D scalaire

À 2D,  $d\mathbf{S} = r d\theta$ ; la dépendance en  $r$  se simplifie avec celle du carré de la fonction de Green en champ lointain (2.6) et l'intégrale vaut alors  $2\pi$ . D'où l'expression de la section efficace de diffusion :

$$\sigma_s(\omega) = \frac{|\mathcal{T}_0(\omega)|^2}{4k_0}. \quad (2.46)$$

La théorie nous permet ainsi de définir les paramètres de diffusion utiles pour décrire le champ diffusé par une unique particule isotrope fluide. Ces grandeurs sont utilisées dans la suite pour simuler la matrice de réflexion d'un ensemble de diffuseurs identiques.

## 2.2 Simulation numérique du champ diffusé

La simulation numérique implémentée est fondée sur la résolution des équations régissant la diffusion d'une onde acoustique par un ensemble de diffuseurs présentés précédemment. D'autres études basées sur la même approche peuvent être trouvées dans la littérature [8, 9]. La simulation numérique permet une étude des matrices de réflexion **par ordre de diffusion**, ce qui n'est pas possible expérimentalement. En effet, seuls les cas limites  $L \gg \ell_s$  et  $L \ll \ell_s$  correspondant aux cas où la diffusion simple ou la diffusion multiple sont largement prépondérants permettent de mesurer une réalisation de la matrice de diffusion simple ou de diffusion multiple respectivement.

### 2.2.1 Paramètres de la simulation

Le but recherché n'est pas de développer un outil numérique permettant de reproduire fidèlement la réponse ultrasonore d'un milieu aussi complexe qu'un polycristal, mais de disposer d'une simulation permettant d'accéder séparément à tous les ordres de diffusion et d'étudier leurs propriétés séparément. Il s'agit notamment d'évaluer la contribution de chaque ordre à la réponse totale du milieu ainsi que les corrélations entre différents ordres. À cette fin, nous réduisons délibérément la complexité du problème en choisissant comme archétype un nuage de diffuseurs quasi-ponctuels immergés dans un fluide.

Les paramètres de la simulation sont les suivants :

- ▶ La simulation est réalisée à 2 dimensions, ce qui permet d'être réaliste vis-à-vis d'une expérience ultrasonore et de limiter le temps de calcul.
- ▶ Les diffuseurs présentent un contraste de vitesse mais pas de densité. De plus, ils sont choisis petits devant la longueur d'onde acoustique : ce sont donc des diffuseurs isotropes, leur rayonnement est monopolaire. La vitesse dans les diffuseurs est  $c_s = 2500$  m/s.
- ▶ Les diffuseurs sont répartis aléatoirement dans un rectangle de largeur 13.5 cm et de longueur 15 cm, à une distance minimale de 14 cm de la sonde ultrasonore.
- ▶ Le milieu environnant est l'eau (densité 1 et vitesse de l'onde acoustique 1480 m/s). L'atténuation du milieu est négligée.

- La sonde ultrasonore est un réseau de transducteurs de 64 éléments de fréquence centrale 1.5 MHz, de largeur de bande 1.0-2.0 MHz (apodisation par une fenêtre de von Hann), échantillonnée spatialement à un pas  $p=0.5$  mm.

Les diffuseurs étant petits devant la longueur d'onde, l'expression de la réponse fréquentielle d'un diffuseur déterminée Eq. (2.38) est rappelée ici :

$$\mathcal{T}_0(\omega) = \frac{k_0^2 \pi a^2 \mu(\mathbf{r}_s)}{1 + \frac{ik_0^2}{4} \pi a^2 \mu(\mathbf{r}_s)}. \quad (2.47)$$

La section efficace de diffusion peut être déduite de la grandeur précédente grâce au théorème optique (Eq. (2.46)). Celui-ci s'écrit classiquement en optique pour la polarisabilité  $\alpha(\omega)$  et peut être transposé à notre grandeur d'intérêt  $\mathcal{T}_0$  :

$$\begin{aligned} \sigma_s(\omega) &= \frac{1}{4k_0} |\mathcal{T}_0(\omega)|^2 \\ &= \frac{k_0^3}{4} \left| \frac{\pi a^2 \mu(\mathbf{r}_s)}{1 + \frac{ik_0^2}{4} \pi a^2 \mu(\mathbf{r}_s)} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Lorsque le milieu est dilué, le libre parcours moyen de diffusion peut être calculé en utilisant l'approximation de diffusion indépendante (*Independent Scattering Approximation*, ISA), qui consiste d'une part à traiter les positions des diffuseurs comme des variables aléatoires indépendantes, et d'autre part à négliger la contribution des boucles (c'est-à-dire des séquences de diffusion multiple visitant plusieurs fois le même diffuseur) :

$$\ell_s = \frac{1}{\rho_s \sigma_s}, \quad (2.49)$$

avec  $\rho_s$  la densité surfacique de diffuseurs. Dans notre simulation, la concentration est de 4 diffuseurs par  $\text{cm}^2$  (fraction surfacique de 0.13%), ce qui donne une valeur de  $\ell_s = 0.97$  m à la fréquence centrale soit  $k_0 \ell_s \gg 1$ . L'ISA peut donc être considérée valide.

### 2.2.2 Série de Born numérique et convergence

La simulation consiste à considérer tous les chemins de diffusion possibles et à les classer en fonction du nombre d'événements de diffusion subis (cf. Fig. 2.1). Conformément à la description de la série de Born, un chemin de diffusion simple est un chemin dans lequel l'onde rencontre un unique diffuseur; elle en rencontre deux pour un chemin de diffusion double. Les diffuseurs étant isotropes, le champ diffusé ne dépend pas de l'angle d'incidence sur le diffuseur; son amplitude est régie par la réponse fréquentielle du diffuseur  $\mathcal{T}_0$  qui est un scalaire complexe. Entre deux événements de diffusion, l'onde se propage dans un milieu homogène sans atténuation.

À chaque fréquence angulaire  $\omega$ , la matrice de réflexion  $\mathbf{K} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega)]$  de dimension  $N \times N$  peut être décomposée selon la série de Born en une infinité d'ordres de diffusion :

$$\mathbf{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{K}^{(n)}, \quad (2.50)$$

avec  $\mathbf{K}^{(n)}$  la matrice de réflexion restreinte au  $n^e$  ordre de diffusion.

Pour chaque fréquence, la matrice décrivant la propagation depuis les transducteurs ( $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$ ) jusqu'aux diffuseurs ( $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{N_s}$ ) est notée  $\mathbf{G}_0 = [G_0(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_j, \omega)]$ . La matrice de diffusion simple  $\mathbf{K}^{(1)}$  résulte de la propagation entre la sonde et l'ensemble des diffuseurs, de l'interaction avec ces diffuseurs et du retour direct de l'onde vers la sonde. Ainsi, elle s'écrit comme un produit matriciel :

$$\mathbf{K}^{(1)}(\omega) = \mathbf{G}_0(\omega) \times \mathcal{T}_0(\omega) \times \mathbf{G}_0^\top(\omega), \quad (2.51)$$

avec  $^\top$  la transposée de la matrice.

La matrice de propagation de diffuseur à diffuseur est notée  $\mathbf{G}'_0 = [G_0(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \omega)]$  et est composée également de fonctions de Green en espace libre; mais sa dimension ( $N_s \times N_s$ ) est différente de celle de  $\mathbf{G}_0$  qui est de taille  $N \times N_s$ . Les matrices de réflexion peuvent être calculées pour chaque ordre de diffusion  $n$  :

$$\mathbf{K}^{(n)}(\omega) = \mathcal{T}_0(\omega) \times \mathbf{G}_0(\omega) \times (\mathcal{T}_0(\omega) \mathbf{G}'_0(\omega))^{n-1} \times \mathbf{G}_0(\omega)^\top. \quad (2.52)$$

Ainsi, pour prendre en compte chaque ordre de diffusion supplémentaire, il suffit d'intercaler dans la matrice d'ordre inférieure le produit par  $\mathbf{G}'_0 \mathcal{T}_0$  (propagation vers le diffuseur supplémentaire et interaction). La série des matrices de diffusion se comporte donc comme une série géométrique de raison  $\mathbf{G}'_0 \mathcal{T}_0$ . La matrice de diffusion totale peut être vue comme la somme de cette série et s'écrit donc :

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathcal{T}_0(\omega) \times \mathbf{G}_0(\omega) \times (\mathbf{I} - \mathcal{T}_0(\omega) \mathbf{G}'_0(\omega))^{-1} \times \mathbf{G}_0(\omega)^\top, \quad (2.53)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité et  $^{-1}$  l'inversion matricielle. Dans la suite, nous appellerons matrice de diffusion multiple la matrice  $\mathbf{K}_m = \mathbf{K} - \mathbf{K}^{(1)}$ .

Le développement de Born n'est valable que dans la mesure où la série géométrique converge, c'est-à-dire que le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral) de  $\mathbf{G}'_0 \mathcal{T}_0$  est strictement inférieur à 1. La convergence de la série a été étudiée dans la littérature [10, 11]; ici, seul le cas convergent sera considéré. La taille de la matrice  $\mathbf{G}'_0$  et son rayon spectral augmentent avec le nombre de diffuseurs; en général, l'introduction d'atténuation dans le milieu permet de se ramener à un cas convergent mais dans cette thèse nous nous sommes limité aux milieux sans atténuation.

Les matrices temporelles, telles que celles mesurées expérimentalement, sont obtenues par transformée de Fourier inverse des matrices calculées sur une bande de fréquence typique de celle des transducteurs. Des exemples de signaux temporels simulés à partir des séquences de diffusion simple, double, triple et totale sont présentés Fig. 2.7. La réponse temporelle correspondant aux séquences de diffusion simple s'annule à partir de l'instant correspondant au trajet aller-retour entre la sonde et le diffuseur le plus éloigné; au contraire, les contributions de diffusion multiple présentent une coda dont la longueur augmente avec l'ordre de diffusion. L'allure générale des signaux temporels obtenus par la simulation semble raisonnable, notamment l'allongement de la coda et la diminution de l'amplitude maximale atteinte par  $\mathbf{K}^{(n)}(t)$  avec l'ordre de diffusion (de l'ordre de 1 pour  $\mathbf{K}^{(1)}$ , 0.5 pour  $\mathbf{K}^{(2)}$ , 0.2 pour  $\mathbf{K}^{(3)}$ ) dans ce milieu peu diffusant.

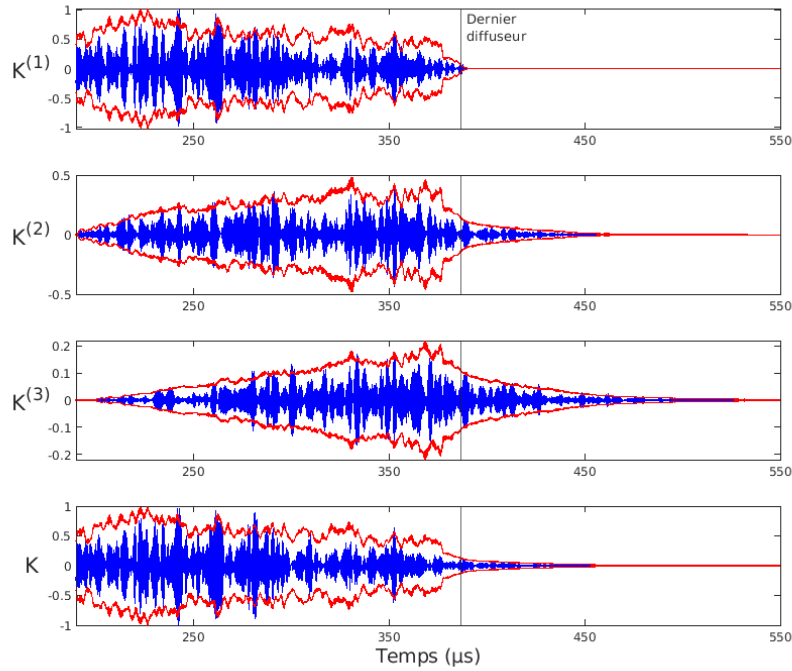


FIGURE 2.7 – Exemple de signaux temporels de diffusion (a) simple, (b) double, (c) triple et (d) totale obtenus numériquement (bleu) et enveloppe moyenne (rouge).

Dans la suite, les matrices seront analysées temporellement sur des fenêtres de  $10 \mu\text{s}$ . Ce fenêtrage permet d’observer l’évolution au cours du temps des grandeurs d’intérêt. De plus, s’agissant de la diffusion simple, le temps central de la fenêtre peut être relié à la profondeur d’étude du milieu. La figure 2.8 présente une réalisation des matrices simulées à la fréquence 1.5 MHz autour de la profondeur 24.2 cm : la sous-figure (a) représente la matrice de réflexion totale (telle qu’on pourrait la mesurer expérimentalement) ; les figures (b) et (c) illustrent la séparation de la matrice totale en deux matrices de diffusion simple et de diffusion multiple ; les figures (d) à (f) représentent les premiers ordres de diffusion multiple.

### 2.2.3 Conservation de l’énergie

Afin de s’assurer de la validité de cette simulation, cette section propose une vérification de la conservation de l’énergie. La théorie basée sur les fonctions de Green permettant de mettre en équation la conservation de l’énergie est tout d’abord rappelée, puis ce résultat est transposé à la simulation numérique.

#### Écriture théorique

La fonction de Green  $\mathbf{G}$  et sa fonction conjuguée  $\mathbf{G}^*$  satisfont la même équation de Helmholtz, qui s’écrit pour une source située en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$  (cf. Eq. (2.7)) :

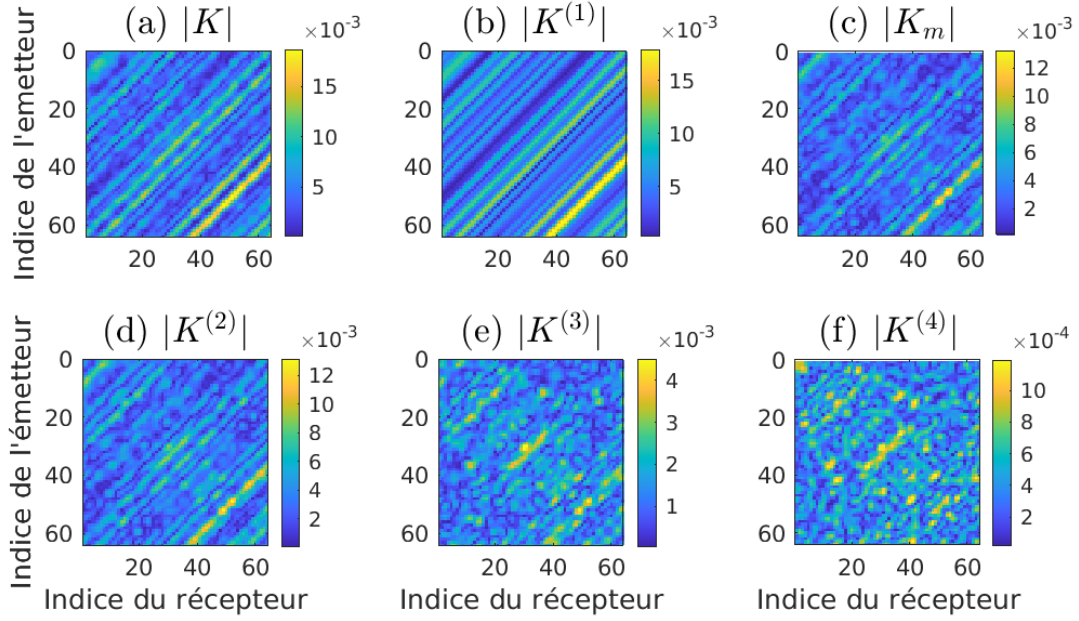


FIGURE 2.8 – Valeur absolue des éléments des différentes matrices calculées à la fréquence centrale, pour une fenêtre temporelle de  $10 \mu\text{s}$  centrée sur la profondeur  $24.2 \text{ cm}$  : (a) diffusion totale, (b) diffusion simple, (c) diffusion multiple, (d) diffusion double, (e) diffusion triple, (f) diffusion quadruple.

$$\begin{cases} \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) + k_0^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) = k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \\ \Delta G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) + k_0^2 G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) = k_0^2 \mu(\mathbf{r}_s) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \end{cases} \quad (2.54)$$

En multipliant la première équation par  $\mathbf{G}^*$ , la seconde par  $\mathbf{G}$  et en les soustrayant, l'équation suivante est obtenue :

$$\mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \Delta G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) (\mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)). \quad (2.55)$$

L'expression précédente peut être simplifiée grâce à la relation mathématique :

$\mathbf{A} \Delta \mathbf{B} - \mathbf{B} \Delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \times \mathbf{A})$ . Intégrons l'équation (2.55) sur une sphère de volume  $\mathcal{V}$  englobant l'ensemble de la source et des diffuseurs :

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)) d\mathbf{r} = -2i \text{Im}(G(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s)). \quad (2.56)$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, en notant  $d\mathbf{S}$  l'élément de surface dont la normale est sortante à la sphère, l'équation (2.56) se réécrit :

$$\oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{G}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \nabla G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)) d\mathbf{S} = -2i \text{Im}(G(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s)). \quad (2.57)$$

Si la surface  $\mathcal{S}$  est très éloignée de la source et des diffuseurs, la fonction de Green incidente peut être localement considérée comme une onde plane, ce qui permet d'écrire :  $\nabla \mathbf{G} = i k_0 \mathbf{G}$ ,  $\nabla \mathbf{G}^* = -i k_0 \mathbf{G}^*$ . D'où :

$$k_0 \oint_{\mathcal{S}} |\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)|^2 d\mathbf{S} = -\text{Im}(\mathbf{G}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s)). \quad (2.58)$$

À 2D, l'intégrale double sur la surface est remplacée par une intégrale simple sur le contour du cercle entourant la source. Dans tous les cas, comme le membre de gauche est forcément positif, cela contraint  $\text{Im}(\mathbf{G}) < 0$ . En revanche, le signe de la partie réelle de  $\mathbf{G}$  n'est pas imposé.

### Vérification en simulation

Numériquement, la conservation de l'énergie est vérifiée en plaçant un point source au centre d'un cercle de rayon  $R$  discrétisé en  $N_R$  récepteurs de positions  $r_R$  entourant largement les diffuseurs. Le membre de gauche de l'équation (2.58) se réécrit de manière discrète :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi R k_0}{N_R} \sum_{n=1}^{N_R} |\mathbf{H}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_R(\mathbf{n}))|^2 \\ &= \frac{2\pi R k_0}{N_R} \sum_{n=1}^{N_R} |\mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{r}_R(\mathbf{n})) + \mathbf{G}_0(\mathbf{0}, \mathbf{r}_R(\mathbf{n}))|^2, \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec  $\mathbf{H}$  la fonction de Green du milieu hétérogène prenant en compte tous les ordres de diffusion contenus dans  $\mathbf{K}$  ainsi que les chemins directs. Le terme de droite de l'équation (2.58) s'écrit alors :

$$-\text{Im}(\mathbf{H}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = -\text{Im}(\mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \mathbf{G}_0(\mathbf{0}, \mathbf{0})) = -\text{Im}(\mathbf{K}(\mathbf{0}, \mathbf{0})) - \frac{1}{4}. \quad (2.60)$$

La valeur relative de l'erreur entre les deux termes (2.59) et (2.60) obtenue numériquement moyennée sur 50 réalisations est présentée Fig. 2.9. Le nombre de capteurs utilisé est limité par le temps de calcul, mais la convergence vers une erreur nulle lorsque le nombre de capteurs tend vers l'infini semble assurée.

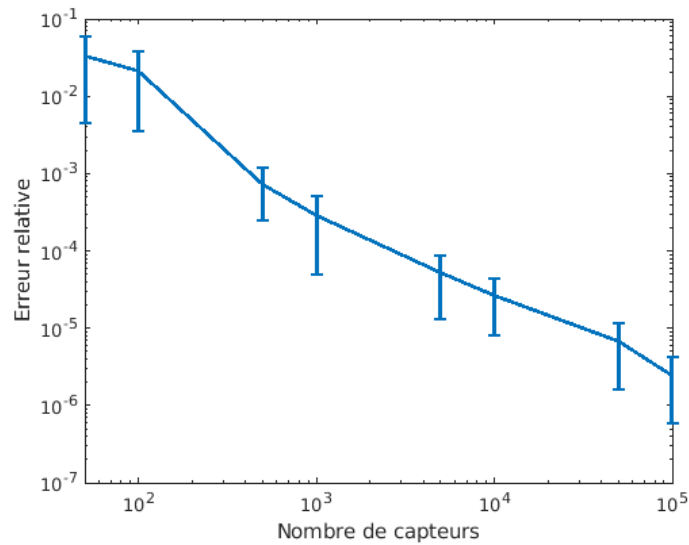


FIGURE 2.9 – Moyenne et écart-type sur 50 réalisations du milieu de l’erreur relative entre les deux termes (2.59) et (2.60) en fonction du nombre de capteurs entourant le milieu.

## 2.3 Propriétés des matrices de réflexion dans la base canonique

Aubry *et al.* [12] ont montré théoriquement que la matrice de diffusion simple  $\mathbf{K}^{(1)}$  présente une cohérence sur les anti-diagonales (cette propriété est appelée « effet mémoire » (ou *memory effect*), tandis que la matrice de diffusion multiple  $\mathbf{K}_m$  est une matrice aléatoire dont les éléments ne possèdent pas de corrélation de longue portée. La propriété de cohérence d’une matrice de diffusion simple est tout d’abord redémontrée avec les notations définies précédemment ; puis, les résidus de corrélation observés sur la matrice de diffusion multiple simulée Fig. 2.8(c) sont discutés.

### 2.3.1 Propriétés de la matrice de diffusion simple

La matrice de diffusion simple est constituée des contributions des ondes n’ayant rencontré qu’un unique diffuseur : elle peut être décomposée en un trajet aller (fonction de Green en espace libre de  $\mathbf{u}_i$  à  $\mathbf{r}_1$  notée  $\mathbf{G}_0(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1, \omega)$ ), un évènement de diffusion modélisé par  $\mathcal{T}_0(\omega)$ , puis un trajet retour de l’onde modélisé par la fonction de Green en espace libre de  $\mathbf{r}_1$  à  $\mathbf{u}_j$  notée  $\mathbf{G}_0(\mathbf{u}_j, \mathbf{r}_1, \omega)$ . Ainsi, elle peut s’écrire (cf. Eq. (2.51)) :

$$\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega) = \mathcal{T}_0(\omega) \sum_{s=1}^{N_s} \mathbf{G}_0(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_s, \omega) \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}_j, \omega). \quad (2.61)$$

En pratique, les matrices étudiées sont restreintes par une fenêtre centrée sur l’instant  $t$  et de largeur  $\Delta T$ . Le lieu des évènements de diffusion arrivant dans la fenêtre est nommé volume isochrone [13] et noté  $\Gamma$ . En régime de diffusion simple et dans le cadre de l’approximation

paraxiale, il correspond à une couche de milieu d'épaisseur  $\Delta z = c_0 \Delta T$  autour de la profondeur  $z = c_0 t/2$ .

À 2D, la fonction de Green en champ lointain peut être approchée par l'expression suivante :

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \omega) \approx \frac{-e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}} \exp(i k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|). \quad (2.62)$$

En injectant l'équation (2.62) dans (2.51)

$$\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega) \propto \sum_{(x_s, z_s) \in \Gamma} \mathcal{T}_0(\omega) \exp\left(i k_0 \sqrt{z_s^2 + (x_s - u_i)^2}\right) \exp\left(i k_0 \sqrt{z_s^2 + (x_s - u_j)^2}\right). \quad (2.63)$$

Sous l'hypothèse d'approximation paraxiale  $k_0(x_s - u_i)^4 / (8z^3) \ll \pi$ , la racine carrée du terme de phase peut se développer. Au premier ordre, les coefficients de la matrice de diffusion simple peuvent se réécrire :

$$\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega) \propto \mathcal{T}_0(\omega) \exp\left(i k_0 \frac{(u_i - u_j)^2}{4z}\right) \sum_{(x_s, z_s) \in \Gamma} \exp\left(i k_0 \frac{(z_s - z)^2}{z}\right) \exp\left(i k_0 \frac{(u_i + u_j - 2x_s)^2}{4z}\right). \quad (2.64)$$

Ainsi, les coefficients de la matrice de diffusion simple sont le produit d'un terme de phase déterministe identique pour les couples émetteur-récepteur tels que  $u_i - u_j$  est constant (soit sur les diagonales de la matrice) et d'un terme dépendant de la configuration des diffuseurs. Néanmoins, ce dernier dépend de  $u_i + u_j$  et est donc constant le long des anti-diagonales de  $\mathbf{K}^{(1)}$ . La matrice de diffusion simple présente donc une corrélation longue portée sur les anti-diagonales, connue sous le nom d'« effet mémoire ». Cet effet est quantifié par le coefficient de corrélation entre les valeurs d'une même anti-diagonale :

$$\begin{aligned} C_{norm}^{(n)}(\Delta u) &= \frac{\langle \mathbf{K}^{(n)}(u, u) \mathbf{K}^{(n)*}(u - \Delta u, u + \Delta u) \rangle_u}{\sqrt{\langle |\mathbf{K}^{(n)}(u, u)|^2 \rangle_u \langle |\mathbf{K}^{(n)}(u - \Delta u, u + \Delta u)|^2 \rangle_u}} \\ &= \frac{C^{(n)}(\Delta u)}{\sqrt{\langle |\mathbf{K}^{(n)}(u, u)|^2 \rangle_u \langle |\mathbf{K}^{(n)}(u - \Delta u, u + \Delta u)|^2 \rangle_u}}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Ainsi, d'après l'équation (2.64), il est attendu que  $C_{norm}^{(1)}$  soit égal à 1 quelque soit la valeur de  $\Delta u$ . La courbe de  $C_{norm}^{(1)}(\Delta u)$  est tracée Fig. 2.10 : la corrélation longue portée est bien visible, ce qui signifie que l'effet mémoire est bien présent. En ce qui concerne les matrices de diffusion multiple, selon l'hypothèse faite pour séparer la diffusion multiple de la diffusion simple (cf. Aubry *et al.* [14]), il n'y a pas d'effet mémoire attendu. Pourtant, la figure 2.10 montre qu'il existe une corrélation significative le long des anti-diagonales de  $\mathbf{K}^{(2)}$ ,  $\mathbf{K}^{(3)}$  et  $\mathbf{K}^{(4)}$ , qui diminue avec l'ordre de diffusion. La corrélation résiduelle visible sur les courbes de  $C_{norm}^{(2)}$  (qui présente un plateau de hauteur 0.7 environ) et celles des ordres de diffusion multiple supérieurs est discutée dans la section suivante.



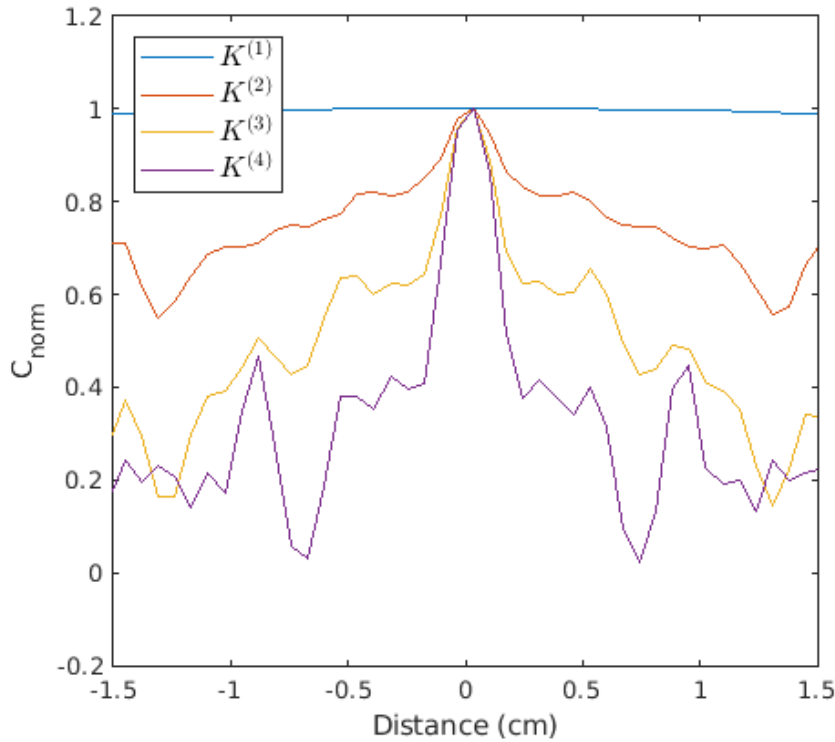


FIGURE 2.10 – Module de la corrélation moyenne le long des anti-diagonales des matrices de diffusion simple, double, triple et quadruple.

### 2.3.2 Propriétés de la diffusion multiple

Le calcul précédent qui montre la corrélation sur les anti-diagonales ne s'applique qu'à la matrice de diffusion simple; on peut penser que la matrice de diffusion multiple ne présente pas ces corrélations. Pourtant, l'observation des matrices (cf. Fig. 2.8(d) à (f)) met en évidence une telle corrélation d'autant plus faible que l'ordre de diffusion est élevé (cf. Fig. 2.10).

Afin de comprendre l'origine de la corrélation résiduelle le long des anti-diagonales de la matrice de diffusion multiple, calculons son expression analytique. Chaque élément de la matrice de diffusion multiple peut être décomposé en un trajet aller vers le premier diffuseur (fonction de Green en espace libre de  $\mathbf{u}_i$  à  $\mathbf{r}_1$ ), un premier évènement de diffusion, une propagation aléatoire entre le premier et le dernier diffuseur modélisé par la fonction de Green  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)$ , la diffusion par le dernier diffuseur et enfin le trajet retour de l'onde modélisé par la fonction de Green en espace libre de  $\mathbf{r}_2$  à  $\mathbf{u}_j$ . Les coefficients de la matrice de diffusion multiple peuvent donc s'écrire de la manière suivante :

$$K_m(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = k_0^2 \iint G_0(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mu(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (2.66)$$

Nous étudions la matrice de diffusion multiple fenêtrée temporellement; du point de vue

de la décomposition précédente, cela revient à restreindre la matrice de Green entre les diffuseurs aux trajets de temps de vol adéquats : en régime de diffusion multiple, les chemins de diffusion qui contribuent au signal dans la fenêtre temporelle  $T=[t-\Delta t;t+\Delta t]$  sont ceux dont le temps de vol entre le premier et le dernier diffuseur est compris dans l'intervalle  $T_0 = [t-t_0-\Delta t;t-t_0+\Delta t]$  avec  $t_0 = [t-|\mathbf{r}_1-\mathbf{u}_i|/c_0-|\mathbf{r}_2-\mathbf{u}_j|/c_0-\Delta t;t-|\mathbf{r}_1-\mathbf{u}_i|/c_0-|\mathbf{r}_2-\mathbf{u}_j|/c_0+\Delta t]$ . Le domaine d'intégration dépend donc du premier et du dernier diffuseur de la séquence.

Calculons la corrélation moyenne entre deux éléments de  $\mathbf{K}_m$  présents sur la même anti-diagonale caractérisée par  $\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_j = 2u$  :

$$C_m(\Delta u) = \langle \mathbf{K}_m(u, u) \mathbf{K}_m^*(u - \Delta u, u + \Delta u) \rangle, \quad (2.67)$$

avec  $\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i = 2\Delta u$ . Numériquement, la moyenne d'ensemble sera remplacée par une moyenne sur  $u$ . En injectant l'équation (2.66) dans (2.67), on obtient :

$$C_m(\Delta u) = k_0^4 \langle \int G_0(u, \mathbf{r}_1) G_0^*(u - \Delta u, \mathbf{r}'_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) G^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) G_0(\mathbf{r}_2, u) G_0^*(\mathbf{r}'_2, u + \Delta u) \mu(\mathbf{r}_1) \mu^*(\mathbf{r}'_1) \mu(\mathbf{r}_2) \mu^*(\mathbf{r}'_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \rangle. \quad (2.68)$$

Cette moyenne d'ensemble fait apparaître l'intensité moyenne de l'interférence entre deux ondes voyageant par deux chemins, l'un débutant en  $\mathbf{r}_1$  et se terminant en  $\mathbf{r}_2$ , le second débutant en  $\mathbf{r}'_1$  et se terminant en  $\mathbf{r}'_2$ . Comme expliqué à la section 2.1.2, les seuls chemins qui résistent à la moyenne sont les chemins identiques ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$  et  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_2$ ) et les chemins réciproques ( $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1$  et  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2$ ). De plus, en négligeant les boucles de diffusion,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est une grandeur indépendante de  $\mu(\mathbf{r}_1)$  et de  $\mu(\mathbf{r}_2)$ .

### Chemins identiques

La contribution des chemins identiques à la corrélation moyenne donnée par (2.68) est la suivante :

$$k_0^4 \langle |\mu|^2 \rangle^2 \int G_0(u, \mathbf{r}_1) G_0^*(u - \Delta u, \mathbf{r}_1) \langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle G_0(\mathbf{r}_2, u) G_0^*(\mathbf{r}_2, u + \Delta u) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (2.69)$$

Cette expression fait apparaître l'intensité moyenne  $\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle$ . Dans un milieu statistiquement homogène, cette grandeur ne dépend que de  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  ainsi que du temps.

En considérant la fonction de Green en espace libre à 3D ou à 2D en champ lointain (Eq. (2.6)), l'argument de l'intégrande de l'équation (2.69) s'écrit :

$$\phi_1 = k_0 (|u - \mathbf{r}_1| - |u - \Delta u - \mathbf{r}_1| + |u - \mathbf{r}_2| - |u + \Delta u - \mathbf{r}_2|). \quad (2.70)$$

Plaçons-nous en champ lointain et faisons un développement limité au premier ordre :

$$\phi_1 \approx k_0 \left( 2z_1 + 2z_2 + \Delta u \left( \frac{u - x_1}{z_1} - \frac{u - x_2}{z_2} \right) \right). \quad (2.71)$$

Notons  $z_1 = z_0 - dz$  et  $z_2 = z_0 + dz$ .  $z_0$  est alors la profondeur médiane entre le premier et dernier diffuseur. Le terme de phase devient à l'ordre 1 en  $dz$  :

$$\phi_1 \approx k_0 \left( 4z_0 + \frac{\Delta u}{z_0} \left( x_2 - x_1 + \frac{dz}{z_0} (2u - x_1 - x_2) \right) \right). \quad (2.72)$$

### Chemins réciproques

La prise en compte des chemins réciproques revient à échanger  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  dans les expressions, ou de manière équivalente  $\Delta u$  par  $-\Delta u$ . Le terme de phase relatif à la contribution des chemins réciproques s'écrit alors :

$$\phi_2 \approx k_0 \left( 4z_0 - \frac{\Delta u}{z_0} \left( x_2 - x_1 + \frac{dz}{z_0} (2u - x_1 - x_2) \right) \right). \quad (2.73)$$

### Somme des deux contributions

Ainsi, la somme des deux contributions s'écrit :

$$C_m(\Delta u) = k_0^4 \langle |\mu|^2 \rangle^2 \exp(4ik_0z_0) \int \langle |G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)|^2 \rangle \cos \left( \frac{k_0 \Delta u}{z_0} \left( (x_2 - x_1) + (2u - x_1 - x_2) \frac{dz}{z_0} \right) \right) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (2.74)$$

Les chemins de diffusion tels que l'argument du cosinus est petit devant  $\pi$  vont induire une corrélation longue portée du champ réfléchi le long des anti-diagonales de la matrice de réflexion. Une condition suffisante est que la distance transverse entre les premier et dernier diffuseurs  $|x_1 - x_2|$  soit inférieure à la taille transverse de la cellule de résolution  $\lambda z_0/A$ , avec  $A$  l'ouverture de la sonde, et que la distance axiale  $|z_1 - z_2|$  qui les sépare soit inférieure à la profondeur de champ  $\lambda z_0^2/A^2$ . Autrement dit, **il s'agit des chemins de diffusion dont les premier et dernier diffuseurs sont contenus dans la même cellule de résolution, chemins dits de diffusion récurrente**. Si l'intensité moyenne dans le milieu présente un support caractéristique d'extension transverse  $\Delta x < \lambda z_0/A$  et axiale  $\Delta z < \lambda z_0^2/A^2$ , ces chemins de diffusion récurrente prédominent et la matrice de réflexion présente une corrélation longue portée suivant ses anti-diagonales, analogue à celle obtenue en régime de diffusion simple. Cet effet a été observé dans des milieux très fortement diffusants [15].

Ainsi, il existe une corrélation entre les matrices de diffusion simple et multiple à cause de la diffusion récurrente. Celle-ci peut être exprimée par le produit scalaire suivant :

$$\Pi(\mathbf{K}^{(n)}) = \frac{|\langle \mathbf{K}^{(n)} | \mathbf{K}^{(1)} \rangle|}{\|\mathbf{K}^{(n)}\| \|\mathbf{K}^{(1)}\|}. \quad (2.75)$$

Les courbes de  $\Pi(\mathbf{K}^{(2)})$ ,  $\Pi(\mathbf{K}^{(3)})$  et  $\Pi(\mathbf{K}^{(4)})$  sont représentées Fig. 2.11 en fonction de la profondeur. Elles montrent que les matrices de diffusion multiple sont fortement corrélées à  $\mathbf{K}^{(1)}$ , d'autant plus que l'ordre de diffusion est faible. Cela s'explique par le poids de la diffusion récurrente parmi l'ensemble des chemins, qui diminue lorsque l'ordre de diffusion augmente. On comprend également pourquoi la corrélation entre les matrices de diffusion simple et multiple augmente avec la profondeur équivalente : la taille de la cellule de résolution augmente avec la profondeur, aussi de plus en plus d'évènements de diffusion sont issus de la même cellule de résolution.

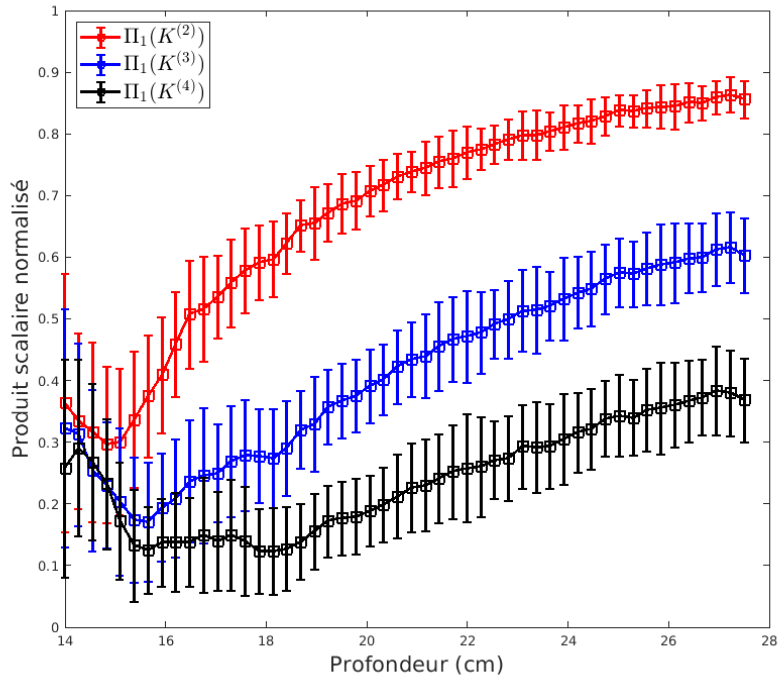


FIGURE 2.11 – Produit scalaire normalisé entre la matrice de diffusion simple et les premiers ordres de diffusion multiple (2.75).

### 2.3.3 Matrices apparentes

La série de Born donne une classification des matrices par ordre de diffusion. Physiquement, cette classification est écrite comme si chaque diffuseur était résolu par la sonde. Or, deux diffuseurs très proches ne peuvent pas être distingués par un système d'ouverture finie s'ils se trouvent dans la même cellule de résolution, de dimensions typiques  $\lambda z/A$  et  $\lambda z^2/A^2$ . La diffusion de ces objets, qui est de la diffusion multiple au sens de Born, est alors perçue, du point de vue de la sonde, comme de la diffusion simple par un « super diffuseur » constitué des diffuseurs élémentaires situés dans une même cellule de résolution. Cette remarque nous amène à construire des matrices de diffusion « apparentes », c'est-à-dire telles que vues par la sonde.

La diffusion récurrente est une sous-partie de la diffusion multiple dont les propriétés sont assimilables à de la diffusion simple. La matrice de diffusion récurrente, notée  $\mathbf{K}_r$ , est la somme des matrices de diffusion récurrente issues de chaque ordre de diffusion  $\mathbf{K}_r^{(n)}$ . Elle peut être ajoutée à la matrice de diffusion simple  $\mathbf{K}^{(1)}$  pour former la matrice de diffusion confocale (ou apparente)  $\mathbf{K}_c$ . La matrice de diffusion multiple apparente est donc  $\mathbf{K}_{m\setminus r} = \mathbf{K}_m - \mathbf{K}_r$  et est la somme des matrices  $\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}$  pour chaque ordre de diffusion. Numériquement, les chemins de diffusion sont triés en fonction de la distance entre le premier et le dernier diffuseur (cf. Fig. 2.12). Il est connu que la tache focale obtenue avec une ouverture  $A$  possède une

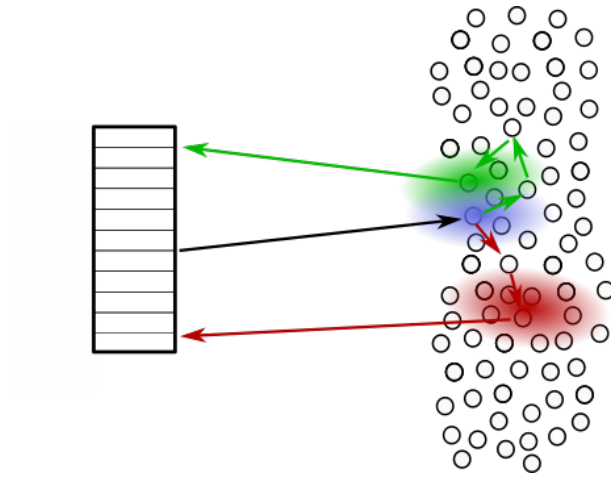


FIGURE 2.12 – Taches focales correspondant aux premiers et derniers diffuseurs d'un chemin de diffusion récurrente (bleu et vert) et multiple apparent (bleu et rouge).

taille finie, calculée à partir de la théorie de la diffraction [16]. En champ lointain, on a :

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{\lambda z}{A} \text{ dans la direction latérale,} \\ \delta_z &= \frac{7\lambda z^2}{A^2} \text{ dans la direction axiale.} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Les taches focales sont représentées dans la simulation comme des ellipses orientées vers le centre de la barrette. Pour des raisons de réciprocité, un chemin est considéré comme récurrent si le premier diffuseur se situe dans la tache focale du dernier ou inversement. Cette définition diffère légèrement du calcul théorique (Eq. (2.74)) qui fait apparaître le point milieu entre les deux diffuseurs.

Les matrices  $\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  ainsi que les trois premiers ordres de diffusion multiple apparente sont présentées Fig. 2.13.  $\mathbf{K}_r$  et  $\mathbf{K}_c$  présentent la cohérence sur les anti-diagonales attendue. La matrice  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  n'en présente pas et ressemble à une matrice aléatoire comme stipulé dans la littérature [14]. L'absence de corrélation longue portée des trois premiers ordres de  $\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}$  est bien vérifiée Fig. 2.14.

Intéressons-nous à présent à la corrélation entre les matrices  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}$ , estimée par la grandeur suivante :

$$\Pi_c(\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}) = \frac{|\langle \mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)} | \mathbf{K}_c \rangle|}{\|\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}\| \|\mathbf{K}_c\|}. \quad (2.77)$$

Les courbes sont tracées Fig. 2.15 et mettent en évidence le faible niveau de corrélation (de l'ordre de 10% maximum) entre les matrices de diffusion confocale et multiple apparente. Les matrices  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{K}_{m\setminus r}^{(n)}$  sont donc quasiment orthogonales. Cette courbe de corrélation est fortement dépendante du choix de la taille de la cellule de résolution (-6 dB, premier zéro...) et du critère de discrimination des chemins récurrents.

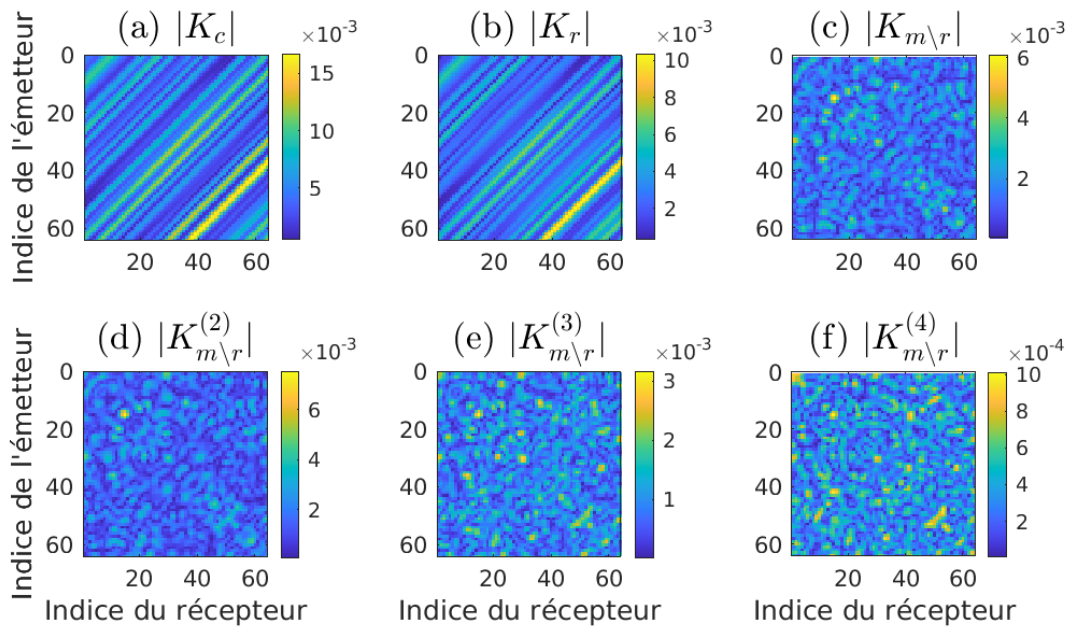


FIGURE 2.13 – Modules des éléments des différentes matrices calculées numériquement : (a) diffusion confocale, (b) diffusion récurrente, (c) diffusion multiple apparente, (d) diffusion double apparente, (e) diffusion triple apparente, (f) diffusion quadruple apparente. Les matrices sont fenêtrées temporellement autour de la profondeur 24.2 cm et montrées à la fréquence centrale.

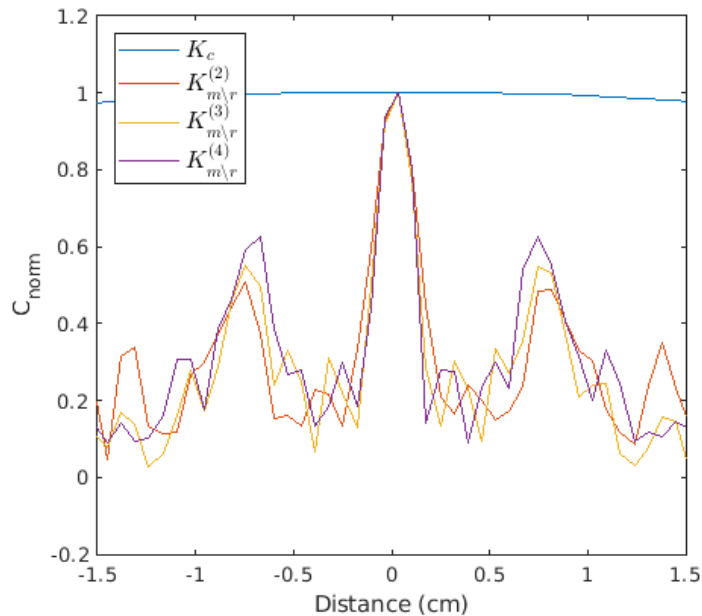


FIGURE 2.14 – Module de la corrélation moyenne le long des anti-diagonales des matrices de diffusion confocale, double apparente, triple apparente et quadruple apparente.

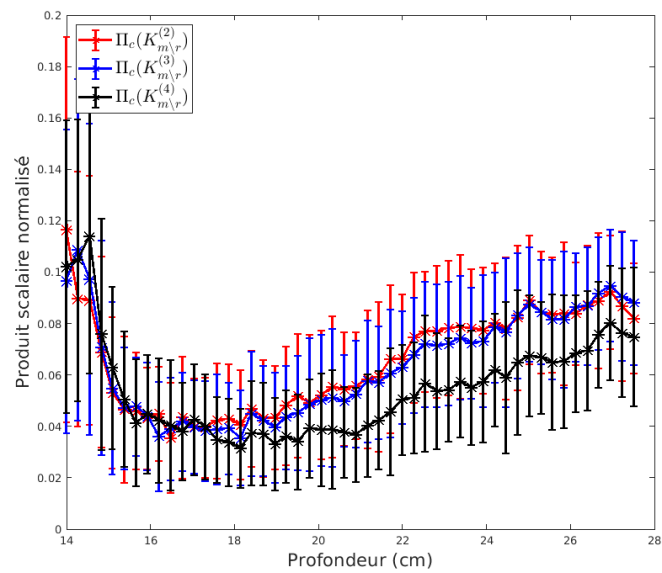


FIGURE 2.15 – Produit scalaire normalisé entre la matrice de diffusion confocale et les premiers ordres de diffusion multiple apparente (Eq. (2.77)).

### 2.3.4 Influence de la diffusion récurrente sur le pic de rétrodiffusion cohérente

Comme expliqué dans la section 2.1.2, le pic de rétrodiffusion cohérente est un indicateur du niveau de diffusion multiple. Les figures 2.16(b) et 2.17(b) montrent que l'intensité moyenne de la matrice de diffusion totale est la somme de deux contributions : un plateau (diffuson) qui ne dépend pas de la distance émetteur-récepteur et un pic fin autour de la position correspondant à la superposition entre émetteur et récepteur (cooperon) dont l'amplitude est de l'ordre de 10% de celle du diffuson. La séparation de la matrice de réflexion en ordres de diffusion nous permet d'étudier l'origine de ces deux termes. Il est admis dans la littérature [5] que la diffusion simple seule donne la contribution du diffuson, tandis que la diffusion multiple seule donne un diffuson et un cooperon de même amplitude (donc un rapport 2 entre l'énergie du pic et du plateau).

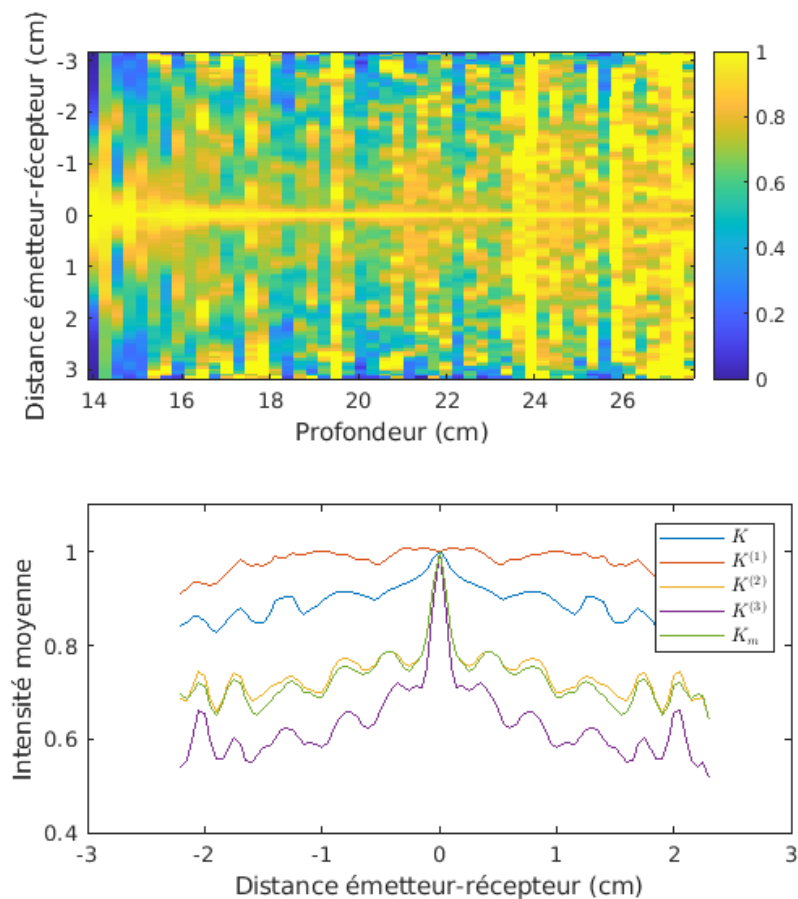


FIGURE 2.16 – (a) Intensité moyenne en fonction de la profondeur pour la matrice de diffusion multiple, (b) intensité moyenne des matrices de diffusion totale, simple, double, triple et multiple. La moyenne est réalisée sur les couples émetteurs-récepteurs et sur les profondeurs entre 19 et 22 cm.



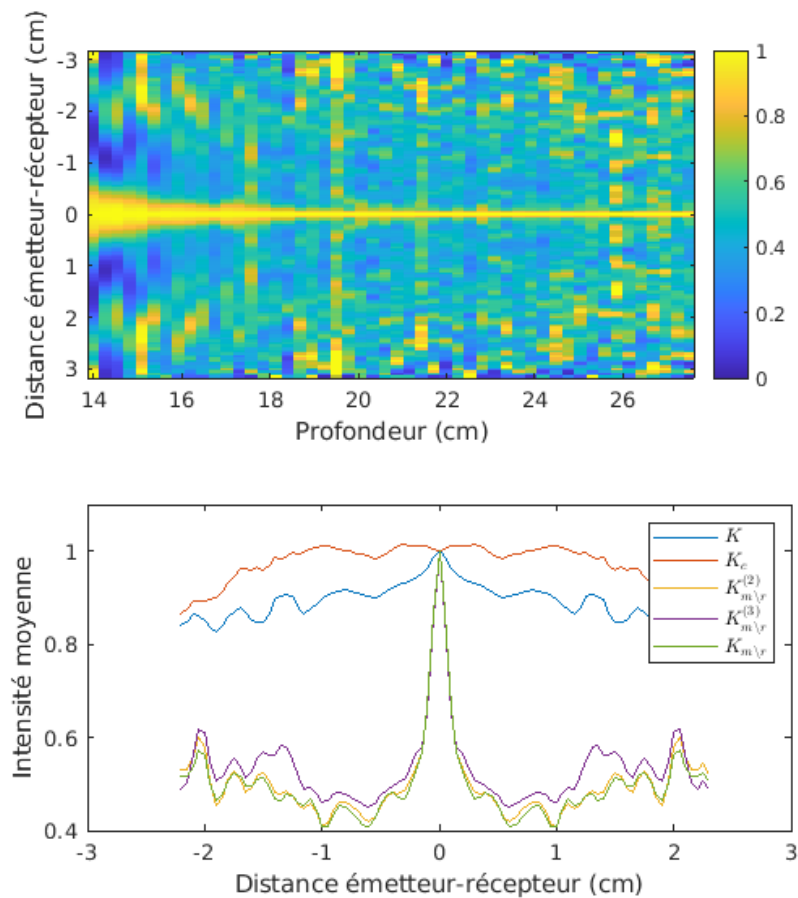


FIGURE 2.17 – (a) Intensité moyenne en fonction de la profondeur pour la matrice de diffusion multiple apparente, (b) intensité moyenne des matrices de diffusion totale, confocale, double apparente, triple apparente et multiple apparente. La moyenne est réalisée sur les couples émetteurs-récepteurs et sur les profondeurs entre 19 et 22 cm.

Comme vérifié sur la figure 2.16, la diffusion simple donne bien un plateau caractéristique du diffuson. En revanche, la diffusion multiple, qui est dominée par la diffusion double, ne fait pas apparaître une contribution équivalente du cooperon et du diffuson. En effet, la courbe présente un pic de rapport 1.4 et non 2. De plus, la figure 2.16(a) met en évidence le fait que ce rapport semble diminuer avec la profondeur. **La comparaison avec les intensités moyennes des matrices apparentes indique que c'est la diffusion récurrente qui réduit le rapport d'amplitude entre le pic de rétrodiffusion cohérente et le plateau.** En effet, sur la figure 2.17 qui présente l'intensité moyenne des matrices apparentes, le rapport 2 est bien observé pour toutes les matrices de diffusion multiple apparente, tandis que la matrice de diffusion confocale donne une courbe quasiment constante.

Ainsi, même en milieu faiblement diffusant, l'impact de la diffusion récurrente sur les propriétés de matrices de réflexion est significatif. La notion de diffuseur doit être repensée puisque le diffuseur unique ne semble pas être l'unité fondamentale appropriée, contrairement aux « super-diffuseurs », agrégats de diffuseurs uniques présents dans la même cellule

de résolution. Dans la prochaine section, cette conclusion sera également formulée pour un espace de matrices projetées en base focalisée.

## 2.4 Propriétés des matrices de réflexion dans la base focalisée

De manière classique, l'acquisition de la matrice de réflexion s'effectue dans la base canonique, ou « base des transducteurs », utilisée dans la section précédente. Depuis quelques années, d'autres types de bases comme les ondes planes ou focalisées (cf. Fig. 1.12) ont été utilisées. Lors de la construction d'une image par la méthode TFM, le procédé d'imagerie consiste en la sommation en phase des  $N \times N$  signaux de la matrice des réponses inter-éléments, c'est-à-dire la focalisation des signaux en chaque pixel de l'image. Cette approche peut être étendue à la construction d'une matrice tridimensionnelle focalisée, comme introduite par Velichko qui l'a appelée *image généralisée* [17], puis développée en optique par Badon *et al.* [18] et en acoustique par Lambert *et al.* [19]. Cette section rappelle les applications des matrices dans la base focalisée présentées dans la littérature et utilise la simulation numérique pour mettre en avant les propriétés des matrices de réflexion dans cette base.

### 2.4.1 Nouvelles méthodes d'analyse de la matrice de réflexion en milieu complexe

À chaque profondeur  $z$  choisie, l'onde ultrasonore est focalisée indépendamment à un point  $\mathbf{r}_{\text{in}} = (x_{\text{in}}, z)$  en émission et  $\mathbf{r}_{\text{out}} = (x_{\text{out}}, z)$  en réception (cf. Fig. 2.18). Il s'agit d'une généralisation de l'imagerie confocale, pour laquelle la contrainte  $\mathbf{r}_{\text{in}} = \mathbf{r}_{\text{out}}$  est imposée. La matrice exprimée dans la base focalisée dispose d'un degré de liberté supplémentaire, utile pour étudier des propriétés souvent masquées par le caractère confocal des images, comme la diffusion multiple.

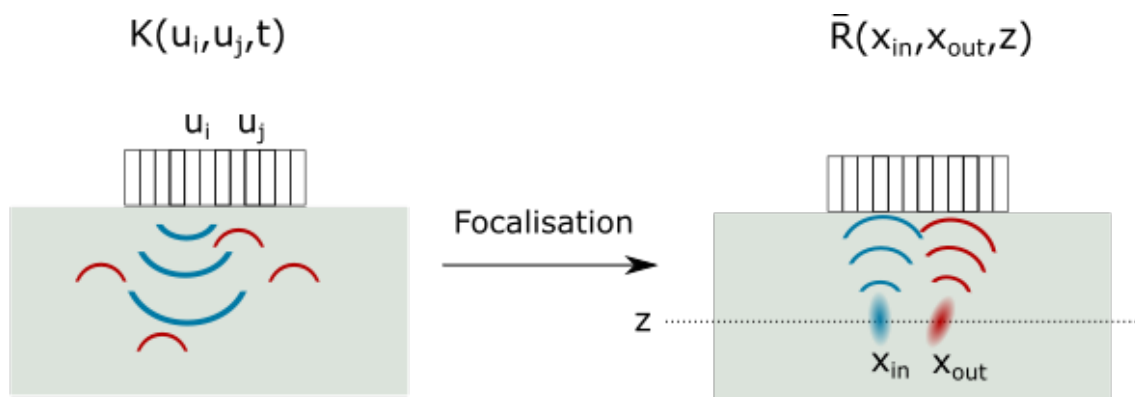


FIGURE 2.18 – Illustration du passage de la base canonique à la base focalisée.

Le passage de la base canonique à la base focalisée peut être réalisé dans le domaine fréquentiel, en multipliant la matrice de réflexion à droite et à gauche par la matrice de passage de la base canonique à la base focalisée (fonction de Green en espace libre) :

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}_{\text{in}}, \mathbf{r}_{\text{out}}, \omega) = \sum_{\mathbf{u}_i} \sum_{\mathbf{u}_j} \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{\text{in}}, \mathbf{u}_i, \omega)^\top \mathbf{K}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega) \mathbf{G}_0(\mathbf{r}_{\text{out}}, \mathbf{u}_j, \omega)^\top. \quad (2.78)$$

Il peut être opportun de n'utiliser que les transducteurs qui « voient » le défaut avec un angle physiquement acceptable par rapport à leur directivité pour réaliser la focalisation. Cela revient à fixer une ouverture (*f-number*) constante. Une résolution axiale optimale s'obtient en sommant la matrice  $\mathbf{R}$  sur les fréquences de la bande passante de la sonde :

$$\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_{\text{in}}, \mathbf{r}_{\text{out}}) = \sum_{\omega} \mathbf{R}(\mathbf{r}_{\text{in}}, \mathbf{r}_{\text{out}}, \omega). \quad (2.79)$$

Si l'acquisition a été réalisée en ondes planes et non en base canonique, la matrice nécessaire au changement de base s'écrit :

$$G_{0,k}(\mathbf{k}_{\text{in}}, \mathbf{r}_{\text{in}}, \omega) = \exp(i\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{r}_{\text{in}}). \quad (2.80)$$

### 2.4.2 Propriétés de la matrice de réflexion dans la base focalisée

La diagonale de la matrice de réflexion en base focalisée  $\bar{\mathbf{R}}$ , telle que  $\mathbf{r}_{\text{in}} = \mathbf{r}_{\text{out}}$ , est la matrice confocale étudiée habituellement en échographie. Elle représente l'amplitude obtenue lorsque l'onde est focalisée au même point du milieu en émission et en réception. L'originalité de la méthode est d'étudier également les termes non-diagonaux de cette matrice, correspondant à des configurations pour lesquelles le point de focalisation en émission  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  est séparé du point de focalisation  $\mathbf{r}_{\text{out}}$  d'un vecteur  $d\mathbf{r}$ .

Théoriquement, les éléments de la matrice de diffusion simple diffèrent de zéro seulement si  $\mathbf{r}_{\text{out}}$  se trouve dans la tache focale créée en  $\mathbf{r}_{\text{in}}$ . Il est ainsi possible de sonder la largeur de la tache focale en observant la largeur de la diagonale de la matrice  $\bar{\mathbf{R}}$ , comme décrit par Lambert *et al.* [19] (cf. Fig. 2.19).

Dans le cas d'un milieu réel, la focalisation peut être dégradée pour plusieurs raisons :

- ▶ La vitesse des ondes ultrasonores dans le milieu n'est pas connue de manière précise [20, 21]. Ainsi, les fronts d'ondes ne se sont pas propagés expérimentalement à la vitesse à laquelle l'algorithme calcule la focalisation.
- ▶ Le milieu n'est pas homogène mais constitué de couches de matériaux de vitesses ultrasonores différentes. Cela est courant *in vivo* puisque les muscles, la graisse ou les organes n'ont pas les mêmes propriétés élastiques. De manière plus flagrante, cela peut être le cas d'une couche d'eau sur une billette de titane, qui ne serait pas prise en compte dans le modèle de reconstruction.
- ▶ La diffusion multiple est également source d'aberrations [22, 23].
- ▶ Le réseau de transducteurs est posé sur une surface irrégulière.

Lorsque ces dégradations se produisent, les dimensions de la tache focale sont supérieures à celles prévues par l'équation (2.76). La largeur de la diagonale de la matrice de réflexion en

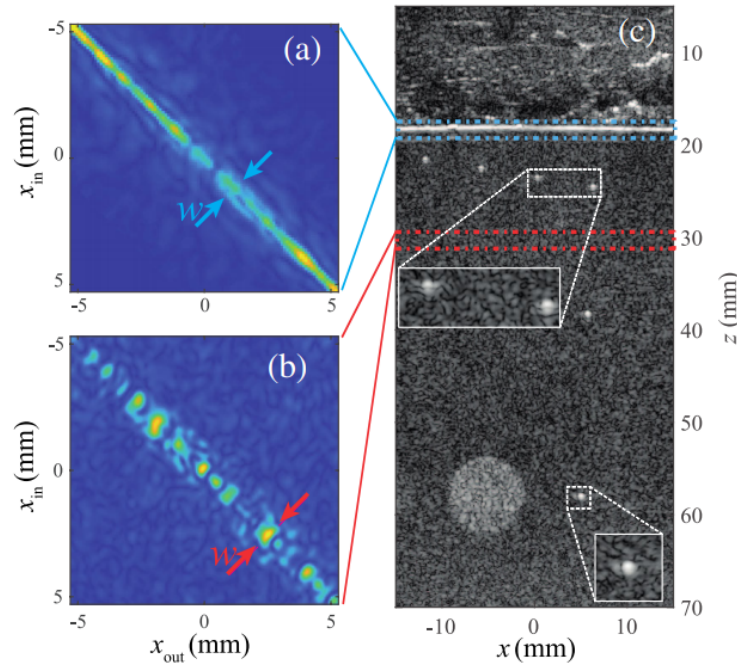


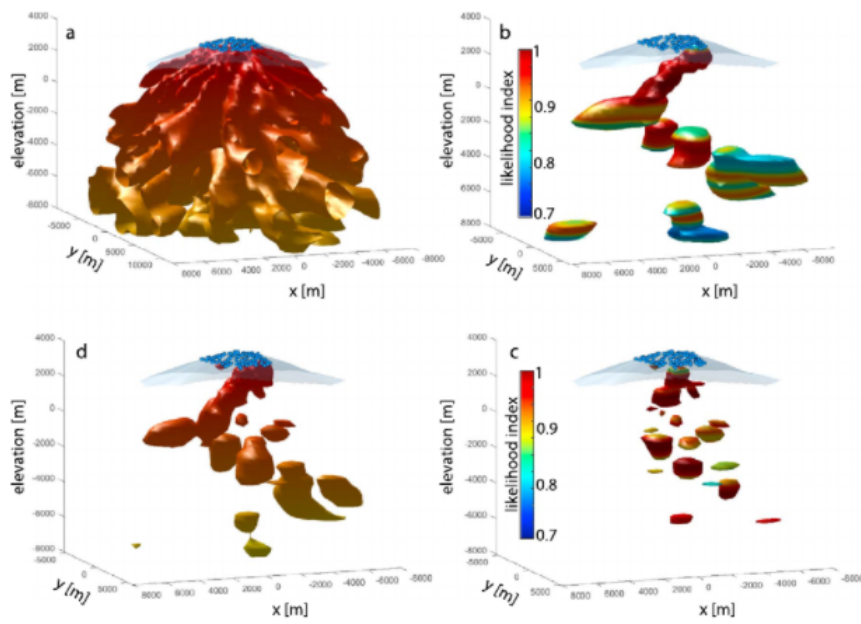
FIGURE 2.19 – Influence de la qualité de la focalisation sur la largeur de la diagonale de la matrice en base focalisée, issu de [19].

base focalisée est alors supérieure à la largeur attendue. Ainsi, l'élargissement de la diagonale apporte une indication locale sur les aberrations du milieu [19].

La matrice focalisée a été utilisée dans plusieurs domaines de la physique des ondes pour améliorer l'imagerie en milieu complexe. Badon *et al.* [18] ont utilisé la propriété de la diffusion simple d'être proche de la diagonale de la matrice  $\mathbf{R}$  pour appliquer un filtre confocal gaussien à cette matrice consistant à sous-pondérer (par une apodisation) les éléments de matrice éloignés de la diagonale. Ce faisant, ils sont parvenus éliminer partiellement la composante de diffusion multiple, améliorant ainsi la qualité des images. Blondel *et al.* [24] ont appliqué cette méthode à l'imagerie sismique du volcan Erebus en Antarctique. Là encore, le filtrage confocal a permis de réduire le poids de la diffusion multiple et de faire apparaître des détails de la structure interne du volcan, comme montré sur la figure 2.20. Nous appliquerons une méthode similaire dans le contexte de cette thèse; le caractère gaussien du filtre confocal nécessaire à extraire la diffusion simple sera discuté dans le chapitre 3 et une base de l'espace de diffusion simple sera proposée.

### 2.4.3 Simulation numérique de la matrice de réflexion dans la base focalisée

L'état de l'art relatif aux matrices de réflexion dans la base focalisée présenté dans la section précédente met en avant la possibilité de séparation des contributions de diffusion simple et de diffusion multiple. La validité de ces approches va être testée grâce à la simulation numé-



**Figure 6.** Isosurface plots of the three-dimensional images of the volcano built from (a) confocal focusing, (b, c) the first and second singular vectors of  $\mathbf{R}_F$ ,  $\lambda_1^2 |U_1(\mathbf{r})|^2$  and  $\lambda_2^2 |U_2(\mathbf{r})|^2$ , respectively, and (d) the coherent combination of both (equation (10)). For all these isosurface plots, the images are multiplied in depth by a factor  $z^2$  to compensate for the geometrical decrease of singly scattered body waves. The isosurface is fixed to be 4% of the maximum of each image. The color scale in panels (b) and (c) accounts for the likelihood index associated with the singular vector at each depth (see section 4.4).

FIGURE 2.20 – Application du filtrage de la diffusion multiple pour l’imagerie du volcan Erebus, issu de [24].

rique présentée précédemment : pour ce faire, les matrices de réflexion sont calculées dans la base focalisée grâce aux équations (2.78) et (2.79). Les matrices issues de la série de Born tout comme les matrices de diffusion récurrente et les matrices apparentes peuvent être calculées dans la base focalisée grâce à la simulation numérique. Les indices utilisés pour décrire les matrices seront identiques dans les deux bases, le nom des matrices est seulement remplacé par  $\bar{\mathbf{R}}$  dans la base focalisée. Dans cette base, il n’est pas nécessaire d’appliquer de fenêtrage temporel aux matrices : le fait de focaliser revient à sélectionner une profondeur d’intérêt. Le paramètre équivalent à la longueur de la fenêtre temporelle dans la base canonique est l’inverse de la bande passante sur laquelle la somme sur les fréquences est réalisée (cf. Eq. (2.79)).

Les matrices en base focalisée calculées à la fréquence centrale de la sonde sont représentées Fig. 2.21. Comme attendu, la matrice de diffusion simple, sous-figure (b), voit ses coefficients importants essentiellement regroupés autour de la diagonale. C’est également le cas des matrices de diffusion multiple ; on retrouve ici l’observation déjà faite dans la base canonique, à savoir la forte corrélation entre  $\bar{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$  et  $\bar{\mathbf{R}}^{(1)}$  due à la diffusion récurrente. Comme dans la base canonique, la matrice de diffusion récurrente est similaire à la matrice de diffusion simple. A contrario, la matrice de diffusion multiple apparente voit ses éléments prendre des valeurs significatives partout, y compris en dehors de la diagonale (Fig. 2.21(d)). L’emploi de la base focalisée nous permet de justifier le terme « confocal » utilisé pour décrire la matrice de diffusion simple apparente : il s’agit des matrices dont les coefficients les plus importants se trouvent proches de la diagonale principale, c’est-à-dire correspondant aux cas où  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  est

très proche de  $\mathbf{r}_{\text{out}}$ .

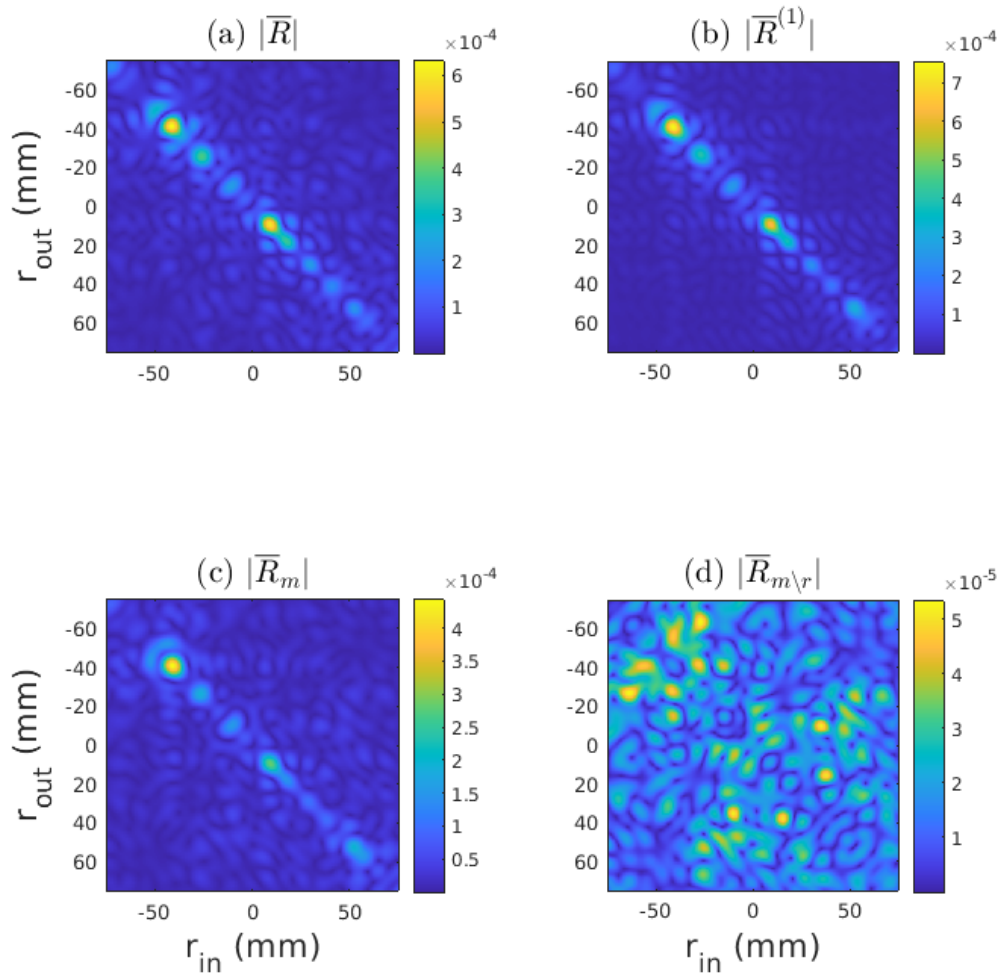


FIGURE 2.21 – Valeur absolue des matrices de diffusion (a) totale, (b) simple, (c) multiple et (d) multiple apparente en base focalisée à une profondeur de 24.2 cm.

#### 2.4.4 Influence de la diffusion récurrente sur l'imagerie

La base focalisée est une base naturelle pour réaliser l'imagerie confocale du milieu. En effet, l'image confocale est donnée par la diagonale de la matrice de réflexion  $\bar{\mathbf{R}}$ . Grâce à la simulation numérique, elle peut être comparée aux images de diffusion simple issue de  $\bar{\mathbf{R}}^{(1)}$  de diffusion multiple issue de  $\bar{\mathbf{R}}_m$ , ou encore de diffusion multiple apparente  $\bar{\mathbf{R}}_{m \setminus r}$ .

Avec ces paramètres de simulation définis précédemment, la diffusion simple est prépondérante et les images de diffusion simple et totale ne sont pas différentes à l'œil. La réponse fréquentielle du diffuseur est augmentée dans les images présentées Fig. 2.22 en prenant pour rayon des diffuseurs  $a = 0.15$  mm.

Les matrices de diffusion simple et totale (Fig. 2.22(a) et (c)) se ressemblent beaucoup, d'autant plus que l'imagerie confocale rehausse le poids de la diffusion simple. Néanmoins, la zone située autour de  $x = 0$  cm et  $z = 22$  cm illustre l'effet de l'interférence entre les ordres de diffusion : cette zone est de forte intensité sur  $\bar{\mathbf{R}}^{(1)}$  et sur  $\bar{\mathbf{R}}^{(2)}$  mais pas sur  $\bar{\mathbf{R}}$ . Ces interférences semblent très peu présentes pour les matrices apparentes, puisqu'il n'existe pas de zone où se trouvent des diffuseurs dans l'image issue de  $\bar{\mathbf{R}}_c$  qui soit moins visible sur  $\bar{\mathbf{R}}$ .

Les matrices  $\bar{\mathbf{R}}^{(2)}$  et  $\bar{\mathbf{R}}^{(3)}$  contiennent beaucoup de diffusion récurrente,  $\bar{\mathbf{R}}_r$  étant du même ordre de grandeur que ces deux matrices. Comme attendu,  $\bar{\mathbf{R}}_r$  est de plus forte amplitude dans des régions où les diffuseurs sont proches et son amplitude augmente avec la profondeur car la taille de la cellule de résolution augmente.

Au contraire des matrices  $\bar{\mathbf{R}}^{(2)}$  et  $\bar{\mathbf{R}}^{(3)}$ , les matrices  $\bar{\mathbf{R}}_{m \setminus r}^{(2)}$  et  $\bar{\mathbf{R}}_{m \setminus r}^{(3)}$  présentent une énergie diffuse et ne rendent plus compte de la position des diffuseurs. Cela correspond à la vision classique de la diffusion multiple qui empêche de réaliser l'imagerie du milieu. Plus l'ordre de diffusion augmente, plus l'énergie est localisée à des grandes profondeurs car les temps de vol associés à des ordres élevés de diffusion sont en moyenne plus longs.

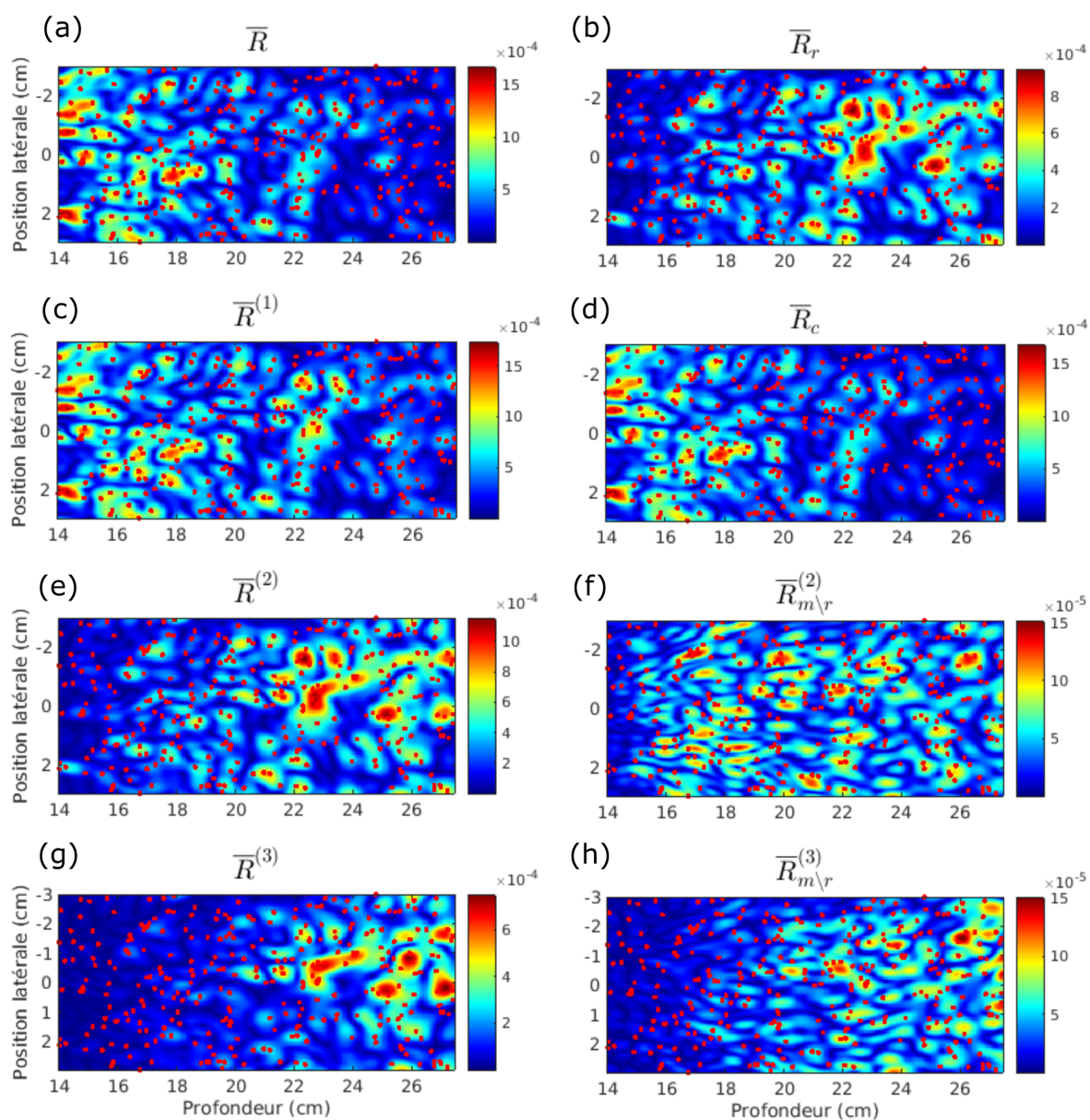


FIGURE 2.22 – Images confocales obtenues à partir des matrices dans la base focalisée : (a) diffusion totale, (b) diffusion récurrente, (c) diffusion simple, (d) diffusion confocale, (e) diffusion double, (f) diffusion double apparente, (g) diffusion triple, (h) diffusion triple apparente.



## 2.5 Conclusion

Ce chapitre présente une simulation numérique pour le calcul de la matrice de réflexion d'un milieu composé de diffuseurs ponctuels et isotropes. Cette simulation ne peut pas décrire fidèlement les milieux d'intérêt tels que les alliages de titane : aucune microstructure complexe n'est envisagée et la simulation ne prend en compte que les ondes longitudinales (diffuseurs et milieu fluides). Elle ne remplace donc pas les méthodes par éléments finis ou de Monte-Carlo présentées au chapitre 1 ; néanmoins, elle présente l'intérêt d'être simple, rapide et de représenter avec exactitude la diffusion par un ensemble de diffuseurs ponctuels et isotropes. L'originalité de l'étude réside dans la séparation des matrices de réflexion pour chaque ordre de diffusion, ce qui n'est pas possible expérimentalement ni avec les méthodes numériques telles que les simulations par éléments finis.

Les propriétés des matrices de réflexion sont tout d'abord étudiées dans la base canonique. La diffusion simple possède une propriété de cohérence longue portée suivant les anti-diagonales utilisée jusqu'à présent pour discriminer la diffusion simple de la diffusion multiple. Néanmoins, la simulation met très clairement en évidence une cohérence le long des anti-diagonales des matrices de diffusion multiple. Ceci remet en cause l'association directe entre corrélation longue portée et diffusion simple. Cette observation apportée par la simulation est appuyée par un calcul théorique prouvant que les chemins de diffusion récurrente, c'est-à-dire ceux pour lesquels le premier et le dernier diffuseurs de la séquence sont situés dans la même cellule de résolution, conservent la corrélation longue portée. Il est alors proposé de regrouper les chemins de diffusion simple et récurrente dans le terme de diffusion simple « apparente » ou confocale. La matrice de diffusion multiple résiduelle (diffusion multiple apparente) possède alors les propriétés d'une matrice réellement aléatoire sans corrélations de longue portée.

Les matrices de réflexion sont ensuite étudiées dans la base focalisée, base d'étude plus récente pour laquelle plusieurs études ont déjà montré son intérêt pour l'étude de la diffusion multiple. La simulation numérique permet également de séparer les ordres de diffusion dans cette base et de construire les matrices apparentes. La diffusion simple apparente se visualise comme une matrice dont l'énergie est proche de la diagonale principale, tandis que la diffusion multiple apparente possède une énergie répartie dans toute la matrice. La base focalisée permet également de réaliser l'image confocale du milieu pour chaque ordre de diffusion. Cela met en avant les artefacts causés par la diffusion multiple dans les images échographiques, le lien direct entre temps de vol et profondeur du diffuseur n'étant plus respecté.

Cette partie de la thèse met en évidence une question fondamentale concernant la propagation des ondes en milieu complexe : que considère-t-on comme un diffuseur élémentaire ? Il est connu que deux diffuseurs très proches ne sont pas séparables expérimentalement et forment donc un « super diffuseur ». Ainsi, une autre définition de la diffusion simple est proposée en intégrant non seulement les chemins qui ne rencontrent qu'un unique diffuseur mais également ceux issus de la diffusion récurrente. Le chapitre suivant vise à utiliser les propriétés des matrices de réflexion pour définir des *estimateurs de la proportion de dif-*

*fusion simple* dans la réponse d'un milieu. De tels indicateurs permettraient d'évaluer la fiabilité d'une image échographique et d'aider à discerner un défaut d'un artefact au sein d'une image.

## Bibliographie

- [1] G. Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham Eng. : London : sold by Hamilton, Adams : Printed for the author, by T. Wheelhouse, 1828. [36](#)
- [2] I. Baydoun, D. Baresch, R. Pierrat, and A. Derode, “Scattering mean free path in continuous complex media : Beyond the Helmholtz equation,” *Physical Review E*, vol. 92, p. 033201, Sept. 2015. [37](#)
- [3] R. L. Weaver, “Diffusivity of ultrasound in polycrystals,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38, pp. 55–86, Jan. 1990. [39](#)
- [4] S. M. Rytov, Y. A. Kravtsov, V. I. Tatarskii, and A. P. Repeyev, *Principles of Statistical Radiophysics : Wave Propagation Through Random Media*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1989. [39](#), [41](#)
- [5] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007. [41](#), [63](#)
- [6] A. Ishimaru, Y. Kuga, R. L.-T. Cheung, and K. Shimizu, “Scattering and diffusion of a beam wave in randomly distributed scatterers,” *JOSA*, vol. 73, pp. 131–136, Feb. 1983. [41](#)
- [7] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A. van Tiggelen, and M. Fink, “Time-Dependent Coherent Backscattering of Acoustic Waves,” *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 3637–3639, Nov. 1997. [41](#)
- [8] J. Groenenboom and R. Snieder, “Attenuation, dispersion, and anisotropy by multiple scattering of transmitted waves through distributions of scatterers,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 98, pp. 3482–3492, Dec. 1995. [48](#)
- [9] A. Rohfritsch, J.-M. Conoir, R. Marchiano, and T. Valier-Brasier, “Numerical simulation of two-dimensional multiple scattering of sound by a large number of circular cylinders,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 145, pp. 3320–3329, June 2019. [48](#)
- [10] R. E. Kleinman, G. F. Roach, and P. M. van den Berg, “Convergent Born series for large refractive indices,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 7, p. 890, May 1990. [50](#)
- [11] V. H. Weston, “On the convergence of the Rytov approximation for the reduced wave equation,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 26, pp. 1979–1985, Aug. 1985. [50](#)
- [12] A. Aubry, *Approche Matricielle de l’opérateur de Propagation Des Ondes Ultrasonores En Milieu Diffusant Aléatoire*. PhD thesis, Université Paris VI, Sept. 2008. [54](#)
- [13] R. Mallart and M. Fink, “Adaptive focusing in scattering media through sound-speed inhomogeneities : The van Cittert Zernike approach and focusing criterion,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 96, pp. 3721–3732, Dec. 1994. [54](#)

- 
- [14] A. Aubry and A. Derode, "Random Matrix Theory Applied to Acoustic Backscattering and Imaging In Complex Media," *Physical Review Letters*, vol. 102, p. 084301, Feb. 2009. [55](#), [60](#)
- [15] A. Aubry, L. A. Cobus, S. E. Skipetrov, B. A. van Tiggelen, A. Derode, and J. H. Page, "Recurrent Scattering and Memory Effect at the Anderson Localization Transition," *Physical Review Letters*, vol. 112, p. 043903, Jan. 2014. [58](#)
- [16] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Elsevier, 1980. [60](#)
- [17] A. Velichko and P. D. Wilcox, "Reversible back-propagation imaging algorithm for post-processing of ultrasonic array data," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 56, pp. 2492–2503, Nov. 2009. [65](#)
- [18] A. Badon, D. Li, G. Lerosey, A. C. Boccara, M. Fink, and A. Aubry, "Smart optical coherence tomography for ultra-deep imaging through highly scattering media," *Science Advances*, vol. 2, p. e1600370, Nov. 2016. [65](#), [67](#)
- [19] W. Lambert, L. A. Cobus, M. Couade, M. Fink, and A. Aubry, "Reflection Matrix Approach for Quantitative Imaging of Scattering Media," *Physical Review X*, vol. 10, p. 021048, June 2020. [65](#), [66](#), [67](#)
- [20] M. Jakovljevic, S. Hsieh, R. Ali, G. Chau Loo Kung, D. Hyun, and J. J. Dahl, "Local speed of sound estimation in tissue using pulse-echo ultrasound : Model-based approach," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 144, pp. 254–266, July 2018. [66](#)
- [21] P. Stähli, M. Kuriakose, M. Frenz, and M. Jaeger, "Forward model for quantitative pulse-echo speed-of-sound imaging," Feb. 2019. [66](#)
- [22] A. Velichko, "Quantification of the Effect of Multiple Scattering on Array Imaging Performance," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 67, pp. 92–105, Jan. 2020. [66](#)
- [23] C. Fan, M. Caleap, M. Pan, and B. W. Drinkwater, "A comparison between ultrasonic array beamforming and super resolution imaging algorithms for non-destructive evaluation," *Ultrasonics*, vol. 54, pp. 1842–1850, Sept. 2014. [66](#)
- [24] T. Blondel, J. Chaput, A. Derode, M. Campillo, and A. Aubry, "Matrix Approach of Seismic Imaging : Application to the Erebus Volcano, Antarctica," *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 123, pp. 10,936–10,950, Dec. 2018. [67](#), [68](#)



# Chapitre 3

## Effet de la diffusion multiple sur les propriétés de la matrice de réflexion

### Sommaire

---

<b>3.1 Estimateurs de la proportion de diffusion simple dans la base canonique</b>	<b>78</b>
3.1.1 Formulation de l'estimateur de diffusion simple	78
3.1.2 Validité de l'ETDC	81
3.1.3 Résidus de diffusion multiple dans la matrice filtrée	81
3.1.4 Illustration de la projection sur l'ETDC	84
3.1.5 Pente et lien avec le libre parcours moyen de diffusion	87
<b>3.2 Construction d'un ETDC dans la base focalisée</b>	<b>88</b>
3.2.1 État de l'art de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée	89
3.2.2 Définition d'un ETDC en base focalisée	91
3.2.3 Comparaison des estimateurs $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}_f$	94
<b>3.3 Matrices expérimentales</b>	<b>95</b>
3.3.1 Milieu modèle : fils de nylon	95
3.3.2 Billettes de titane	99
<b>3.4 Cohérence spatiale du champ rétrodiffusé</b>	<b>103</b>
3.4.1 Calcul de la corrélation spatiale du champ	103
3.4.2 Lien avec la base focalisée	106
<b>3.5 Conclusion</b>	<b>109</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>111</b>

---

La simulation numérique présentée dans le chapitre précédent permet de calculer la contribution de chaque ordre de diffusion à la matrice des réponses inter-éléments, pour un milieu constitué de diffuseurs isotropes. Dans ce chapitre, cette simulation est utilisée pour définir des quantités relatives au niveau de diffusion simple par rapport à celui de la diffusion multiple et de les relier au libre-parcours moyen de diffusion  $\ell_s$ . Elle permet également de quantifier les biais des estimateurs proposés dans la littérature, puis d'introduire un nouvel estimateur calculé dans la base focalisée. Enfin, l'effet de la diffusion multiple sur la corrélation spatiale du champ rétrodiffusé est également analysé à l'aide de cette simulation. Sauf indication contraire, les paramètres de simulation utilisés sont identiques à ceux présentés section 2.2.1 et la fenêtre temporelle est de 10  $\mu\text{s}$ .

### 3.1 Estimateurs de la proportion de diffusion simple dans la base canonique

Compte tenu des matrices introduites au chapitre 2, une définition naturelle de la proportion de diffusion simple est le rapport suivant :

$$\rho = \frac{\|\mathbf{K}^{(1)}\|^2}{\|\mathbf{K}\|^2}, \quad (3.1)$$

avec  $\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{i,j} |A(i,j)|^2$  la norme matricielle de Frobenius. Les considérations de la section 2.3.3 sur les matrices apparentes nous amènent à définir un second estimateur à partir de la matrice de diffusion confocale  $\mathbf{K}_c$  :

$$\rho_c = \frac{\|\mathbf{K}_c\|^2}{\|\mathbf{K}\|^2}. \quad (3.2)$$

Ces indicateurs sont pertinents mais ne peuvent pas être obtenus expérimentalement. En effet, concrètement, seule la matrice  $\mathbf{K}$  (somme de tous les ordres de diffusion) est effectivement mesurée. Cette section introduit un estimateur de la proportion de diffusion simple s'appliquant aux matrices expérimentales et le compare ensuite aux « vraies » valeurs  $\rho$  et  $\rho_c$ . La première approche de séparation des matrices de diffusion simple et multiple a été introduite par Aubry *et al.* [1] et reprise par Baelde *et al.* [2] qui ont introduit un estimateur de la proportion de diffusion simple. Plus récemment, Velichko [3] a proposé d'autres expressions de la proportion de diffusion simple, dans la base canonique comme dans la base focalisée. Mais ces estimations sont-elles fiables? C'est l'objet de cette section que nous abordons en mettant à profit notre outil de simulation.

#### 3.1.1 Formulation de l'estimateur de diffusion simple

Le calcul analytique des éléments de la matrice de diffusion simple dans l'hypothèse d'approximation paraxiale a été réalisé au chapitre 2 et le résultat est rappelé ici :

$$\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \omega) \propto \mathcal{T}_0(\omega) \exp\left(ik_0 \frac{(u_i - u_j)^2}{4z}\right) \sum_{(x_s, z_s) \in \Gamma} \exp\left(ik_0 \frac{(z_s - z)^2}{z}\right) \exp\left(ik_0 \frac{(u_i + u_j - 2x_s)^2}{4z}\right). \quad (3.3)$$

Le fenêtrage temporel des matrices de réflexion autour du temps  $t = 2z/c$  limite les contributions des diffuseurs à ceux contenus dans le volume isochrone  $\Gamma$ . Étant donné la forme de la partie déterministe de la matrice de diffusion simple, Baelde *et al.* [4] proposent de construire un espace **théorique** de « diffusion simple » composé de  $2N-1$  matrices  $\{\mathbf{E}_l\}$  nulles excepté leur  $l^e$  anti-diagonale ( $1 \leq l \leq 2N-1$ ) pour laquelle la loi de phase suit l'équation (3.3) :

$$E_l(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j \neq l + 1, \\ \exp\left(ik_0 \frac{(u_i - u_j)^2}{4z}\right) & \\ \frac{1}{\sqrt{\min(l, 2N-l)}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.4)$$

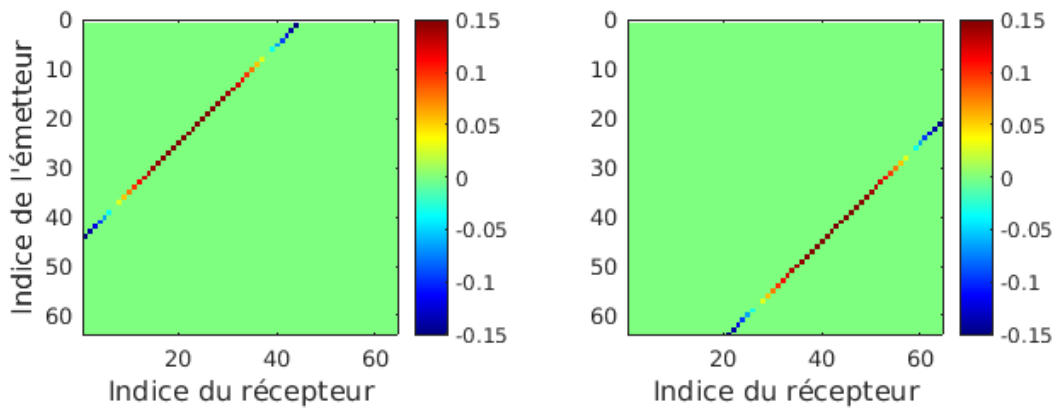


FIGURE 3.1 – Partie réelle de deux éléments de l'ETDC,  $\mathbf{E}_{44}$  et  $\mathbf{E}_{84}$ , à la profondeur 24.2 cm et à la fréquence 1.5 MHz.

L'ensemble de ces matrices forme une base orthonormée de l'ETDC à une fréquence et à la profondeur  $z$ . Une matrice de réflexion telle qu'obtenue expérimentalement, qui contient à la fois des contributions de diffusion simple et de diffusion multiple, peut être projetée dans cette base afin de filtrer la diffusion multiple. La matrice filtrée  $\mathbf{K}_f$  peut s'écrire :

$$\mathbf{K}_f = \langle \mathbf{E}_l | \mathbf{K} \rangle \mathbf{E}_l, \quad (3.5)$$

avec  $\langle \cdot \rangle$  le produit scalaire de Frobenius, défini pour deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\langle \mathbf{A} | \mathbf{B} \rangle = \text{Tr}(\mathbf{B}^t \mathbf{A}^*) = \text{Tr}({}^t \mathbf{A}^* \mathbf{B}). \quad (3.6)$$

La base  $\mathbf{E}_l$  étant orthonormée, la condition  $\|\mathbf{K}_f\| \leq \|\mathbf{K}\|$  est imposée par la projection. Ainsi, l'estimateur de la proportion de diffusion simple est défini simplement comme :

$$\hat{p} = \frac{\|\mathbf{K}_f\|^2}{\|\mathbf{K}\|^2} \in [0; 1], \quad (3.7)$$

correspondant au carré de l'estimateur  $p^E$  de Baelde *et al.* [4]. Cet estimateur a jusqu'alors été interprété comme le niveau de diffusion simple dans la matrice  $\mathbf{K}$  : s'il est proche de 0,



la matrice est dominée par la diffusion multiple ; s'il vaut 1, la matrice ne contient que de la diffusion simple. En nous appuyant sur les considérations du chapitre précédent, nous savons que la diffusion récurrente possède la même cohérence longue portée que la diffusion simple. L'ensemble des  $\{E_1\}$  **n'est donc pas une base de la diffusion simple mais de la diffusion confocale** et sera noté ETDC pour « Espace Théorique de Diffusion Confocale ». Les grandeurs  $\rho$ ,  $\rho_c$  et  $\hat{\rho}$  moyennées sur 50 réalisations du milieu sont tracées en fonction de la profondeur Fig. 3.2.

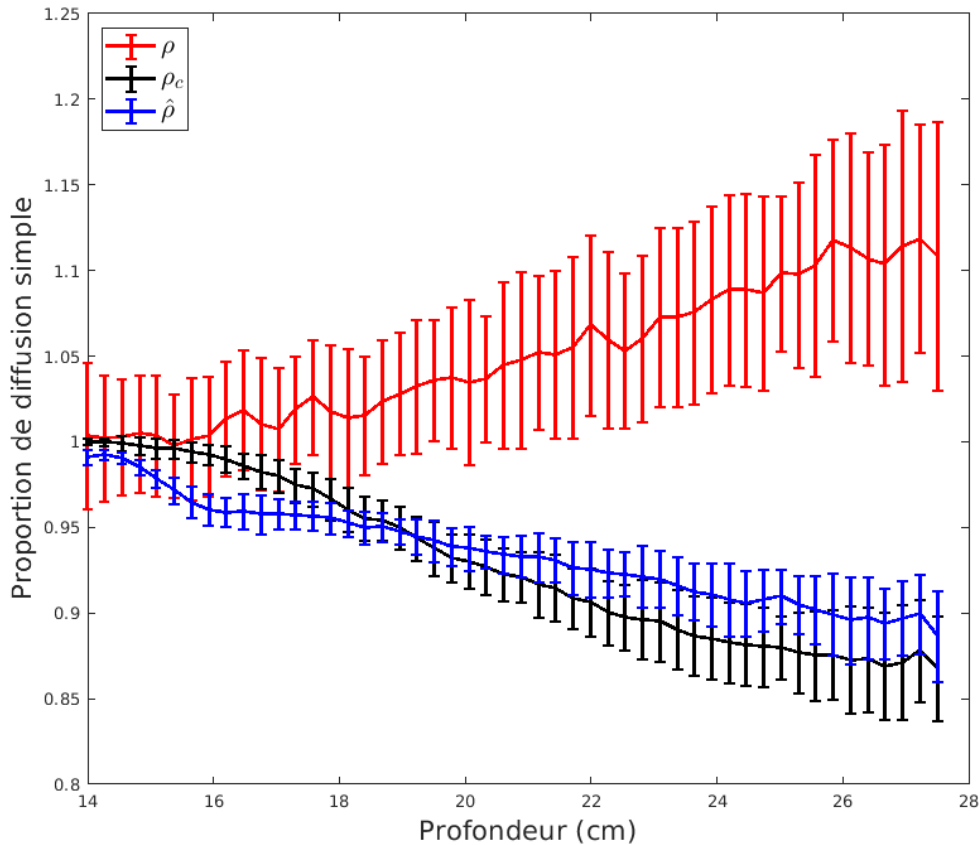


FIGURE 3.2 – Moyenne et écart-type sur 50 réalisations du milieu des « vraies » valeurs de la proportion de diffusion simple  $\rho$  et  $\rho_c$  et de l'estimateur  $\hat{\rho}$  pour la simulation décrite au chapitre 2.

- Ces courbes confirment bien le fait que  $\hat{\rho}$  est un estimateur de  $\rho_c$  et non de  $\rho$  : la diffusion simple au sens de la série de Born n'est pas celle vue par la sonde ; autrement dit, en croyant mesurer la diffusion simple, on mesure en fait la diffusion simple plus la diffusion récurrente.
- La courbe de  $\rho$  a un comportement inattendu puisqu'elle est croissante et supérieure à 1, ce qui est très contre-intuitif. Ce résultat signifie donc qu'il serait faux d'écrire  $\|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{K}^{(1)}\| + \|\mathbf{K}^{(2)}\| + \|\mathbf{K}^{(3)}\| + \dots$  : c'est la conséquence du fait que les contributions des différents ordres de diffusion sont corrélées entre elles (cf. Fig. 2.11).

### 3.1.2 Validité de l'ETDC

Afin de tester la validité de l'ETDC, projetons la matrice de diffusion confocale dans cet espace. S'il est valide, la matrice filtrée  $\mathbf{K}_{c,f}$  devrait être égale à la matrice initiale  $\mathbf{K}_c$ . La figure 3.3 représente le rapport des carrés des normes des deux matrices en fonction de la profondeur pour la géométrie choisie au chapitre 2. Cette grandeur est proche de 1 pour toutes les profondeurs, ce qui valide notre modèle d'ETDC.

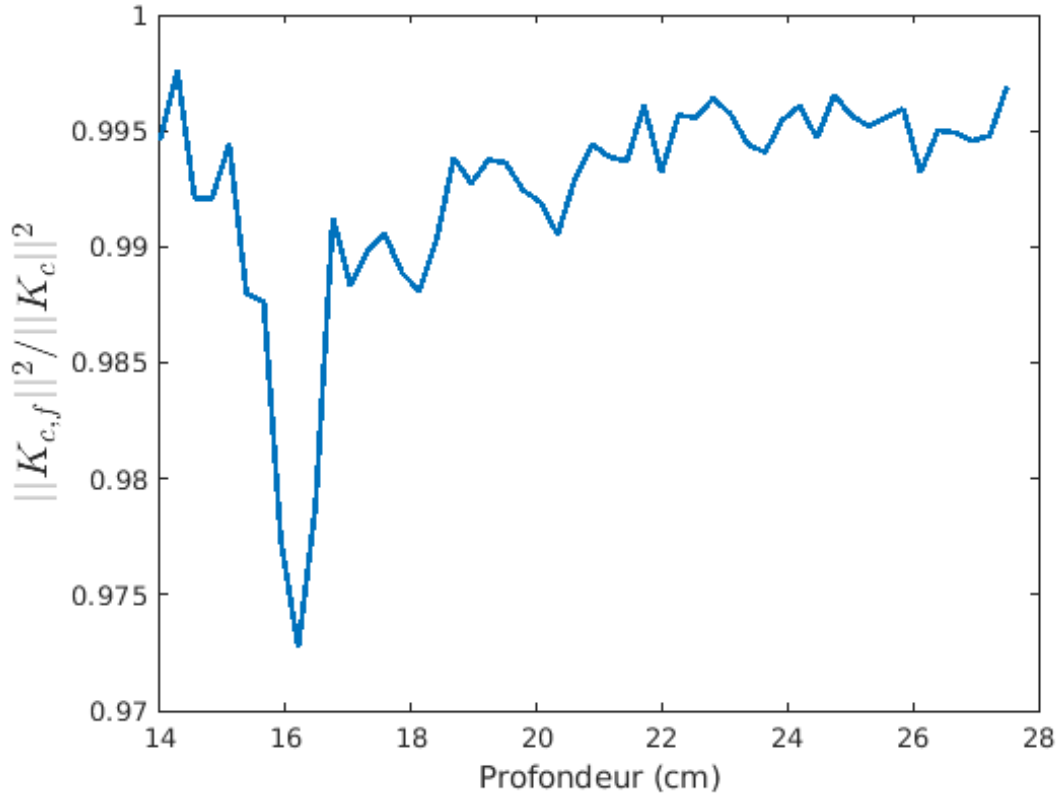


FIGURE 3.3 – Rapport entre les normes de la matrice confocale filtrée et de la matrice confocale ; si ce rapport est proche de 1, l'ETDC peut être considéré comme valide.

### 3.1.3 Résidus de diffusion multiple dans la matrice filtrée

L'estimateur construit  $\hat{\rho}$  semble séparer la diffusion confocale de la diffusion multiple apparente. Néanmoins, la figure 3.2 met en évidence un écart de l'estimateur  $\hat{\rho}$  vis-à-vis de la « vraie » valeur  $\rho_c$ .

Baelde *et al.*, en construisant l'estimateur de la proportion de diffusion confocale, ont mis en évidence le biais illustré Fig. 3.4 [2]. Dans leur approche, la matrice de diffusion multiple est modélisée par une matrice aléatoire symétrique avec des coefficients deux à deux indépendants et non une matrice physique;  $p^S$  et  $p^E$  représentent respectivement les équivalents des racines carrées de  $\rho$  et  $\hat{\rho}$ . Le biais mis en évidence par Baelde *et al.* augmente lorsque la proportion de diffusion simple diminue, ce qui est cohérent avec notre observation sur la

figure 3.2. Cette analyse nous amène à conjecturer qu'une partie de la matrice de diffusion multiple pourrait se projeter dans l'ETDC et fausser l'estimateur.

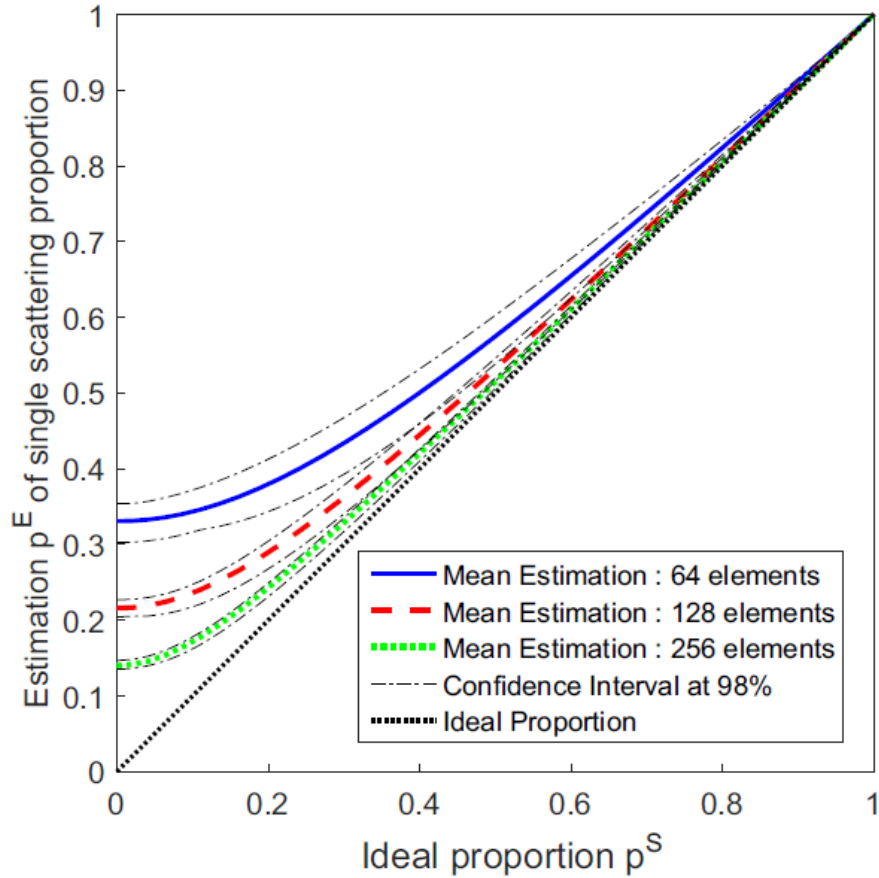


FIGURE 3.4 – Biais de l'estimateur de proportion de diffusion simple de Baelde *et al.*, issu de [2].

Pour étudier cette hypothèse, effectuons tout d'abord la projection d'une matrice aléatoire dans l'ETDC, comme l'ont fait Baelde *et al.*. Les matrices de diffusion multiple ont souvent été décrites comme aléatoires symétriques [5]. Ceci est une première approximation, puisque des corrélations peuvent exister le long des anti-diagonales de ces matrices. Même dans l'hypothèse où ces corrélations sont absentes et où  $\mathbf{K}_m$  peut être assimilée à une matrice aléatoire symétrique  $\mathbf{K}_{alea}$  de taille  $N \times N$  ( $N \gg 1$ ), elle se projette dans l'ETDC en une matrice  $\mathbf{K}_{alea,f}$ . L'espace des matrices symétriques est de dimension  $\frac{N(N+1)}{2}$ , tandis que l'ETDC est de dimension  $2N - 1$ . En moyenne, le rapport du carré des normes suit le rapport des dimensions des espaces :

$$\left\langle \frac{\|\mathbf{K}_{alea,f}\|^2}{\|\mathbf{K}_{alea}\|^2} \right\rangle = \frac{2N - 1}{N(N + 1)/2} \approx \frac{4}{N}, \quad (3.8)$$

avec  $\langle \rangle$  la moyenne sur les réalisations du désordre. La projection d'une matrice aléatoire est donc non nulle en moyenne, mais sa norme diminue lorsque la taille de la matrice augmente (cf. Fig. 3.5). Ces valeurs sont bien proches de celles calculées par Baelde *et al.* pour

$p^S = 0$  : 0.125 pour  $N = 256$ , 0.177 pour  $N = 128$  et 0.25 pour  $N = 64$ .

Pour tester la validité de l'équation (3.8), nous simulons des matrices de dimensions 32 à 128 et calculons le rapport du carré des normes d'une matrice aléatoire et de sa projection sur l'ETDC. La courbe présentée Fig. 3.5 est obtenue pour 20 réalisations de matrices : on observe bien une décroissance moyenne en  $4/N$  avec un écart type faible.

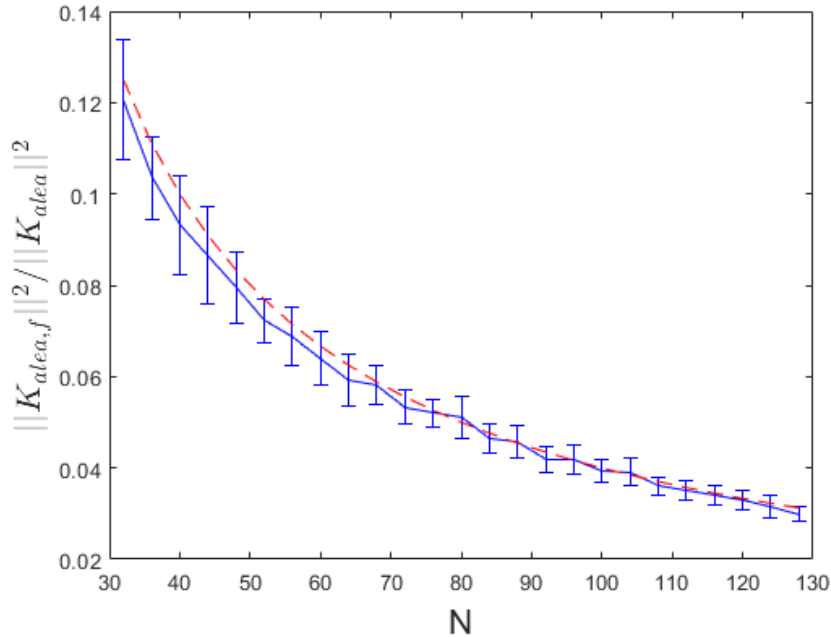


FIGURE 3.5 – Moyenne et écart-type sur 20 réalisations du rapport des carrés des normes d'une matrice aléatoire et de sa projection sur l'ETDC (bleu) et courbe théorique  $4/N$  (rouge) (Eq. (3.8)).

Cependant, une matrice de diffusion multiple n'est pas une matrice aléatoire dont les coefficients seraient deux à deux indépendants : il peut notamment exister des corrélations entre ses éléments :

- ▶ une corrélation de courte portée peut exister entre les lignes et colonnes si le pas inter-élément de la sonde est plus petit que la longueur d'onde;
- ▶ une corrélation le long des anti-diagonales de longue portée (dans le cas de la diffusion simple et, nous l'avons vu, de la diffusion récurrente) appelée « effet mémoire »;
- ▶ une corrélation le long des anti-diagonales de courte portée, de longueur égale à la largeur typique du pic de rétrodiffusion cohérente;
- ▶ une corrélation due à la symétrie de la matrice par réciprocité.

Les corrélations des éléments sur les diagonales et anti-diagonales de la matrice de diffusion multiple contribuent à diminuer le nombre d'éléments indépendants de la matrice (et donc la dimension effective de l'espace des matrices dans lequel se trouve  $\mathbf{K}_m$ ), ce qui contribue à accentuer le biais Eq. (3.8). La corrélation le long des anti-diagonales de  $\mathbf{K}_m$  augmente avec la profondeur (cf. Fig. 2.11) dû à l'agrandissement de la tache focale, ce qui pourrait expliquer l'augmentation du biais de  $\hat{\rho}$  avec la profondeur.

La matrice de diffusion multiple apparente  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$ , quant à elle, présente une faible corrélation suivant les anti-diagonales (cf. Fig. 2.15) : elle est beaucoup moins corrélée à  $\mathbf{K}_c$  que  $\mathbf{K}_m$  ne l'est à  $\mathbf{K}^{(1)}$ . Ainsi, sa projection dans l'ETDC est plus faible.

### 3.1.4 Illustration de la projection sur l'ETDC

Dans cette partie, une illustration simple des matrices et de leur projection dans l'espace de diffusion confocale est proposée. Pour faciliter la compréhension, les matrices sont représentées par des vecteurs pour obtenir une représentation à 3D. Cette illustration vise à représenter le problème de manière simplifiée afin de mieux appréhender les relations entre matrices.

#### Matrices au sens de la série de Born

Pour limiter le nombre de matrices introduites, faisons l'hypothèse que  $\mathbf{K}^{(1)}$  et sa projection sont identiques. Cela est vrai si  $\mathbf{K}^{(1)}$  se trouve dans l'espace de diffusion confocale, c'est-à-dire que l'hypothèse de champ lointain est bien respectée. Les notations utilisées sont résumées et illustrées Fig. 3.6 :

- ▶ Matrice de diffusion totale :  $\mathbf{K}$ ;
- ▶ Matrice de diffusion totale filtrée :  $\mathbf{K}_f$ ;
- ▶ Orthogonal à la matrice de diffusion totale filtrée :  $\mathbf{K}_f^\perp$ ;
- ▶ Matrice de diffusion simple :  $\mathbf{K}^{(1)}$ ;
- ▶ Matrice de diffusion multiple :  $\mathbf{K}_m$ ;
- ▶ Matrice de diffusion multiple filtrée :  $\mathbf{K}_{m,f}$ ;
- ▶ Orthogonal à la matrice de diffusion multiple filtrée :  $\mathbf{K}_{m,f}^\perp$ .

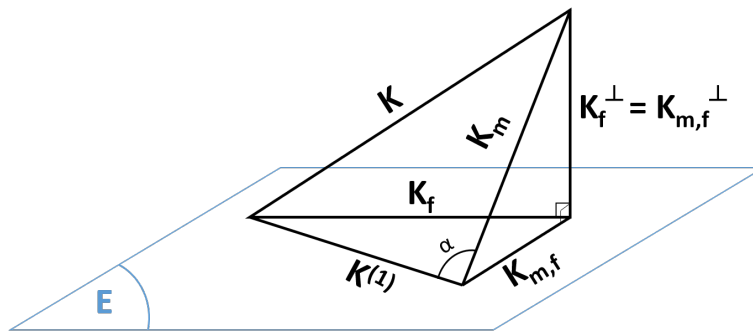


FIGURE 3.6 – Représentation en 3D des relations entre matrices de diffusion.

La relation de base est la décomposition de  $\mathbf{K}$  en matrices de diffusion simple et multiple :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}_m. \quad (3.9)$$

Toute la complexité du problème réside dans le fait que la décomposition de ces deux matrices n'est pas orthogonale : il existe des corrélations entre  $\mathbf{K}^{(1)}$  et  $\mathbf{K}_m$ . Projetons à présent

les matrices dans l'ETDC; l'équation (3.9) devient :

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}_{m,f}, \quad (3.10)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{K} = \mathbf{K}_f + \mathbf{K}_f^\perp, \\ \mathbf{K}_m = \mathbf{K}_{m,f} + \mathbf{K}_{m,f}^\perp. \end{cases} \quad (3.11)$$

Grâce aux relations d'orthogonalité entre une matrice projetée et le résidu de la projection, nous obtenons les relations suivantes sur les normes des matrices :

$$\begin{cases} \|\mathbf{K}\|^2 = \|\mathbf{K}_f\|^2 + \|\mathbf{K}_f^\perp\|^2, \\ \|\mathbf{K}_m\|^2 = \|\mathbf{K}_{m,f}\|^2 + \|\mathbf{K}_{m,f}^\perp\|^2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Comme présenté au paragraphe précédent, une partie de la diffusion multiple se projette dans l'ETDC donc  $\|\mathbf{K}_{m,f}\| > 0$ . Ainsi, pour construire un estimateur fiable de la proportion de diffusion simple, il est nécessaire de ne pas faire l'hypothèse d'orthogonalité entre les espaces relatifs à la diffusion multiple et à la diffusion simple.

Expérimentalement, seules les matrices  $\mathbf{K}$  et après traitement (cf. Eq. 3.5)  $\mathbf{K}_f$  — et donc  $\mathbf{K}_f^\perp$  — sont connues. Il faut en déduire la norme de la matrice  $\mathbf{K}^{(1)}$  avec le moins d'erreur possible pour obtenir un bon estimateur de la proportion de diffusion simple au sens de Born. Néanmoins, le problème comporte plus d'inconnues que d'équations; l'angle  $\alpha$  (cf. Fig. 3.6) ne peut pas être déterminé par les équations précédentes : une détermination expérimentale de la norme de  $\mathbf{K}^{(1)}$  semble donc délicate.

### Matrices apparentes

Les matrices apparentes ont été introduites à la section 2.3.3 et sont construites par une classification différente de la série de Born : la diffusion récurrente est ajoutée à la diffusion simple pour former la diffusion confocale. Pour limiter le nombre de matrices introduites, nous faisons comme pour  $\mathbf{K}^{(1)}$  et considérons que  $\mathbf{K}_c$  est dans l'ETDC. Cette hypothèse est vérifiée en simulation grâce à la validité de l'hypothèse d'approximation paraxiale.

Les nouvelles notations utilisées sont résumées et illustrées Fig. 3.7 :

- ▶ Matrice de diffusion confocale :  $\mathbf{K}_c$  ;
- ▶ Matrice de diffusion multiple apparente :  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  ;
- ▶ Matrice de diffusion multiple apparente filtrée :  $\mathbf{K}_{m\setminus r,f}$  ;

La décomposition de  $\mathbf{K}$  en matrices de diffusion confocale et multiple apparente s'écrit :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_{m\setminus r}. \quad (3.13)$$

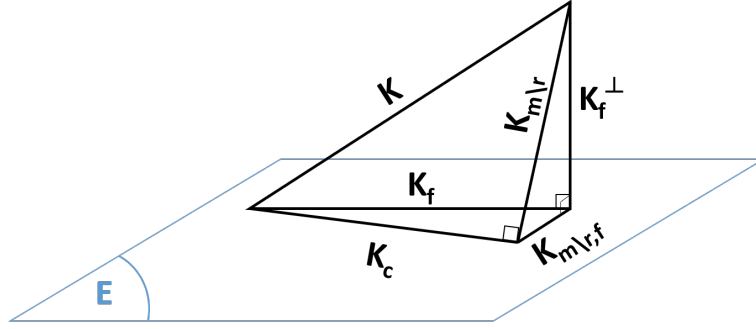


FIGURE 3.7 – Représentation en 3D des relations entre matrices de diffusion apparentes.

Or, les matrices  $\mathbf{K}_c$  et  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  sont quasiment orthogonales (cf. Fig. 2.15) puisque leur produit scalaire normalisé est de l'ordre de quelques pourcents. En utilisant cette simplification empirique, de nouvelles relations peuvent être considérées :

$$\|\mathbf{K}\|^2 = \|\mathbf{K}_c\|^2 + \|\mathbf{K}_{m\setminus r}\|^2, \quad (3.14a)$$

$$\|\mathbf{K}\|^2 = \|\mathbf{K}_f\|^2 + \|\mathbf{K}_f^\perp\|^2, \quad (3.14b)$$

$$\|\mathbf{K}_{m\setminus r}\|^2 = \|\mathbf{K}_{m\setminus r, f}\|^2 + \|\mathbf{K}_f^\perp\|^2. \quad (3.14c)$$

De plus, la matrice  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  peut être considérée comme aléatoire symétrique puisque la corrélation le long des anti-diagonales est supprimée par construction, d'où, d'après l'équation (3.8) :

$$\left\langle \frac{\|\mathbf{K}_{m\setminus r, f}\|^2}{\|\mathbf{K}_{m\setminus r}\|^2} \right\rangle \approx \frac{4}{N}. \quad (3.15)$$

Les équations (3.14b) et (3.15) nous permettent d'exprimer la norme de la matrice  $\mathbf{K}_{m\setminus r}$  :

$$\langle \|\mathbf{K}_{m\setminus r}\|^2 \rangle = \frac{\|\mathbf{K}_f^\perp\|^2}{1 - 4/N}. \quad (3.16)$$

Or,  $\|\mathbf{K}_f^\perp\|^2$  s'obtient très facilement à partir des matrices connues expérimentalement :  $\|\mathbf{K}_f^\perp\|^2 = \|\mathbf{K}\|^2 - \|\mathbf{K}_f\|^2$ . Ainsi, un nouvel estimateur de la proportion de diffusion simple « corrigé », s'affranchissant du biais de la projection de la diffusion multiple dans l'ETDC est proposée :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{corr} &= \frac{1}{1 - 4/N} \left( \frac{\|\mathbf{K}_f\|^2}{\|\mathbf{K}\|^2} - \frac{4}{N} \right) \\ &= \frac{1}{1 - 4/N} \left( \hat{\rho} - \frac{4}{N} \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'estimateur ainsi corrigé présente les deux limites attendues :

- lorsque  $\mathbf{K}$  ne contient que de la diffusion simple,  $\|\mathbf{K}_f\| = \|\mathbf{K}\|$  et  $\hat{\rho}_{corr} = 1$  ;

- lorsque  $\mathbf{K}$  ne contient que de la diffusion multiple (aléatoire),  $\|\mathbf{K}_f\|^2 / \|\mathbf{K}\|^2 = 4/N$  et  $\hat{\rho}_{corr} = 0$ .

Ce nouvel estimateur  $\hat{\rho}_{corr}$  n'introduirait qu'une très faible correction de  $\hat{\rho}$  sur les courbes de simulation Fig. 3.2, la proportion de diffusion simple étant très proche de 1. L'intérêt de  $\hat{\rho}_{corr}$  sera plus flagrant sur les courbes expérimentales présentées à la section 3.3.

### 3.1.5 Pente et lien avec le libre parcours moyen de diffusion

Les estimateurs étudiés permettent de quantifier un niveau de diffusion confocale au sein des signaux. Il serait intéressant de les rattacher à des grandeurs caractéristiques du milieu diffusant présentées au chapitre 2, notamment au libre parcours moyen de diffusion  $\ell_s$ .

Les courbes de  $\rho_c$  moyennées sur 50 réalisations du milieu sont présentées Fig. 3.8(a) aux fréquences 1.3, 1.5 et 1.7 MHz. Ces courbes ont une décroissance quasiment linéaire avec la profondeur et leur pente augmente en valeur absolue avec celle-ci. Le libre parcours moyen de diffusion est par ailleurs calculé à plusieurs fréquences dans la bande passante de la sonde (cf. Eq. 2.49) et comparé à la pente de  $\rho_c(z)$ . La pente  $-\mathrm{d}\rho_c(z)/\mathrm{d}z$  en fonction de l'inverse de  $\ell_s$  est représentée Fig. 3.8(b) (courbe rouge) pour 50 réalisations du milieu, ainsi qu'une courbe théorique pente =  $1/\ell_s$  (noir). Empiriquement, il semble donc que mesurer la pente de l'estimateur de proportion de diffusion simple permette d'estimer  $\ell_s$ .



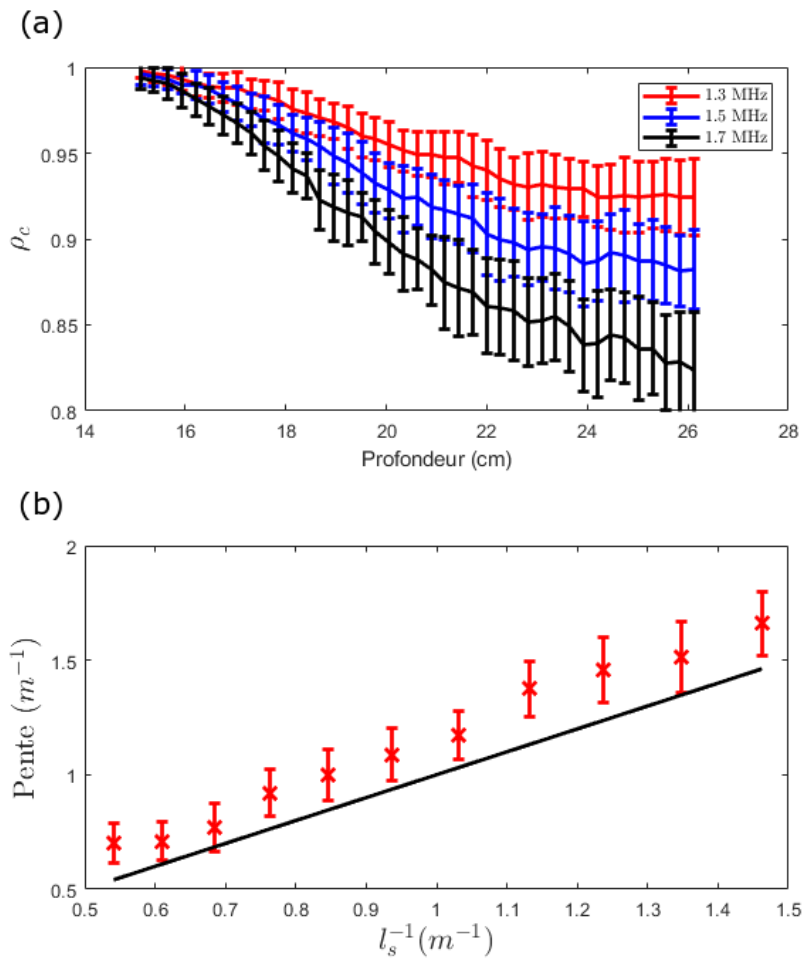


FIGURE 3.8 – (a) moyenne et écart-type pour 50 réalisations du milieu de  $\rho_c(z)$  calculé à 1.3, 1.5 et 1.7 MHz, (b) moyenne et écart-type de la pente  $\rho_c(z)$  en fonction de  $1/\ell_s$  (rouge) et droite =  $1/\ell_s$  (noir).

## 3.2 Construction d'un ETDC dans la base focalisée

Les estimateurs de la proportion de diffusion simple dans la base canonique permettent d'extraire la contribution de diffusion confocale  $\mathbf{K}_c$  des mesures expérimentales. Néanmoins, ils se limitent à des cas de champ lointain pour garantir la validité de l'approximation paraxiale, hypothèse nécessaire à la construction de l'ETDC (cf. Eq. 3.3). La base focalisée présentée au chapitre 2 est un espace où les matrices de diffusion simple et multiple sont plus naturellement distinctes spatialement. Nous nous intéressons alors à la question suivante : comment définir un indicateur fiable en travaillant en base focalisée? Cette section présente tout d'abord l'état de l'art sur les estimateurs de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée, puis propose un nouvel estimateur basé sur les résultats de simulation numérique.

### 3.2.1 État de l'art de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée

Les notations des matrices de diffusion dans la base focalisée ont été introduites à la section 2.4.3. La base focalisée permet de connaître localement les propriétés des matrices de réflexion, ce qui constitue un atout vis-à-vis de la base canonique pour laquelle les contributions de diffuseurs éloignés interfèrent. Lambert *et al.* [6] et Velichko [3] ont construit des cartes de la proportion de diffusion simple dans des milieux biologiques comme dans les métaux à partir de la matrice de réflexion en intensité. Pour cela, ils ont fait les hypothèses suivantes :

- ▶ loin de la diagonale principale de la matrice de réflexion (à plus d'une largeur de cellule de résolution pour Lambert *et al.* et entre  $\lambda$  et  $5\lambda$  pour Velichko), seule la diffusion multiple est présente;
- ▶ sur la diagonale de la matrice se superposent les termes de diffusion simple et deux fois le terme de diffusion multiple dû au pic de rétrodiffusion cohérente (cf. section 2.1.2);
- ▶ le bruit de mesure peut être présent dans toute la matrice et en diminue le niveau de symétrie.

Lambert *et al.* ont proposé d'étudier un fantôme de tissus biologiques composés de diffuseurs sub-longueur d'onde et de plusieurs diffuseurs forts. Pour étudier les effets de la diffusion multiple et des aberrations, ils y ont superposé une couche de 20 mm de viande (tissus musculaires). Les cartes associées sont présentées Fig. 3.9 : à gauche, il s'agit de l'image confocale, au centre le rapport entre l'intensité de diffusion multiple et celle de diffusion simple, à droite le rapport entre l'intensité de diffusion multiple et de celle du bruit de mesure. Ces cartes mettent en évidence des contrastes différents d'une image échographique standard, pour mieux distinguer des zones aux propriétés de diffusion différentes.

Velichko a calculé le taux de diffusion multiple dans un échantillon de cuivre inspecté à 5 MHz. La moyenne sur 10 mesures ainsi que l'écart-type sont présentés Fig. 3.10(a) et (b) respectivement. Les points noirs indiquent la limite de détection de défauts de 2 mm à plusieurs profondeurs de l'échantillon. Ainsi, il montre que dans la pièce métallique, le taux de diffusion multiple augmente avec la fréquence et la profondeur, ce qui est cohérent avec nos conclusions dans la base canonique.

Ces deux papiers font l'hypothèse très forte d'additivité entre les intensités de diffusion simple et multiple. Or, nous avons montré qu'il existe le plus souvent une corrélation entre ces deux termes, **ce qui n'est pas compatible avec l'additivité des intensités**. De plus, la figure 2.21, qui décrit l'intensité moyenne des différentes matrices de diffusion en fonction de la distance à la diagonale, montre qu'il est difficile de définir la zone où considérer qu'il n'y a que de la diffusion multiple.

La méthode que nous avons choisie pour présenter un estimateur de la proportion de diffusion simple n'est donc pas basée sur ces considérations. Elle se rapproche davantage du filtre confocal gaussien de Badon *et al.* [7] et de Blondel *et al.* [8] présenté à la section 2.4.1.

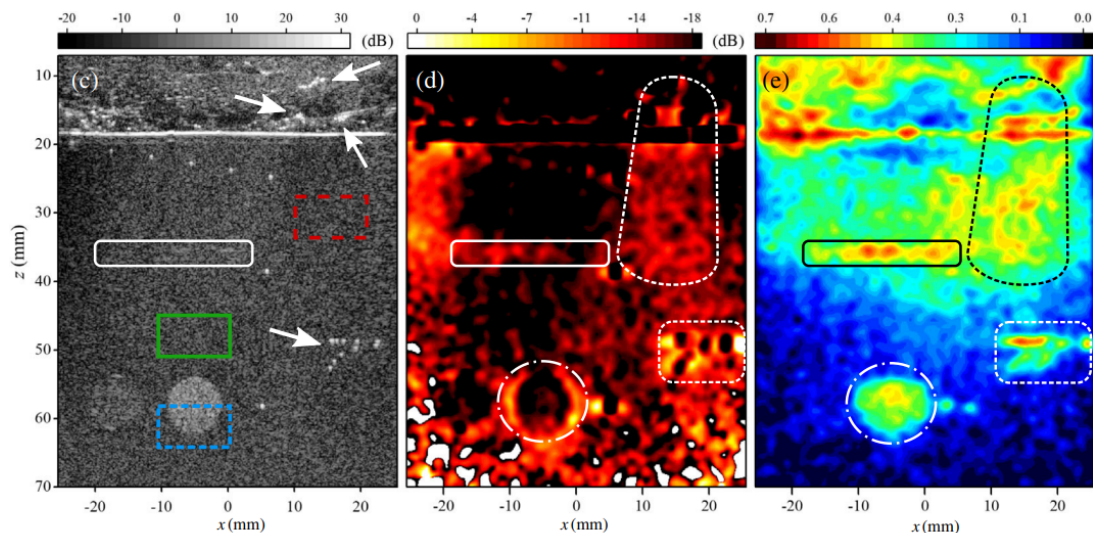


FIGURE 3.9 – Cartes de diffusion issues de la matrice de réflexion en base focalisée, issues de Lambert *et al.* [6] : image échographique (gauche), rapport entre l'intensité de diffusion multiple et celle de diffusion simple (centre), rapport entre l'intensité de diffusion multiple et celle du bruit (droite).

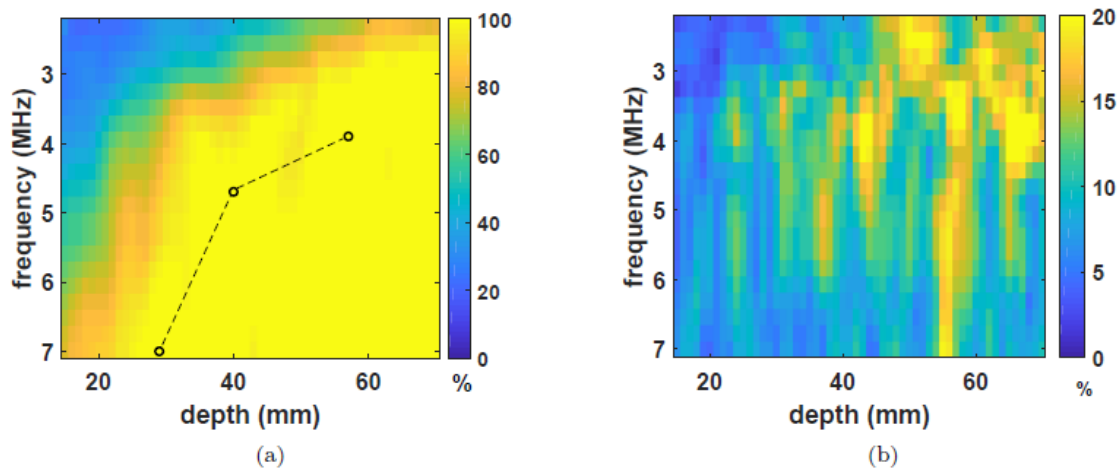


FIGURE 3.10 – Cartes de diffusion issues de la matrice de réflexion en base focalisée de Velichko, tirées de [3] : (a) moyenne et (b) écart-type sur 10 mesures du taux de diffusion multiple sur un échantillon de cuivre inspecté à 5 MHz.

Ce filtre a pour effet d'apodiser la matrice le long de sa diagonale principale, de façon à diminuer le poids des éléments hors diagonale. Néanmoins, aucune étude n'a été menée sur la forme et la largeur à donner au filtre pour isoler correctement la diffusion simple. Dans la section suivante, nous utilisons la simulation numérique pour fabriquer un ETDC en base focalisée et ainsi définir les bons paramètres du filtre.

### 3.2.2 Définition d'un ETDC en base focalisée

La simulation numérique nous donne accès aux matrices de réflexion dans la base focalisée pour chaque ordre de diffusion, ainsi qu'aux matrices apparentes (cf. section 2.4.3). Elle nous permet donc de construire les équivalents des indicateurs de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée, notés avec un indice  $f$  :

$$\rho_f = \frac{\|\overline{\mathbf{R}}^{(1)}\|^2}{\|\overline{\mathbf{R}}\|^2}, \quad (3.18a)$$

$$\rho_{cf} = \frac{\|\overline{\mathbf{R}}_c\|^2}{\|\overline{\mathbf{R}}\|^2}. \quad (3.18b)$$

Cependant, comme dans la base canonique, aucune de ces grandeurs n'est calculable expérimentalement.

#### Famille génératrice

Chaque élément de la matrice de réflexion en base focalisée représente la réponse du milieu lorsque l'onde est focalisée en un point  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  en émission et un point  $\mathbf{r}_{\text{out}}$  en réception (comme si on plaçait une source virtuelle en  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  et un récepteur virtuel en  $\mathbf{r}_{\text{out}}$ ), ces deux points étant choisis à la même profondeur  $z$ . L'idée retenue pour calculer un ETDC est de calculer les matrices de réflexion en ayant positionné un unique diffuseur en un point  $\mathbf{r}_s = (x_s, z)$ . Par construction, l'onde mesurée par la sonde provient uniquement de la diffusion simple. En construisant  $N_s$  matrices de réflexion, chacune étant reliée à une position  $x_s$  différente du diffuseur, il est ainsi possible de balayer le milieu à inspecter. Cette famille génératrice de matrices doit être calculée à chaque fréquence car la largeur de la réponse du diffuseur en dépend. En pratique, les calculs étant lourds, les matrices sont calculées pour une petite sous-bande de fréquences.

Deux exemples de matrices génératrices à la fréquence centrale, calculées pour un diffuseur placé à la profondeur  $z = 24.2$  cm et  $x_s = -5.8$  et  $5.4$  cm sont représentées Fig. 3.11(a) et (b) respectivement. Comme attendu, l'énergie se situe principalement sur la diagonale, au point où  $\mathbf{r}_{\text{in}} = \mathbf{r}_{\text{out}} = \mathbf{r}_s$ . Néanmoins, elle ne se limite pas à une zone proche de la diagonale à cause des lobes secondaires de diffraction, dus à l'ouverture limitée de la sonde.

#### Dimension de la base

En base canonique, la dimension de l'ETDC correspond au nombre d'anti-diagonales de la matrice de réflexion, qui est fixé par l'expérience ou les paramètres de la simulation. Dans la base focalisée, le problème est différent car les points  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  et  $\mathbf{r}_{\text{out}}$  sont choisis avec un maillage arbitraire. Ainsi, il existe une infinité de matrices qui composent la famille génératrice de l'ETDC. Deux paramètres interviennent dans le choix d'un maillage régulier : la valeur maximale de  $\mathbf{r}_{\text{in}}$  (et donc de  $\mathbf{r}_{\text{out}}$ ) et le pas du maillage.

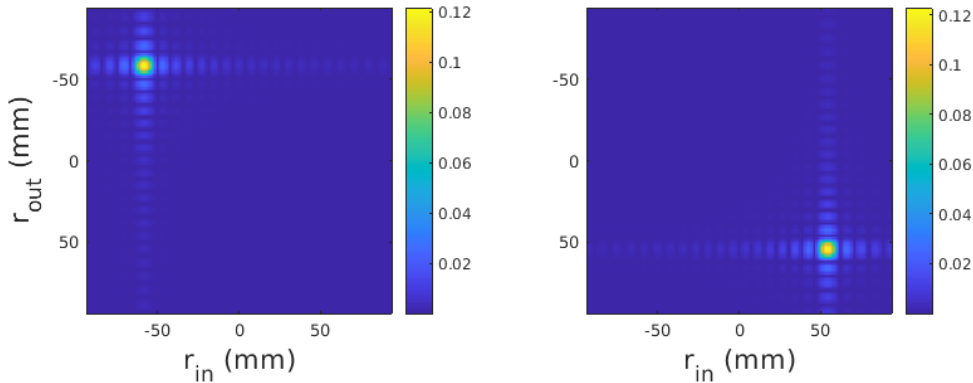


FIGURE 3.11 – Matrices de l’ETDC en base focalisée à 1.5 MHz pour deux diffuseurs placé à la profondeur 24.2 cm et aux positions latérales -5.8 cm (gauche) et 5.4 cm (droite).

Pour comparer les estimateurs de  $\rho_c$  dans les deux bases, il est nécessaire que les points  $\mathbf{r}_{in}$  et  $\mathbf{r}_{out}$  recouvrent tout le milieu d’étude; dans le cas contraire, la matrice dans la base focalisée contiendrait moins d’informations que la matrice dans la base canonique. Expérimentalement, cette dimension peut être limitée par la directivité des transducteurs si le milieu est très large devant la taille de la sonde.

Le pas du maillage détermine le nombre de matrices utilisées pour construire l’ETDC. Pour projeter la matrice de réflexion dans cet espace et en déduire un estimateur de la proportion de diffusion simple, il est nécessaire d’en déterminer une base orthonormale. Cela nécessite de choisir une sous-famille libre dans l’ensemble des matrices génératrices et de l’orthogonaliser.

### Orthogonalisation des matrices et dimension de la base

L’orthogonalisation des matrices est réalisée grâce au procédé de Gram-Schmidt stabilisé numériquement. Un ensemble de matrices  $\{\mathbf{U}_m\}$  peut être orthogonalisé en une famille de matrices orthogonales  $\{\mathbf{V}_m\}$  de manière récurrente grâce au processus suivant :

- ▶  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1; \mathbf{e}_1 = \mathbf{V}_1 / \|\mathbf{V}_1\|;$
- ▶  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{U}_2 - \langle \mathbf{U}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2 = \mathbf{V}_2 / \|\mathbf{V}_2\|;$
- ▶  $\mathbf{V}_3 = \mathbf{U}_3 - \langle \mathbf{U}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{U}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 = \mathbf{V}_3 / \|\mathbf{V}_3\| \dots$

Dans notre cas, les  $\{\mathbf{U}_m\}$  sont les matrices de la famille génératrice normalisées pour que leur poids ne dépende pas de la section efficace du diffuseur mais seulement de sa position. Il n’est possible d’orthogonaliser que  $X$  matrices dans un espace de dimension  $X$ . Numériquement, cela signifie que les matrices  $\mathbf{V}_m$  avec  $m > X$  seront de norme très petite devant 1. La détermination de la dimension de l’ETDC en base focalisée est donc effectuée en augmentant progressivement le nombre de matrices de la famille génératrice jusqu’à ce que les

matrices issues du processus d'orthogonalisation soit de norme très petite devant 1.

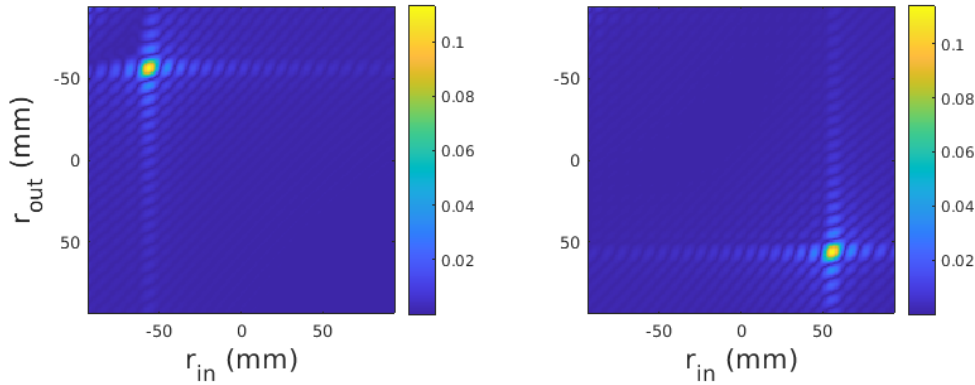


FIGURE 3.12 – Matrices orthonormalisées de l'ETDC en base focalisée (correspondant à la figure 3.11) à 1.5 MHz pour deux diffuseurs placés à la profondeur 24.2 cm et aux positions latérales -5.8 cm (gauche) et 5.4 cm (droite).

La base orthogonale des  $\{\mathbf{V}_l\}$  étant déterminée, ces matrices sont normalisées pour obtenir une base  $\{\mathbf{F}_l\}$  orthonormale. La matrice de réflexion à une fréquence et une profondeur  $\mathbf{R}$  peut être projetée sur cette base pour filtrer la diffusion simple :

$$\mathbf{R}_f = \langle \mathbf{F}_l | \mathbf{R} \rangle \mathbf{F}_l. \quad (3.19)$$

La résolution axiale  $\Delta z$  (correspondant à une résolution temporelle  $\Delta t = 2\Delta z / c_0$ ) est ensuite retrouvée en sommant  $\mathbf{R}_f$  sur une bande de fréquences (de largeur typique  $1/\Delta t$ ) pour former la matrice  $\bar{\mathbf{R}}_f$ .

Cette méthode nous permet de calculer la dimension de l'ETDC en base focalisée pour différentes fréquences et profondeurs. Une analyse des résultats nous indique qu'il est nécessaire d'utiliser deux diffuseurs par largeur de cellule de résolution  $\lambda z / D$  pour obtenir une base de l'espace. En deçà, l'espace est mal échantillonné et ne peut pas représenter l'ensemble des matrices; au-delà, les matrices orthogonales construites n'ont plus de sens physique et la normalisation leur donne un poids important qui pollue la matrice  $\mathbf{R}_f$ .

Un nouvel estimateur de la proportion de diffusion simple dans la base focalisée peut alors être défini :

$$\hat{\rho}_f = \frac{\|\bar{\mathbf{R}}_f\|^2}{\|\bar{\mathbf{R}}\|^2}. \quad (3.20)$$

Cette méthode est donc plus précise qu'une apodisation de la matrice  $\bar{\mathbf{R}}$  le long de sa diagonale principale; ici, l'entièreté du signal de diffusion confocale est pris en compte pour la projection.

### 3.2.3 Comparaison des estimateurs $\hat{\rho}$ et $\hat{\rho}_f$

Les estimateurs  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\rho}_f$  s'appliquent au même milieu dans deux bases différentes : les informations contenues dans les matrices de réflexion sont identiques et les estimateurs devraient être comparables. À cette fin, nous prenons pour la base focalisée une largeur de bande inverse de la durée de la fenêtre temporelle utilisée pour la base canonique. De plus, nous rapprochons le milieu afin de ne plus satisfaire l'approximation paraxiale.

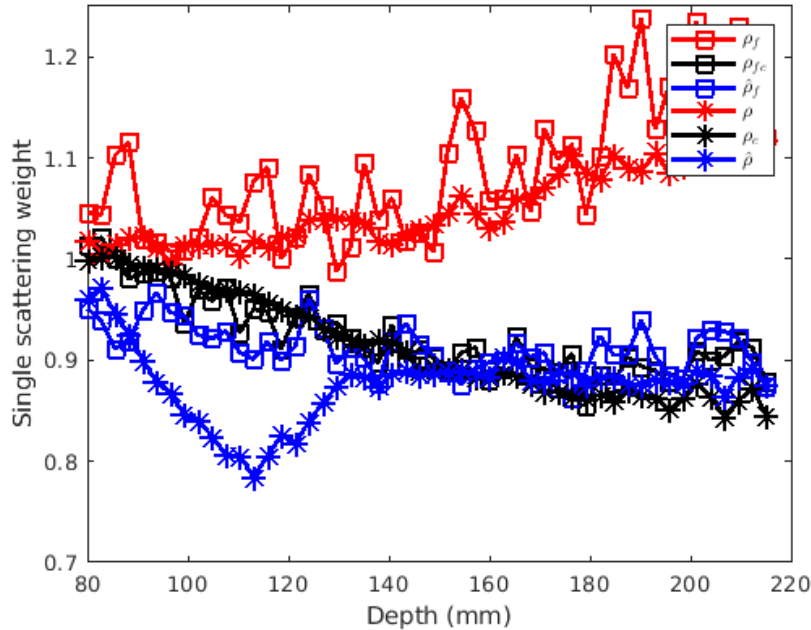


FIGURE 3.13 – Estimateurs et « vraies » valeurs de la proportion de diffusion simple dans un milieu en champ proche, calculées dans la base canonique (étoiles) et focalisée (carrés).

La figure 3.13 illustre les résultats de simulation lorsque le début du milieu se trouve à 8 cm de la sonde. La première partie se trouve en champ proche : cela ne modifie pas les « vraies » valeurs de la proportion de diffusion simple  $\rho$  et  $\rho_c$  en base canonique, mais  $\hat{\rho}$  n'est plus un bon estimateur de  $\rho_c$ . En effet, lorsque l'approximation paraxiale n'est pas valide, la cohérence le long des anti-diagonales de la matrice  $\mathbf{K}_c$  n'est pas longue portée et le filtre ne projette pas sur le bon espace théorique de diffusion confocale (cf. Fig. 3.14). À plus grande profondeur, lorsque  $z > 14$  cm,  $\hat{\rho}$  redevient correct. L'estimateur de la proportion de diffusion simple en base focalisée,  $\hat{\rho}_f$  n'est pas affecté par une plus faible distance à la sonde : aucune hypothèse n'est requise pour construire l'ETDC en base focalisée.

Ainsi, la base focalisée a pour avantage d'être plus souple à utiliser que la base canonique. L'estimateur calculé semble adéquat pour toutes les distances entre la sonde et le début du milieu diffusant.

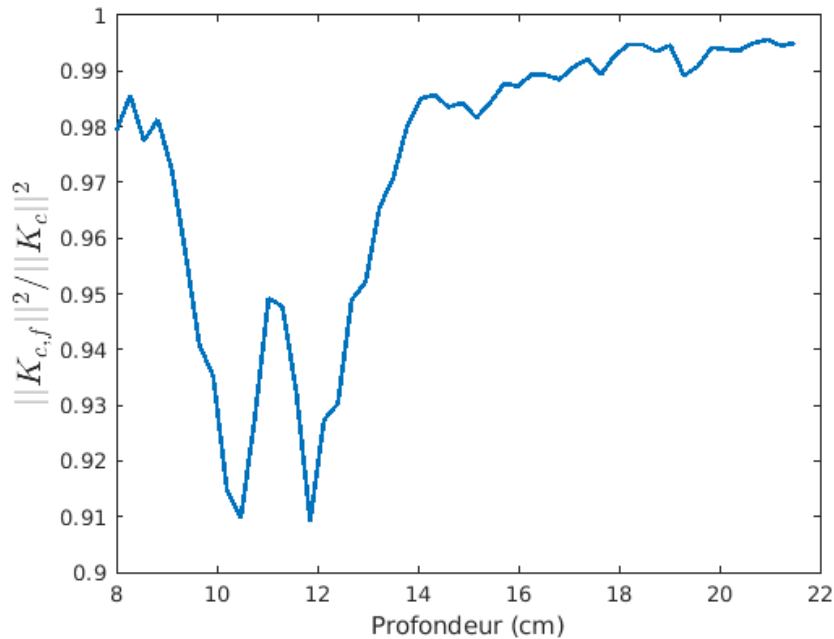


FIGURE 3.14 – Rapport entre les normes de la matrice confocale filtrée et de la matrice confocale lorsque le début du milieu se trouve à 8 cm de la sonde, tous les autres paramètres restant identiques à ceux du chapitre 2.

### 3.3 Matrices expérimentales

L'intérêt des grandeurs  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\rho}_{corr}$  calculées dans la base canonique et  $\hat{\rho}_f$  dans la base focalisée est de fournir une estimation de la proportion de diffusion confocale calculable expérimentalement. La simulation numérique, en nous donnant accès aux différents ordres de diffusion multiple, nous a permis de comprendre dans quelles conditions ces estimateurs étaient fiables. Nous nous intéressons à présent à des données expérimentales. Cette section présente les résultats obtenus sur un milieu modèle dont les paramètres de diffusion sont proches de ceux de la simulation numérique (forêt de fils de nylon) et sur des billettes de titane (TA6V et Ti17).

#### 3.3.1 Milieu modèle : fils de nylon

Afin de vérifier que les résultats de simulation sont réalistes, nous avons choisi d'utiliser un milieu modèle pour des diffuseurs isotropes répartis aléatoirement, une forêt de fils de nylon réalisée au laboratoire (cf. Fig. 3.15). Ce milieu permet d'étudier à la fois les propriétés de diffusion multiple et d'anisotropie (cf. chapitre 4). Lors d'une expérience, l'échantillon est placé dans l'eau et le plan de propagation de l'onde ultrasonore est perpendiculaire aux fils.

Les forêts de fils de nylon sont peu diffusantes et permettent d'étudier la transition entre le régime de diffusion simple et celui de diffusion multiple. L'échantillon utilisé est composé de fils de rayon  $a = 100 \mu\text{m}$  et de densité de 4 fils/cm<sup>2</sup>. Ses dimensions sont de 15 cm de profondeur et 13.5 cm de largeur. Le libre parcours-moyen de diffusion n'a pas été mesuré



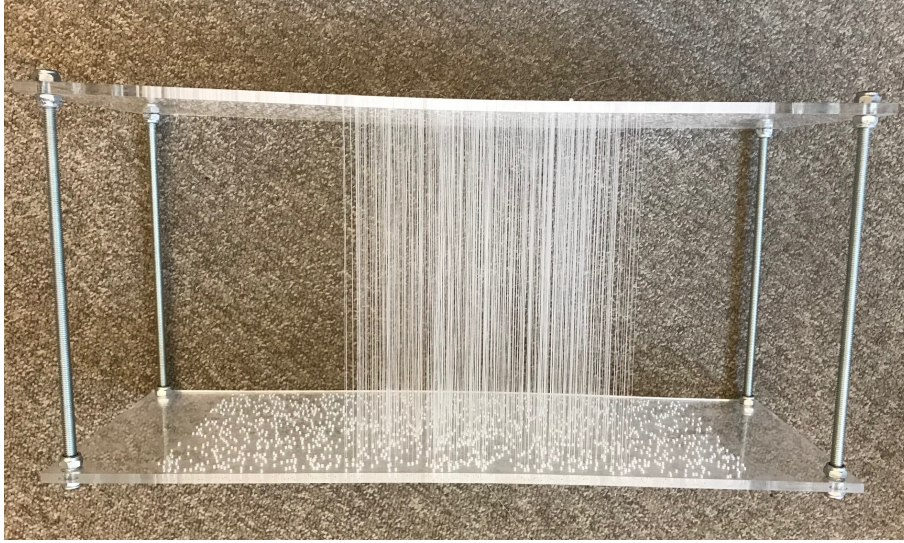


FIGURE 3.15 – Photographie de la forêt de fils de nylon.

expérimentalement, mais un calcul théorique donne un libre parcours moyen de l'ordre du mètre à 1.5 MHz. On peut s'attendre à ce que le signal rétrodiffusé soit composé à la fois de diffusion simple et de diffusion multiple, avec une prédominance de diffusion simple (la longueur d'aller-retour dans l'échantillon étant bien inférieure à  $\ell_s$ ).

Le rayonnement d'un fil de nylon dans l'eau a été étudié par Minonzio *et al.* [9]. Il rappelle que la pression diffusée par un cylindre élastique lorsqu'une onde plane est incidente peut être décomposée sur les modes normaux (monopôle, dipôle, etc.) de la façon suivante :

$$\Psi_d(r, \theta) = (\Psi_0 \exp(-i\omega t)) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n R_n \mathcal{H}_n^{(1)}(k_0 r) \cos(n\theta), \quad (3.21)$$

avec  $\theta$  l'angle entre la direction d'observation et l'onde incidente,  $\epsilon_n$  le coefficient de Neumann pour l'ordre  $n$  ( $\epsilon_0 = 1$  et  $\epsilon_n=2$  sinon) et  $R_n$  le coefficient de diffusion du mode normal  $n$ . Les coefficients  $R_n$  sont des expressions complexes issues des conditions aux limites entre le cylindre et le milieu environnant. Ils prennent en compte les ondes longitudinales et transverses et font intervenir le rayon du cylindre, sa densité et les vitesses longitudinales et transverses.

Les premiers coefficients de diffusion pondérés du coefficient de Neumann  $\epsilon_n$  sont tracés Fig.3.16 en fonction de la fréquence. Pour avoir une diffusion isotrope comme dans la simulation, il est souhaitable de considérer des fréquences inférieures à celle de la résonance quadripolaire ce qui correspond à  $k_0 a < 0.5$  (fréquences inférieures à 1.5 MHz). Néanmoins, comme la section efficace de diffusion diminue largement avec la fréquence, nous avons choisi de nous placer à des fréquences de 1.3 à 1.7 MHz pour conserver de la diffusion multiple dans les signaux; seul le coefficient monopolaire de l'équation 3.21 sera considéré.

La sonde utilisée est présentée dans la première colonne de la table 1.1. Pour mesurer les réponses inter-éléments, l'excitation est une rampe linéaire en fréquence (chirp) variant de 0.5 à 2.5 MHz. Une électronique multi-voies Lecoœur est utilisée pour émettre les signaux

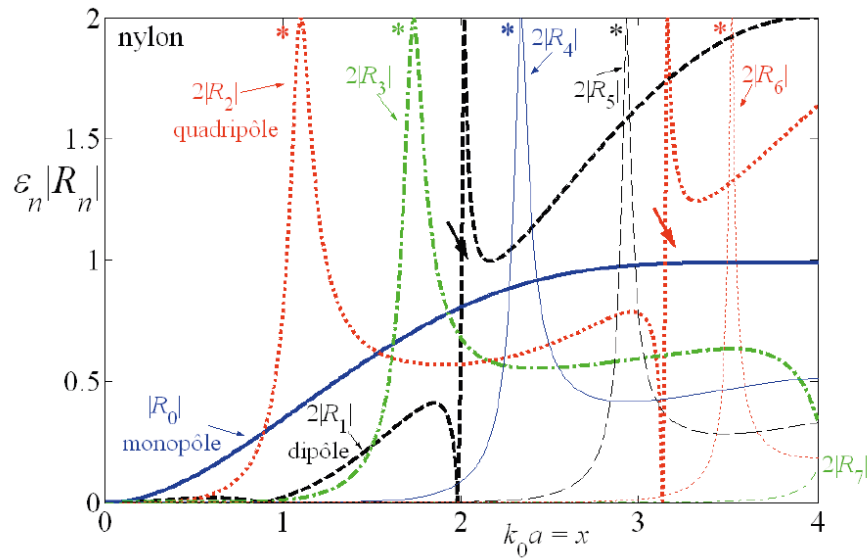


FIGURE 3.16 – Poids des coefficients de diffusion d'un fil de nylon pour les premiers modes normaux, issu de [9].

sur les 64 éléments et les enregistrer (échantillonnage à 20 MHz). La face avant du milieu est placée à 14 cm de la sonde. Les estimateurs de la proportion de diffusion simple sont calculés dans cette configuration et les résultats sont présentés Fig. 3.17 pour les fréquences 1.3, 1.5 et 1.7 MHz et une fenêtre temporelle de 10  $\mu$ s. Pour ces trois fréquences, la proportion de diffusion simple décroît avec la profondeur, ce qui est cohérent avec les résultats de la simulation. De plus, la pente des courbes augmente avec la fréquence, ce qui s'explique bien par l'augmentation du coefficient de  $|R_0|$  avec la fréquence (cf. Fig. 3.16).

Nous avons observé dans les simulations (cf. section 3.1.5) que l'inverse de la pente des courbes est comparable au libre parcours moyen de diffusion  $\ell_s$  (cf. Fig. 3.8). Dans cette expérience, nous trouvons des pentes d'inverses égales à 1.3, 0.64 et 0.37 m pour les fréquences 1.3, 1.5 et 1.7 MHz respectivement. Le calcul de la section efficace des fils de nylon en ne tenant compte que du terme monopolaire nous donne comme valeurs de  $\ell_s$  2.0, 1.4 et 1.0 m, ce qui est du bon ordre de grandeur. Le poids du dipôle et du quadripôle, non pris en compte dans le calcul de la section efficace de diffusion et donc de  $\ell_s$ , augmente avec la fréquence ce qui pourrait expliquer l'écart entre l'expérience et la théorie; ce point mériterait plus de temps pour être approfondi.

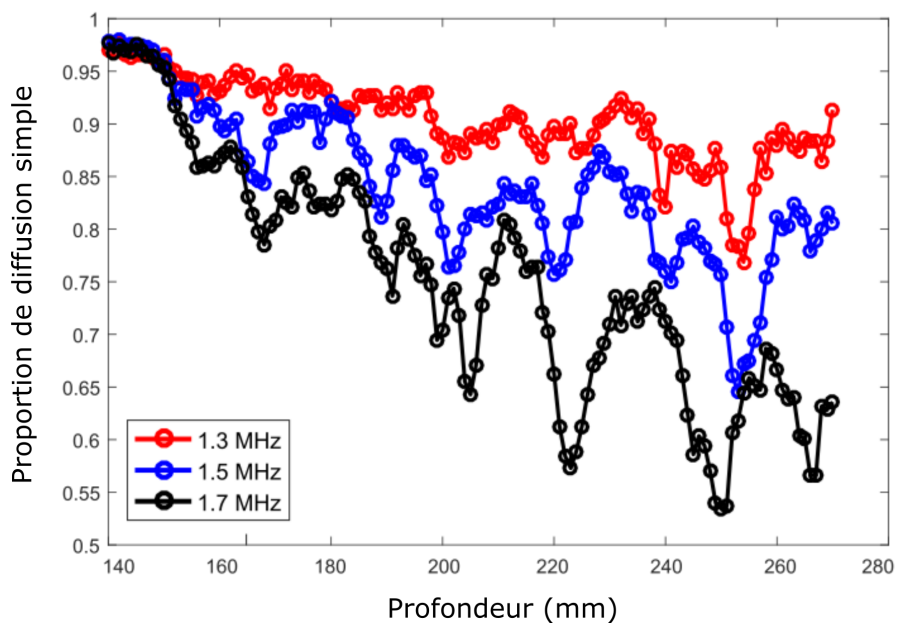


FIGURE 3.17 – Proportion de diffusion simple calculée à partir des mesures sur la forêt de fils de nylon à 1.3, 1.5 et 1.7 MHz avec une sonde de 64 éléments (pas inter-éléments de 0.5 mm).

### 3.3.2 Billettes de titane

Le alliages de titane ayant une microstructure très complexe (voir chapitre 1), aucune comparaison avec la simulation numérique précédente ne sera réalisée. Il est tout de même possible d'appliquer les techniques précédentes pour obtenir une estimation de la proportion de diffusion simple et en déduire le risque d'artefacts dus à la diffusion multiple.

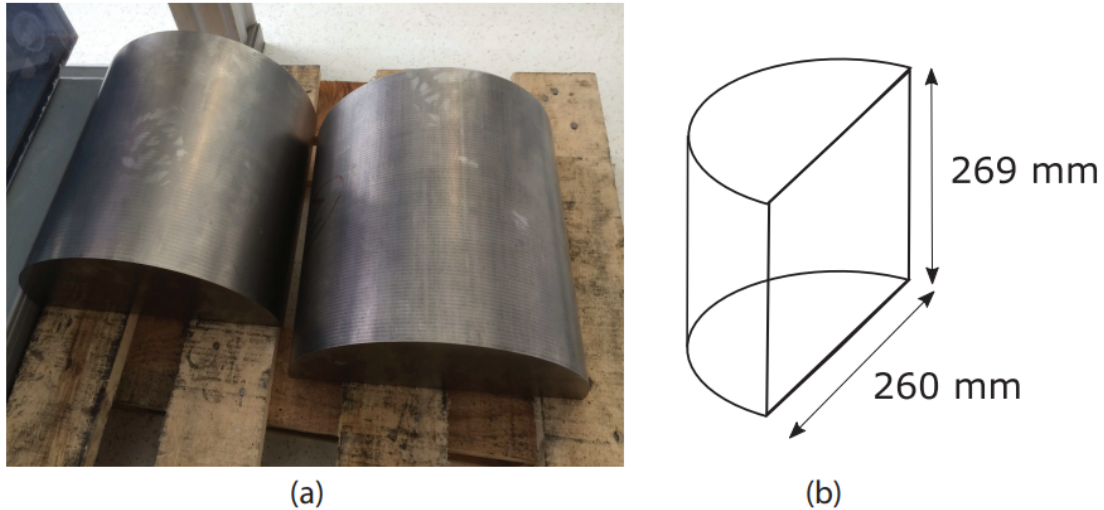


FIGURE 3.18 – (a) Photographie des deux demi-billettes (reprises de la thèse de Baelde *et al.* [2]), (b) schéma des billettes.

L'acquisition de la matrice de réflexion est réalisée avec une sonde linéaire en contact sur les demi-billettes de TA6V et Ti17 de rayon 13 cm (cf. Fig. 3.18), l'axe de la sonde étant aligné avec l'axe de la billette. La sonde utilisée pour les acquisitions est présentée dans la seconde colonne de la table 1.1 du chapitre 1 ; le signal émis est un sinus à 3 MHz de durée 2  $\mu$ s (environ 5 périodes de signal). Les signaux reçus sont échantillonnés à 20 MHz. L'ensemble des 64 signaux temporels reçus pour l'émission de l'élément central est présenté Fig. 3.19 pour la billette de Ti17, le temps de début d'acquisition correspondant au temps d'émission. Un fenêtrage temporel de 5  $\mu$ s est appliqué pour calculer les grandeurs en fonction de la profondeur ; la fenêtre temporelle est plus courte que celle utilisée dans l'eau car la vitesse dans le titane est 4 fois supérieure. Contrairement aux signaux mesurés dans les fils de nylon ou calculés dans la simulation, les premières microsecondes sont polluées par les ondes guidées se propageant à l'interface sonde/titane. Ainsi, la proportion de diffusion simple ne peut être calculée qu'à partir de 15  $\mu$ s, soit environ 4.5 cm de profondeur.

La simulation numérique est utilisée pour tester la fiabilité des estimateurs aux profondeurs étudiées dans les alliages de titane ( $c_0 = 6100$  m/s) pour un signal de bande passante de 2.5 à 3.5 MHz. Pour cela, il est nécessaire de vérifier que  $\mathbf{K}_c$  se projette bien dans l'ETDC (cf. section 3.1.2). La figure 3.20 présente le rapport des carrés des normes de la matrice de diffusion confocale projetée et de la matrice de diffusion confocale, pour des sondes de 32 et 64 éléments. Dans la configuration expérimentale, le rapport du carré des normes de la matrice confocale filtrée et de la matrice confocale est comprise en 0.6 et 0.95 pour une sonde de 64 éléments ce qui signifie que l'approximation paraxiale n'est pas respectée. En utilisant une

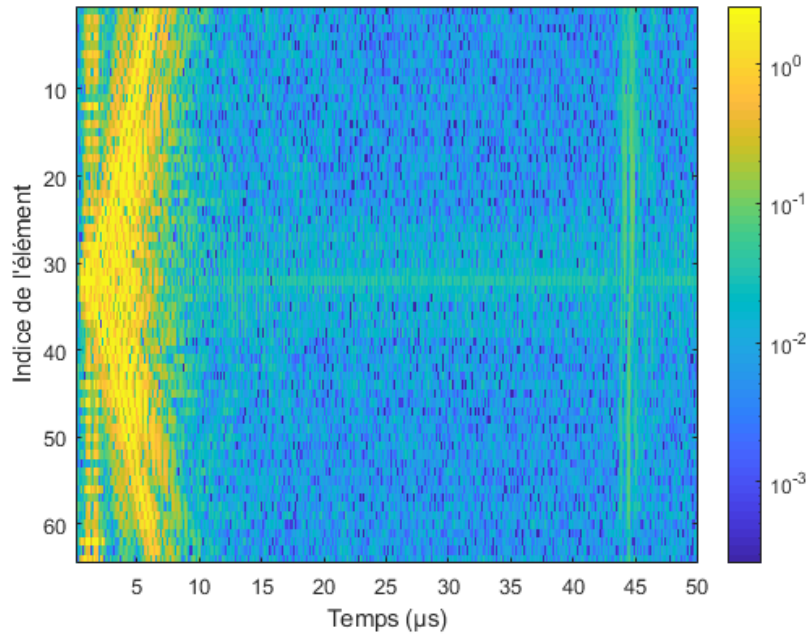


FIGURE 3.19 – Signaux reçus par les éléments de la sonde lors du tir de l'élément central dans un billette de Ti17 (échelle logarithmique). L'écho de fond est visible autour du temps 43  $\mu\text{s}$  soit 13.1 cm de profondeur.

sous-ouverture de 32 éléments, l'approximation paraxiale est vérifiée pour des profondeurs plus faibles : la figure 3.20 illustre le fait que la matrice de diffusion confocale se trouve bien dans l'ETDC à partir de la profondeur de 4 cm environ (courbe bleue).

Les estimateurs de proportion de diffusion simple dans la base canonique sont tracés Fig. 3.21 et 3.22 pour les billettes de TA6V et Ti17 en utilisant 32 émetteurs et récepteurs et une fenêtre temporelle de 5  $\mu\text{s}$ . Les faibles valeurs attestent de la présence de diffusion multiple et sont en accord avec les mesures du pic de rétrodiffusion cohérente présentées Fig. 2.4 et 2.5. Les estimateurs augmentent brutalement vers la profondeur 12 cm, ce qui correspond au fond des billettes; cet écho est visible dans les signaux comme de la diffusion simple.

Avant l'écho de fond, la pente obtenue pour le Ti17 est d'environ  $0.04 \text{ cm}^{-1}$ . Son inverse donnerait un libre parcours moyen de diffusion de l'ordre de 25 cm et une atténuation  $\alpha = 1/2\ell_s \approx 0.02 \text{ Neper/cm}$ . Cette valeur est à comparer aux valeurs d'atténuation du titane que l'on peut trouver dans la littérature. Celles-ci varient beaucoup selon la fréquence, le type d'alliage et selon la direction de propagation lorsque la microstructure est anisotrope. Toutefois, la valeur que nous trouvons est en bon accord avec celle mesurée par Panetta *et al.* dans le Ti17 à 3 MHz [10]. Pour le TA6V, il n'y a pas de pente unique et nous ne pouvons conclure sur le libre parcours moyen. Ceci peut être dû à une variation dans la microstructure, mais cette hypothèse n'a pas été explorée.

L'intérêt du nouvel estimateur  $\hat{\rho}_{corr}$  défini Eq.3.17 est également mis en avant dans ces mesures où le niveau de diffusion simple est beaucoup plus faible qu'en simulation : l'écart entre  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\rho}_{corr}$  rend compte du biais lié à la projection de la diffusion multiple dans l'ETDC.

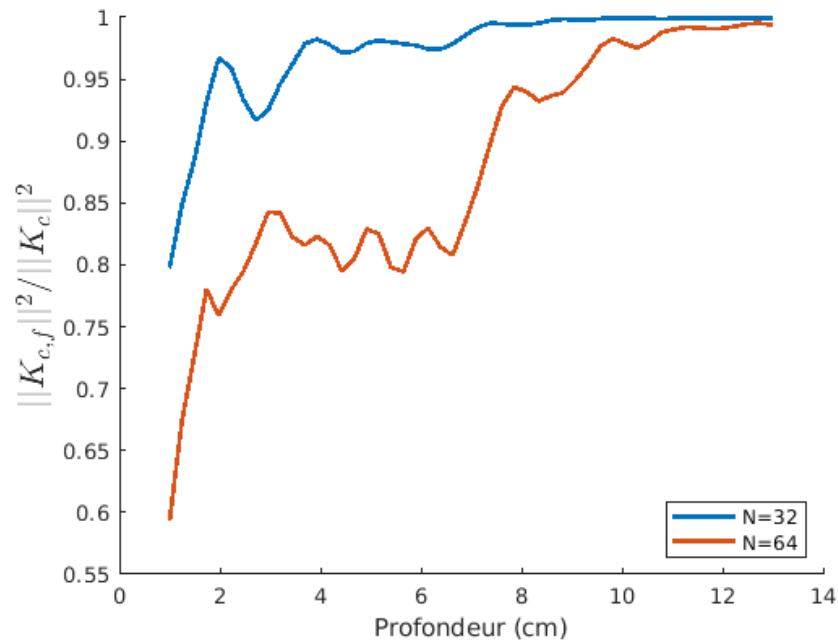


FIGURE 3.20 – Rapport des carrés des normes de la matrice confocale filtrée et de la matrice confocale pour la configuration utilisée dans les alliages de titane pour une sonde de 32 et 64 éléments.

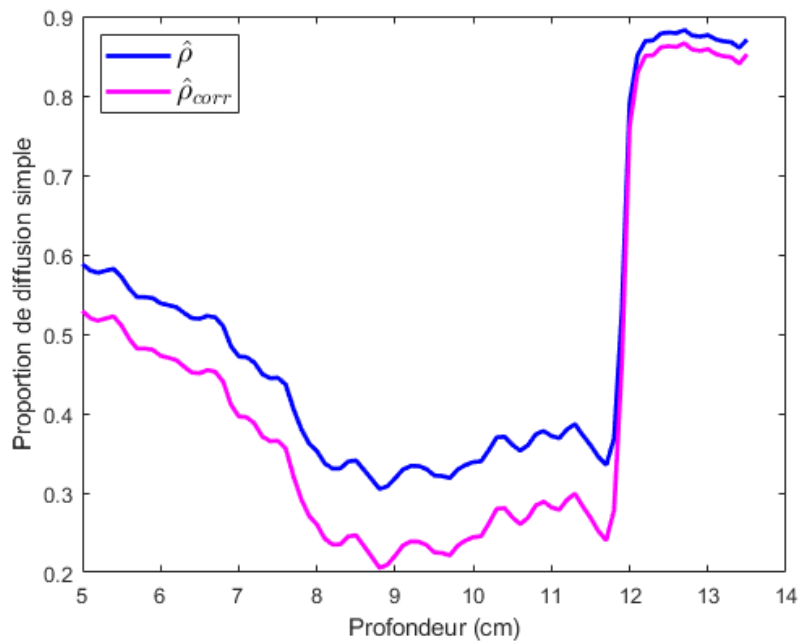


FIGURE 3.21 – Estimateurs de la proportion de diffusion simple  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\rho}_{corr}$  mesurées dans la billette de TA6V.

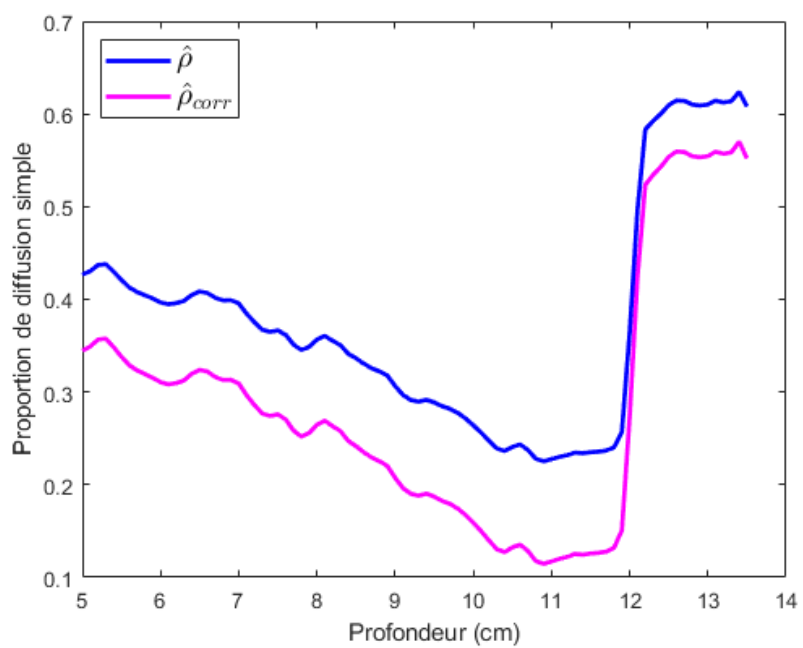


FIGURE 3.22 – Estimateurs de la proportion de diffusion simple  $\hat{\rho}$  et  $\hat{\rho}_{corr}$  mesurées dans la billette de Ti17.

### 3.4 Cohérence spatiale du champ rétrodiffusé

Un autre indicateur du niveau de diffusion simple dans le milieu peut être obtenu en étudiant la corrélation spatiale des signaux rétrodiffusés en deux éléments quelconques de la barrette, en fonction de la distance  $\Delta u$  séparant ces deux éléments récepteurs. Le théorème de Van Cittert-Zernike nous permet d'affirmer que pour une ouverture émettrice de taille  $A$ , le degré de corrélation entre les signaux rétrodiffusés, est  $1 - |\Delta u|/A$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- ▶ le champ est focalisé en émission et les signaux sont considérés en réception dans une fenêtre temporelle correspondant à la zone focale ;
- ▶ les diffuseurs sont petits devant la longueur d'onde et sans corrélation de position, ce qui revient à considérer  $\mu(\mathbf{r})$  comme un bruit blanc spatial ;
- ▶ il ne doit y avoir ni aberration, ni diffusion multiple. Si tel n'est pas le cas, la corrélation chute plus rapidement avec  $\Delta u$  que ce que prévoit le théorème de Van Cittert-Zernike.

Dans ce cas, la cohérence spatiale du champ rétrodiffusé en régime de diffusion simple peut être vue comme la transformée de Fourier du module au carré de la tache focale.

Derode *et al.* [11] ont vérifié ce théorème en acoustique et l'ont étendu à l'étude de milieux pour lesquels  $\mu(\mathbf{r})$  n'est pas un bruit blanc mais présente une longueur de corrélation comparable ou supérieure à la taille de la tache focale. Le degré de corrélation est alors supérieur à la fonction triangulaire  $1 - \Delta u/A$ . C'est évidemment ce qui se passe dans le cas d'un miroir parfait (les signaux rétrodiffusés sont alors tous identiques et la corrélation est constante égale à 1), mais aussi le cas d'un milieu composite unidirectionnel dont les fibres présentent une direction privilégiée : dans ce cas, selon l'orientation de la sonde par rapport au fibrage, un degré de corrélation plus ou moins élevé est obtenu. Papadacci *et al.* [12] ont utilisé cet effet pour cartographier la direction de fibres dans les tissus biologiques anisotropes.

Le forme de la fonction de cohérence spatiale peut également être exploitée pour mettre en évidence l'existence d'aberrations ou de diffusion multiple. Pinton *et al.* [13] l'ont étudié dans des tissus biologiques et en simulation ; Imbault *et al.* [14] ont calculé la fonction de cohérence dans un milieu biologique pour plusieurs vitesses de l'onde et en déduisent la vitesse réelle en maximisant la corrélation des signaux rétrodiffusés. L'étude de la perte de cohérence spatiale engendrée par la diffusion multiple est un sujet moins commun. Baelde *et al.* [2] ont proposé une simulation par différences finies pour étudier cette grandeur en fonction de  $\ell_s$  ; la simulation numérique présentée au chapitre 2 constitue également un outil d'étude de l'impact de la diffusion multiple sur la cohérence spatiale.

#### 3.4.1 Calcul de la corrélation spatiale du champ

La corrélation spatiale du champ est mesurée de la manière suivante : à partir de la matrice de réflexion dans la base canonique, une focalisation en émission est appliquée et les signaux sont redressés en réception pour compenser les temps de vol des éléments de la sonde au point focal choisi. La matrice de réflexion est calculée à chaque ordre de diffusion pour une barrette de 32 éléments ( $A = 1.6$  cm) et un milieu diffusant de largeur  $B = 15$  cm. Les focalisations en émission sont ensuite calculées pour 25 points du milieu diffusant situés autour de  $x = 0$  cm et  $z = 24.2$  cm ( $x$  variant de  $-4$  mm à  $4$  mm par pas de  $2$  mm et  $z$  variant de



23.8 cm à 24.6 cm par pas de 2 mm). Bien sûr, la focalisation n'est pas correcte en présence de diffusion multiple et la tache focale attendue est plus large que la largeur caractéristique  $\Delta x = \lambda z/A$  à la profondeur  $z$ . Les signaux sont ensuite redressés avec la même loi de retard géométrique que celle utilisée pour la focalisation. Les signaux redressés tracés Fig. 3.23 sont issus des matrices  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}^{(3)}$  pour le point central de focalisation et une fenêtre temporelle  $\Delta T$  de 5  $\mu\text{s}$ . La perte de cohérence due à la diffusion multiple est bien visible sur les figures 3.23(b) et (c).

Notons  $S(i, t)$  le signal reçu par l'élément  $i$  de la sonde après focalisation et redressage des signaux en réception. La corrélation spatiale  $C$  en fonction de la distance le long de la barrette  $m$  est ensuite calculée de la manière suivante :

$$C(m) = \frac{N}{N-m} \frac{\sum_{i=1}^{N-m} c(i, i+m)}{\sum_{i=1}^N c(i, i)}, \quad (3.22)$$

avec  $c(i, j) = \sum_{\Delta T} (S(i, t) - \langle S(i, t) \rangle_t)(S(j, t) - \langle S(j, t) \rangle_t)$ .

Cette grandeur est moyennée sur les 25 points de focalisation. Les courbes de corrélation spatiale sont tracées Fig. 3.24 en fonction de  $\Delta u = mp$  (avec  $p$  le pas inter-élément de la sonde) pour la matrice totale  $\mathbf{K}$ , celle de diffusion simple  $\mathbf{K}^{(1)}$  et les 3 premiers ordres de diffusion multiple.

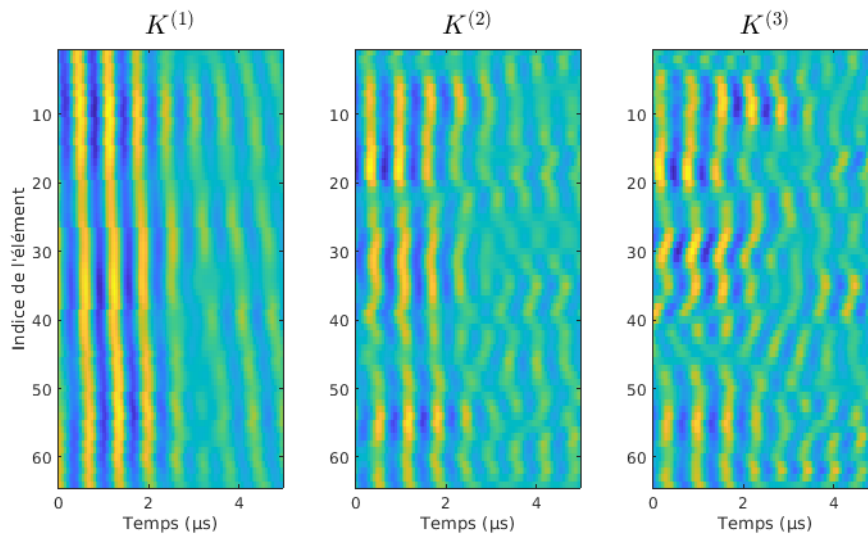


FIGURE 3.23 – Signaux rétrodiffusés pour une focalisation en ( $x = 0$  mm,  $z = 24.6$ mm) recalés temporellement pour les matrices  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}^{(3)}$ .

La corrélation obtenue pour les matrices de diffusion multiple est toujours inférieure à celle obtenue pour la diffusion simple, ce qui est cohérent avec le fait que la tache focale est plus large (résolution dégradée en présence de diffusion multiple). Pour les matrices  $\mathbf{K}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}^{(3)}$ , qui contiennent de la diffusion récurrente, la corrélation diminue avec l'ordre de diffusion.

Étudions à présent la corrélation spatiale des matrices apparentes, pour lesquels les signaux redressés sont présentés Fig. 3.25. Comme attendu, les corrélations chutent beaucoup plus

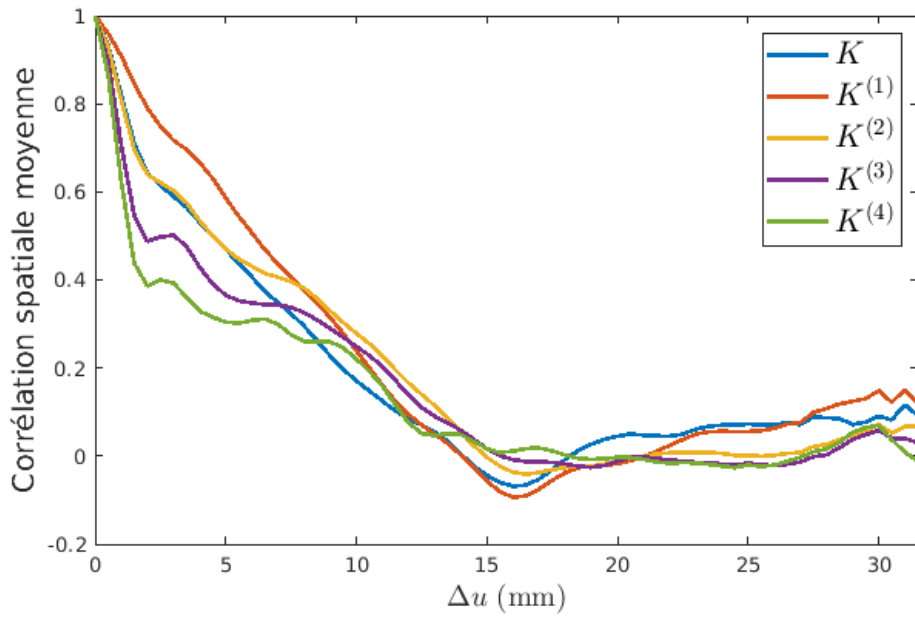


FIGURE 3.24 – Corrélation spatiale moyenne des matrices de diffusion totale, simple et des 3 premiers ordres de diffusion multiple.

rapidement pour les matrices  $\mathbf{K}_{m \setminus r}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}_{m \setminus r}^{(3)}$  car elles sont quasiment aléatoires. De plus, la figure 3.26 indique que toutes les matrices de diffusion multiple apparente possèdent une courbe de corrélation identique : cela signifie donc que la corrélation pour les matrices de diffusion multiple apparente ne dépend pas de l'ordre de diffusion. La largeur caractéristique de décorrélacion dans l'exemple présenté est de l'ordre de 1.5 mm. Cette grandeur sera discutée en lien avec le calcul théorique présenté dans la section suivante.

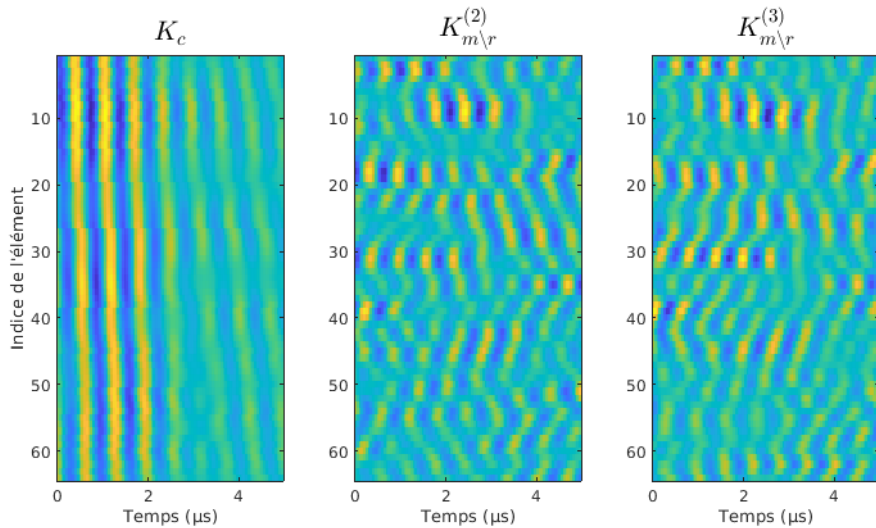


FIGURE 3.25 – Signaux rétrodiffusés recalés temporellement  $\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{K}_{m \setminus r}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}_{m \setminus r}^{(3)}$ .

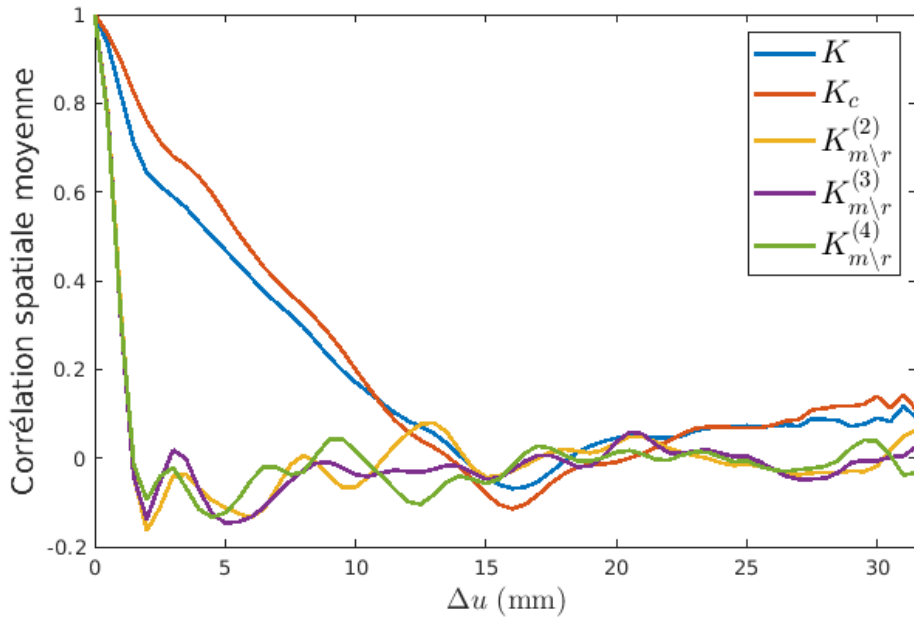


FIGURE 3.26 – Corrélation spatiale moyenne des matrices de diffusion totale, confocale et des 3 premiers ordres de diffusion multiple apparente.

### 3.4.2 Lien avec la base focalisée

Établissons l'expression de la matrice étudiée par rapport aux matrices calculées précédemment. La matrice dans la base canonique  $K(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$  est focalisée en émission en un point  $\mathbf{r}_{in}$ ; en réception, des délais sont appliqués pour compenser le retard liés aux chemins plus longs :

$$D(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) = \sum_{\mathbf{u}_i} G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_i) K(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j). \quad (3.23)$$

Cette matrice, appelée matrice distorsion [15, 16] a été introduite pour étudier les aberrations du milieu telles qu'une variation de la vitesse du son. Elle a toutefois été peu exploitée pour étudier les effets de la diffusion multiple sur la focalisation.

Les courbes de corrélation obtenues Fig. 3.24 et 3.25 peuvent être calculées à partir de la matrice distorsion :

$$C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) = \langle D(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) D(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j')^* \rangle, \quad (3.24)$$

avec  $\Delta u = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_j'$ .

#### Milieu simplement diffusant

Dans le cas d'un milieu simplement diffusant,  $K(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = K^{(1)}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$  et d'après les équations (2.12) et (3.23), les coefficients de la matrice  $\mathbf{D}$  peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) &= G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) k_0^2 \int d\mathbf{r}_s \sum_{\mathbf{u}_i} G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_i) G_0(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_s) \mu(\mathbf{r}_s) G_0(\mathbf{u}_j, \mathbf{r}_s) \\ &= G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) k_0^2 \int d\mathbf{r}_s H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_s) \mu(\mathbf{r}_s) G_0(\mathbf{u}_j, \mathbf{r}_s), \end{aligned} \quad (3.25)$$

avec  $H_{in}$  la fonction d'étalement du point (*Point Spread Function*, PSF) en émission, qui est fonction de  $\mathbf{r}_{in} - \mathbf{r}_s$ .

Le milieu étant supposé aléatoire et totalement décorrélé, le potentiel de désordre  $\mu$  satisfait à l'équation suivante :

$$\langle \mu(\mathbf{r}_s) \mu^*(\mathbf{r}'_s) \rangle \propto \langle |\mu| \rangle^2 \delta(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s). \quad (3.26)$$

Ainsi, remplaçant  $\mathbf{G}_0$  par son expression en champ lointain, on obtient :

$$C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) \propto \exp\left(-ik_0\left(|\mathbf{r}_{in} - \mathbf{u}_j| - |\mathbf{r}_{in} - \mathbf{u}'_j|\right)\right) k_0^2 \langle |\mu| \rangle^2 \int |H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_s)|^2 \exp\left(ik_0\left(|\mathbf{r}_s - \mathbf{u}_j| - |\mathbf{r}_s - \mathbf{u}'_j|\right)\right) d\mathbf{r}_s. \quad (3.27)$$

Appliquons un fenêtrage temporel autour du temps correspondant à la zone focale ; l'équation précédente se simplifie alors avec  $z_s = z_{in} = z$ . Les termes de phases peuvent être développées au premier ordre :

$$C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) \propto \int |H_{in}(x_s - x_{in})|^2 \exp\left(\frac{ik_0(\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}_j)}{z}(x_s - x_{in})\right) dx_s, \quad (3.28)$$

ce qui représente la transformée de Fourier du module carré de la tache focale en émission, considérée à la fréquence spatiale  $(\mathbf{u}'_j - \mathbf{u}_j)/\lambda z$ . Cette équation est bien l'expression du théorème de Van Cittert-Zernike. En régime de diffusion simple, la tache focale étant un sinus cardinal de largeur  $\lambda z/A$  avec  $A$  la largeur de l'ouverture utilisée pour focaliser, la corrélation le long de la barrette est un triangle de largeur  $2A$ . Dans notre configuration,  $A = 16$  mm : cette fonction est bien retrouvée pour la courbe de  $\mathbf{K}^{(1)}$  Fig. 3.24.

### Milieu multiplement diffusant

Le but de cette sous-section est d'expliquer la forme des courbes de diffusion multiple apparente de la figure 3.26. Le calcul complet pour les courbes de diffusion multiple Fig. 3.24 n'est pas réalisé, les termes de diffusion récurrente étant mis de côté dans nos expressions.

Dans le cas d'un milieu multiplement diffusant, les coefficients de la matrice  $\mathbf{D}$  peuvent s'écrire :

$$D(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) = G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) k_0^4 \iint H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mu(\mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (3.29)$$

avec  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  les premier et dernier diffuseurs de la séquence de diffusion et  $\mathbf{G}$  la fonction de Green totale entre ces deux diffuseurs.

Le calcul de  $C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u)$  est similaire à celui effectué à la section 2.3.2, dont le résultat est rappelé ici : il fait apparaître l'intensité moyenne de l'interférence entre deux ondes voyageant par deux chemins, l'un débutant en  $\mathbf{r}_1$  et se terminant en  $\mathbf{r}_2$ , le second débutant en  $\mathbf{r}'_1$  et se terminant en  $\mathbf{r}'_2$ . Les seuls chemins qui résistent à la moyenne sont les chemins identiques ( $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$  et  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_2$ ) et les chemins réciproques ( $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1$  et  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2$ ). De plus, en négligeant les boucles de diffusion,  $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  est une grandeur indépendante de  $\mu(\mathbf{r}_1)$  et de  $\mu(\mathbf{r}_2)$ . Ainsi,  $C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u)$  sera composé de la somme de deux termes, correspondant aux Dirac de la corrélation moyenne de  $\mu$ .

Le premier terme de  $C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u)$ , lié aux chemins identiques, s'écrit :

$$C_1(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) \propto G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) G_0(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}'_j) \iint |H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1)|^2 \langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) G_0^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}'_j) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (3.30)$$

L'expression générale de  $\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle$  est complexe et peu exploitable dans un calcul analytique simple; une expression asymptotique en régime diffusif et aux temps longs est donnée par Margerin *et al.* [17] à 3D :

$$\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle \propto 1 + \frac{\sin(k_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)}{(k_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)^2} \exp(-|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|/\ell_s) \quad (3.31)$$

Dans le cas 2D et lorsque la décroissance exponentielle peut être négligée,

$$\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle \propto 1 + J_0^2(k_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|), \quad (3.32)$$

avec  $J_0$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

Si  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  ne se pas trouvent dans la même cellule de résolution, alors  $J_0^2(k_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$  est nul. Le terme correspondant dans l'intégrale (3.30) s'apparente donc à de la diffusion récurrente : il ne sera pas pris en compte dans notre calcul, qui ne considère que les matrices de diffusion multiple apparente. Par introduction du terme indépendant de  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  de  $\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle$  dans l'équation (3.30), on obtient :

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) &\propto G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) G_0(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}'_j) \iint |H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1)|^2 G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) G_0^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}'_j) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \\ &\propto G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) G_0(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}'_j) \int |H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1 \int G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) G_0^*(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}'_j) d\mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

En champ lointain et en considérant un fenêtrage temporel tel quel  $z_{in} = z_2 = z$ , on obtient :

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) &\propto \int |H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1 \int_{-B/2}^{B/2} dx_2 \exp\left(\frac{ik_0}{z} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}'_j)(x_{in} - x_2)\right) \\ &\propto \text{sinc}\left(\frac{k_0 \Delta u B}{2z}\right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec  $B$  la largeur du milieu. Ainsi, la contribution non-récurrente des chemins identiques est un sinus cardinal de largeur  $\lambda z/B$ .

Le second terme de  $C(\mathbf{r}_{in}, \Delta u)$ , lié aux chemins réciproques, s'écrit :

$$C_2(\mathbf{r}_{in}, \Delta u) \propto G_0^*(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}_j) G_0(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{u}'_j) \iint |G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1) H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_2)^* G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{u}_j) G_0^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{u}'_j) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (3.35)$$

Cette fonction est non nulle seulement si  $H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_1)$  et  $H_{in}(\mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_2)$  sont non nuls, ce qui signifie que les points  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont tous les deux dans la tache focale : ce terme est une composante de la diffusion récurrente et est donc nul pour les matrices de diffusion multiple apparente.

Ainsi, le seul terme de diffusion multiple apparente est issu du terme constant de  $\langle |G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 \rangle$  pour les chemins identiques. Le calcul montre que la cohérence spatiale le long de la sonde a la forme d'un sinus cardinal de largeur inversement proportionnelle à la largeur du milieu diffusant. Ce résultat est vérifié sur les courbes de diffusion multiple apparente Fig. 3.26, pour lesquelles  $\lambda z/B \approx 1.6$  mm. La largeur de la fonction de corrélation calculée sur la diffusion multiple apparente est la plus faible possible compte tenu de la largeur du milieu. Dans un cas où cohabitent diffusion simple et diffusion multiple, la largeur de la fonction de corrélation est intermédiaire, comme illustré par la figure 3.24. Une étude plus poussée des termes liés à la diffusion récurrente pourrait permettre de définir un estimateur de la proportion de diffusion confocale grâce à cette courbe.

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre étudie le « poids de la diffusion simple » dans les signaux rétrodiffusés à l'aide de la simulation numérique. La première partie du chapitre montre tout d'abord que les estimateurs construits par Aubry *et al.* puis Baelde *et al.* renseignent sur la proportion de diffusion **confocale** et non simple; la diffusion récurrente ayant les mêmes propriétés que la diffusion simple, il est impossible de les séparer par ces méthodes. À l'aide des matrices introduites dans le chapitre 2, nous avons étudié l'espace de diffusion simple introduit par Baelde *et al.* Nous avons pu vérifier que cette espace contient également la diffusion récurrente et l'avons donc qualifié d'Espace Théorique de Diffusion Confocale (ETDC). Les matrices de diffusion apparente se projetant partiellement dans l'ETDC, nous avons évalué le biais induit sur l'estimateur de la proportion de diffusion confocale et proposé un estimateur corrigé pour le compenser.

Nous avons ensuite proposé un estimateur adapté aux matrices projetées dans la base focalisée. Cet estimateur qui fournit, en champ lointain, les mêmes résultats que le précédent, présente l'intérêt de bien fonctionner en champ proche. Il serait toutefois nécessaire de le tester de manière plus systématique et en particulier sur des données expérimentales.

Les estimateurs de la proportion de diffusion confocale ont été appliqués sur un milieu modèle : un échantillon de fils de nylon parallèles dont les propriétés sont proches de celles utilisées en simulation, étudiés à 3 fréquences. Les résultats concordent qualitativement, ce qui met en valeur le sens physique de la simulation implémentée. Les mêmes estimateurs ont été ensuite appliqués aux billettes de titane (TA6V et Ti17) à 3 MHz, révélant un niveau de diffusion multiple élevé. Ainsi, l'imagerie et la détection de défauts en profondeur n'est pas aisée et peut être faussée par la diffusion. Pour l'échantillon de fils de nylon comme pour les billettes en alliages de titane, un bon accord est obtenu entre la pente de l'estimateur de proportion de diffusion simple et l'inverse du libre parcours moyen de diffusion. Ce résultat, pour lequel nous n'avons pas d'explication théorique, reste toutefois à approfondir.

Enfin, la corrélation spatiale du champ rétrodiffusé est étudiée théoriquement et numériquement. Lorsque l'onde est focalisée en émission dans un milieu de réflectivité aléatoire, le théorème de Van Cittert-Zernike est retrouvé en utilisant l'expression de la matrice de diffusion simple; la courbe de cohérence spatiale obtenue est alors un triangle de largeur caractéristique égale à la taille de l'ouverture utilisée lors de la focalisation. En régime de

diffusion multiple, la focalisation est dégradée et la tache focale plus étendue; ainsi, la cohérence spatiale le long du réseau est plus faible. Ce résultat est démontré dans le cas limite où la diffusion récurrente peut être négligée : la courbe de corrélation est alors un sinus cardinal de largeur inversement proportionnelle à la largeur du milieu diffusant. Le cas de la diffusion multiple intégrant la diffusion récurrente est traité en simulation : la largeur de la courbe de corrélation est alors intermédiaire et décroît avec l'ordre de diffusion. Une étude théorique plus approfondie pourrait permettre de définir un estimateur local de la proportion de diffusion simple à partir de la courbe de cohérence spatiale de la matrice  $\mathbf{K}$ .

## Bibliographie

- [1] A. Aubry, *Approche Matricielle de l'opérateur de Propagation Des Ondes Ultrasonores En Milieu Diffusant Aléatoire*. PhD thesis, Université Paris VI, Sept. 2008. [78](#)
- [2] A. Baelde, *Propagation Des Ondes Ultrasonores Dans Les Alliages de Titane à Fort Fibrage : Cohérence Spatiale et Diffusion Multiple*. PhD thesis, Université Paris VI, Nov. 2017. [78](#), [81](#), [82](#), [99](#), [103](#)
- [3] A. Velichko, "Quantification of the Effect of Multiple Scattering on Array Imaging Performance," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 67, pp. 92–105, Jan. 2020. [78](#), [89](#), [90](#)
- [4] A. Baelde, J. Laurent, P. Millien, R. Coulette, W. B. Khalifa, F. Jenson, F. Sun, M. Fink, and C. Prada, "Effect of microstructural elongation on backscattered field : Intensity measurement and multiple scattering estimation with a linear transducer array," *Ultrasonics*, vol. 82, pp. 379–389, Jan. 2018. [79](#)
- [5] A. Aubry and A. Derode, "Multiple scattering of ultrasound in weakly inhomogeneous media : Application to human soft tissues," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 129, pp. 225–233, Jan. 2011. [82](#)
- [6] W. Lambert, L. A. Cobus, M. Couade, M. Fink, and A. Aubry, "Reflection Matrix Approach for Quantitative Imaging of Scattering Media," *Physical Review X*, vol. 10, p. 021048, June 2020. [89](#), [90](#)
- [7] A. Badon, D. Li, G. Lerosey, A. C. Boccara, M. Fink, and A. Aubry, "Smart optical coherence tomography for ultra-deep imaging through highly scattering media," *Science Advances*, vol. 2, p. e1600370, Nov. 2016. [89](#)
- [8] T. Blondel, J. Chaput, A. Derode, M. Campillo, and A. Aubry, "Matrix Approach of Seismic Imaging : Application to the Erebus Volcano, Antarctica," *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, vol. 123, pp. 10,936–10,950, Dec. 2018. [89](#)
- [9] J.-G. Minonzio, *Décomposition de l'opérateur de Retournement Temporel Appliquée à l'imagerie et à La Caractérisation Ultrasonore*. These de doctorat, Paris 7, 2006. [96](#), [97](#)
- [10] P. D. Panetta, F. J. Margetan, I. Yalda, and R. B. Thompson, "Observation and Interpretation of Microstructurally Induced Fluctuations of Back-Surface Signals and Ultrasonic Attenuation in Titanium Alloys," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Volume 16A* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, pp. 1547–1554, Boston, MA : Springer US, 1997. [100](#)
- [11] A. Derode and M. Fink, "Spatial coherence of ultrasonic speckle in composites," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Nov. 1993. [103](#)
- [12] C. Papadacci, M. Tanter, M. Pernot, and M. Fink, "Ultrasound backscatter tensor imaging (BTI) : Analysis of the spatial coherence of ultrasonic speckle in anisotropic soft



- tissues,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 61, pp. 986–996, June 2014. [103](#)
- [13] G. Pinton, G. Trahey, and J. Dahl, “Spatial coherence in human tissue : Implications for imaging and measurement,” *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 61, pp. 1976–1987, Dec. 2014. [103](#)
- [14] M. Imbault, A. Faccinnetto, B.-F. Osmanski, A. Tissier, T. Deffieux, J.-L. Gennisson, V. Vilgrain, and M. Tanter, “Robust sound speed estimation for ultrasound-based hepatic steatosis assessment,” vol. 62, pp. 3582–3598, Apr. 2017. [103](#)
- [15] W. Lambert, L. A. Cobus, T. Frappart, M. Fink, and A. Aubry, “Distortion matrix approach for ultrasound imaging of random scattering media,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 117, pp. 14645–14656, June 2020. [106](#)
- [16] H. Bendjador, T. Deffieux, and M. Tanter, “The SVD Beamformer : Physical Principles and Application to Ultrafast Adaptive Ultrasound,” *arXiv :1910.05795 [eess]*, Oct. 2019. [106](#)
- [17] L. Margerin, M. Campillo, and B. A. van Tiggelen, “Coherent backscattering of acoustic waves in the near field,” *Geophysical Journal International*, vol. 145, pp. 593–603, June 2001. [108](#)

# Chapitre 4

## Détermination locale de la direction du fibrage

### Sommaire

---

<b>4.1 État de l'art</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>4.2 Algorithme de détermination de la direction du fibrage par mesure de l'intensité rétrodiffusée</b> . . . . .	<b>117</b>
4.2.1 Théorie . . . . .	117
4.2.2 Algorithme proposé pour une sonde 2D . . . . .	119
<b>4.3 Simulation numérique de la matrice de réflexion en milieu anisotrope</b> . . . . .	<b>120</b>
4.3.1 Paramètres de la simulation . . . . .	120
4.3.2 Résultats de la simulation . . . . .	121
<b>4.4 Résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>123</b>
4.4.1 Billette d'alliages de titane . . . . .	123
4.4.2 Fils de nylon . . . . .	123
<b>4.5 Effet de la diffusion multiple sur les mesures d'anisotropie</b> . . . . .	<b>125</b>
4.5.1 Effet dans le plan $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$ . . . . .	125
4.5.2 Manifestation de la diffusion multiple dans le plan $\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}$ . . . . .	127
<b>4.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>130</b>
<b>Références bibliographiques</b> . . . . .	<b>132</b>

---

Les pièces en alliages de titane peuvent présenter un fibrage, c'est-à-dire un ensemble de grains allongés selon une direction privilégiée (cf. Fig. 4.1). Aujourd'hui, aucune méthode non-destructive industrielle efficace n'est utilisée pour déterminer l'orientation du fibrage des pièces composées de matériaux polycristallins. Pourtant, les plans d'inspection par ultrasons des pièces pré-usinées sont déterminées par rapport au fibrage : les tirs sont étudiés pour être perpendiculaires à la direction d'élongation des grains, qui est également la direction dans laquelle les fissures apparaissent le plus souvent. Les opérateurs se basent sur des simulations du fibrage qui prennent en compte les procédés de forge et des contraintes mécaniques. Cependant, lorsque des dérives se produisent dans les procédés métallurgiques, il arrive que le fibrage réel ne corresponde pas au fibrage simulé. Or, une mauvaise connaissance du fibrage peut diminuer la qualité de l'inspection et la probabilité de détection de défauts; c'est pourquoi une méthode ultrasonore pour cartographier le fibrage en profondeur est recherchée.

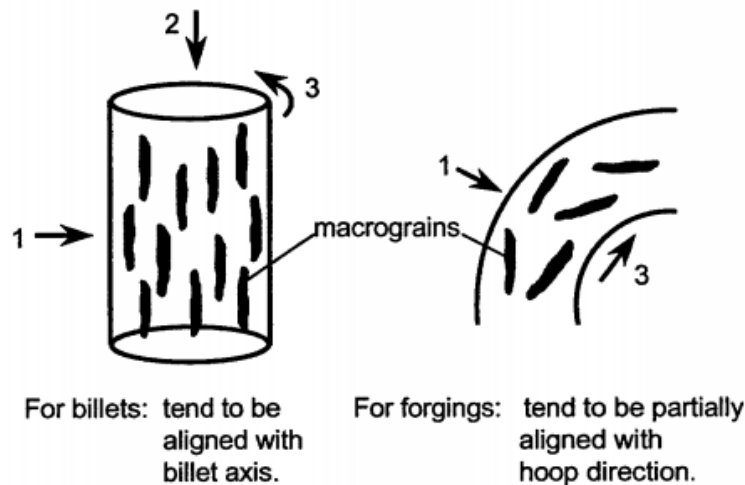


FIGURE 4.1 – Illustration de la direction privilégiée des grains dans une billette et une pièce forgée, issue de [1].

Ce chapitre présente tout d'abord un résumé des techniques ultrasonores exposées dans la littérature pour trouver la direction d'élongation de fibres (composites, musculaires, cardiaques...). Une nouvelle technique utilisant une sonde 2D est ensuite proposée et testée sur des données simulées. Elle est appliquée à des mesures effectuées sur la forêt de fils de nylon et les billettes d'alliages de titane présentées au chapitre 3. Enfin, cette thématique est associée à l'étude de la diffusion multiple pour déterminer la direction d'anisotropie dans un milieu multiplement diffusant.

## 4.1 État de l'art

Une technique de détermination de la direction des fibres dans un composite a été proposée par Derode *et al.* [2] (cf. section 3.4). Elle exploite la fonction de cohérence spatiale du signal rétrodiffusé obtenu grâce à une sonde multi-éléments en régime de diffusion simple.

En effet, le signal rétrodiffusé présente davantage de cohérence dans la direction des fibres que dans la direction perpendiculaire, ce qui permet de déterminer la direction des fibres en deux dimensions. Plus récemment, l'idée a été reprise en échographie par Papadacci *et al.* [3]. Ils ont développé une méthode d'Imagerie de Tenseur de Rétrodiffusion (ITR) (ou *Backscattered Tensor Imaging*, BTI) qui utilise une sonde 2D pour calculer la fonction de cohérence en deux dimensions. Ils parviennent notamment à déterminer l'orientation des fibres du cœur au cours d'un cycle cardiaque [4] (cf. Fig. 4.2). Pinton *et al.* [5] a utilisé une méthode similaire pour l'imagerie des tissus.

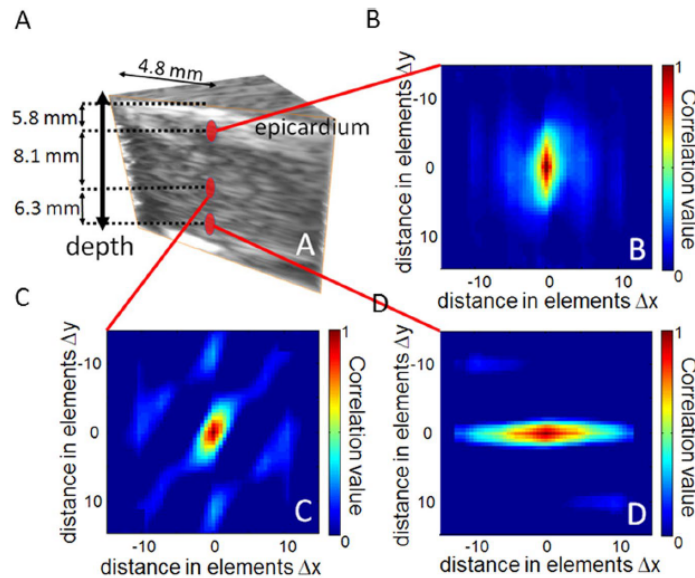


FIGURE 4.2 – (a) Image ultrasonore 3D d'un échantillon cardiaque, (b) à (d) fonctions de cohérence spatiale 2D calculées à 3 profondeurs différentes par la technique ITR, issu de [3]. La direction d'élongation de ces figures correspond à la direction locale du muscle à ces positions.

Bescond *et al.* [6] ont étudié expérimentalement l'intensité du signal rétrodiffusé par les alliages de titane. Ils montrent que celle-ci dépend de la microstructure, en particulier de la taille, la forme et la direction des macrozones. La figure 4.3 illustre le bruit RMS obtenu en différentes positions d'une pièce de titane, ainsi que deux exemples de signaux à 10 MHz correspondant aux zones de plus forts et plus faibles bruits. La rétrodiffusion par des grains allongés a également été étudiée théoriquement pour mieux comprendre l'influence de la direction d'élongation des grains sur la diffusion de l'onde acoustique [7–9].

Baelde *et al.* [10] ont démontré qu'il était possible d'identifier la direction du fibrage dans des alliages de titane en étudiant également l'intensité rétrodiffusée par la microstructure. En faisant tourner une sonde linéaire aux éléments rectangulaires sur une pièce en alliage de titane dont la microstructure est anisotrope, ils prouvent que l'intensité rétrodiffusée dépend de l'angle entre la direction d'alignement des éléments et celle du fibrage (cf. Fig. 4.4 à droite). En particulier, le maximum d'intensité rétrodiffusée est atteint lorsque la sonde est perpendiculaire au fibrage (réflexion spéculaire). Les résultats de Baelde sont présentés en Fig. 4.4 à gauche : ils montrent l'intensité rétrodiffusée en fonction de l'angle dans deux

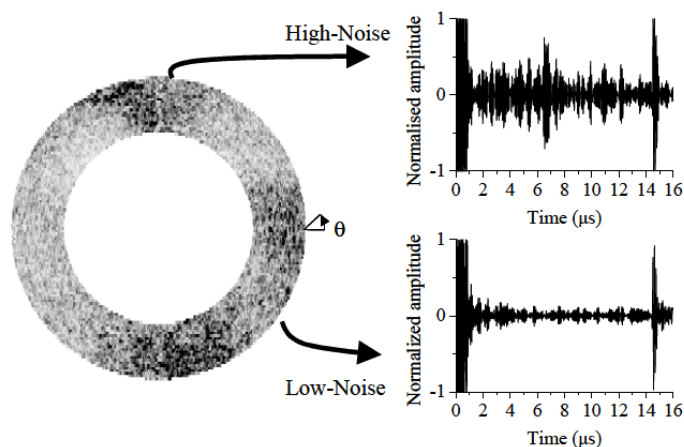


FIGURE 4.3 – Signal RMS et exemple des signaux sur une billette de titane, issu de [6].

billettes de TA6V et de Ti17 à 3.5 MHz. Comme attendu avec les micrographies et EBSD des pièces présentées sur la Fig. 1.4, le profil d'intensité dépend de la microstructure. La billette de TA6V, dont le fibrage est marqué, présente une forte variation de l'intensité avec l'angle, au contraire de la billette de Ti17 dont l'intensité ne présente pas de direction privilégiée.

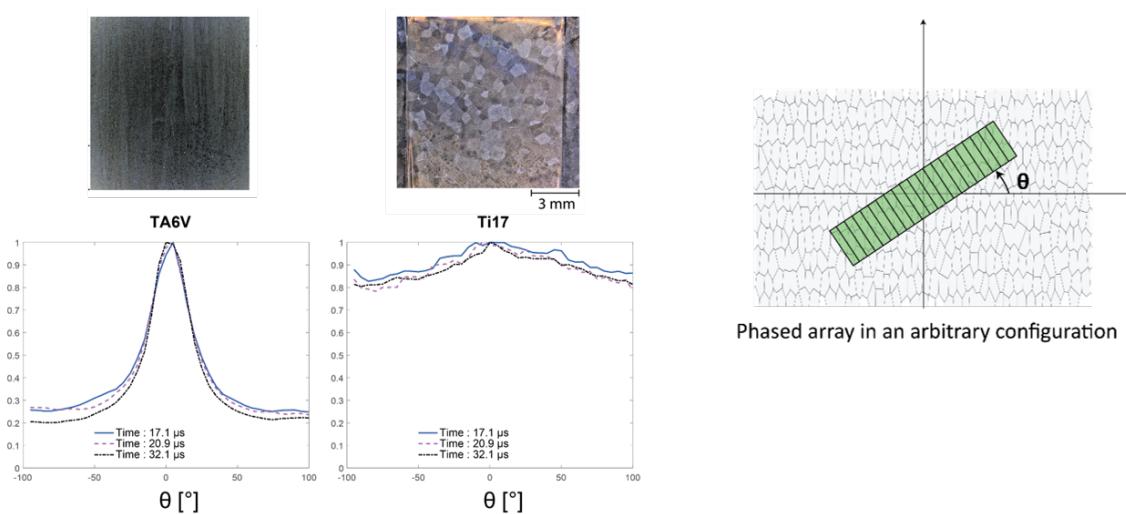


FIGURE 4.4 – Gauche : microstructure des alliages de titane et intensité rétrodiffusée en fonction de l'angle; droite : schéma de la sonde faisant un angle  $\theta$  avec la microstructure, issu de [10].

Rodriguez-Morales *et al.* [11] ont proposé une méthode d'imagerie 2D adaptée aux signaux issus de réflexions spéculaires. D'autres travaux utilisant des sondes de géométries moins classiques existent, comme ceux de Tokar *et al.* [12] qui ont utilisé une sonde composée de 8 transducteurs placés en un cercle de rayon 2.5 cm pour déterminer les directions d'anisotropie des tissus de la peau. Le point commun entre toutes ces techniques est qu'elles reposent sur un modèle de diffusion simple.

## 4.2 Algorithme de détermination de la direction du fibrage par mesure de l'intensité rétrodiffusée

La technique de mesure d'intensité rétrodiffusée est plus simple que l'ITR, car elle ne fait pas appel à des fonctions de corrélation mais simplement à une mesure d'intensité. Néanmoins, elle n'est pas applicable industriellement telle que proposée par Bescond *et al.* ou Baelde *et al.* à cause des nombreuses manipulations nécessaires pour tourner la sonde selon différents angles. De plus, il n'est possible de connaître la direction du fibrage que dans le plan de la sonde. Aussi, dans le cadre de ce travail, nous proposons d'utiliser une sonde 2D afin de déterminer la direction du fibrage en une seule acquisition de la matrice de réflexion dans la base des ondes planes. Cette idée n'étant pas proposée dans la littérature pour un métal polycristallin, elle a donné lieu au dépôt d'un brevet par SAFRAN.

### 4.2.1 Théorie

L'acquisition de la matrice des réponses inter-éléments dans la base d'ondes planes (présentée section 1.3.1) semble naturelle pour étudier la diffusion par un milieu de macrostructure anisotrope, puisqu'intrinsèquement sa réponse dépend de l'angle d'incidence. La technique consiste à émettre un ensemble d'ondes planes en émission ayant pour vecteurs d'onde  $\{\mathbf{k}_{\text{in}}\}$ , et à recevoir le signal suivant un ensemble d'ondes planes de vecteurs d'onde  $\{\mathbf{k}_{\text{out}}\}$ . Les modules de tous ces vecteurs d'onde sont égaux et valent  $k_0 = \omega/c_0$ . En champ lointain, la matrice de passage de la base canonique à la base d'ondes planes  $\mathbf{G}_{0,k}$  s'écrit (cf. Eq. (2.80)) :

$$\mathbf{G}_{0,k}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.1)$$

La formulation exacte du passage à la base d'ondes planes a été exposée pour l'imagerie dans le domaine de Fourier (*Wavenumber algorithm*) par Hunter *et al.* [13] à 2D et Merabet *et al.* [14] à 3D.

Ainsi, en champ lointain, la matrice de diffusion simple  $\mathbf{K}^{(1)}$  s'exprime comme la transformée de Fourier du potentiel de désordre prise en  $\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{\text{in}}, \mathbf{k}_{\text{out}}) &\propto \int d\mathbf{r}_1 \exp(i\mathbf{k}_{\text{in}} \cdot \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) \exp(i\mathbf{k}_{\text{out}} \cdot \mathbf{r}_1) \\ &\propto \int d\mathbf{r}_1 \exp(i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \cdot \mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour étudier cette matrice, un fenêtrage temporel est appliqué pour la profondeur  $z_0$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{\text{in}}, \mathbf{k}_{\text{out}}) &\propto \exp(i(k_{\text{in},z} + k_{\text{out},z})z_0) \int dx_1 dy_1 \exp(i(k_{\text{in},x} + k_{\text{out},x})x_1 + (k_{\text{in},y} + k_{\text{out},y})y_1) \mu(x_1, y_1) \\ &\propto M(k_{\text{in},x} + k_{\text{out},x}, k_{\text{in},y} + k_{\text{out},y}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec  $M$  la transformée de Fourier spatiale de  $\mu(x, y)$ . Les matrices sont moyennées sur l'ensemble des couples  $(\mathbf{k}_{\text{in}}, \mathbf{k}_{\text{out}})$  présentant la même valeur de  $\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}$  et représentées dans le plan  $(k_{\text{in},x} + k_{\text{out},x}, k_{\text{in},y} + k_{\text{out},y})$  qui apparaît naturellement Eq. (4.2).

Pour comprendre la répercussion de l'anisotropie du milieu sur la matrice  $\mathbf{K}^{(1)}$  dans le plan  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$  (que nous appellerons simplement « plan  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$  » dans la suite) considérons tout d'abord une fibre unique dirigée selon l'axe  $x$  et passant par le point  $y = 0, z_0 = 0$ . Le potentiel de désordre de l'objet s'écrit à 3D :

$$\mu(x, y) \propto \mu_0 \mathbb{1}(x) \delta(y), \quad (4.4)$$

où le terme  $\mathbb{1}(x)$  traduit l'invariance par translation suivant  $x$ . Ainsi, sa transformée de Fourier spatiale s'écrit :

$$M(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y}) \propto \delta(k_{in,x} + k_{out,x}) \mathbb{1}(k_{in,y} + k_{out,y}), \quad (4.5)$$

ce qui correspond à une ligne dans la direction  $k_{in,y} + k_{out,y}$ . D'après les propriétés de la transformée de Fourier, si la fibre est orientée avec un angle  $\phi$  dans le plan  $(x, y)$ , sa représentation dans le plan  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$  sera orientée avec le même angle.

Pour décrire l'effet d'un angle hors du plan de la sonde, considérons à présent un segment de fibre de longueur  $\Delta z$  orienté dans le plan  $(x, z)$  faisant un petit angle  $\theta \ll \pi$  avec l'axe  $x$ . Alors  $z = x \tan(\theta)$  avec  $z_0 - \Delta z/2 \leq z \leq z_0 + \Delta z/2$ . Le potentiel de désordre s'écrit alors :

$$\mu(x, y, z) \propto \mu_0 \text{rect}(z - z_0, \Delta z) \delta(x / \tan(\theta) - z) \delta(y). \quad (4.6)$$

La matrice de diffusion simple s'obtient en intégrant les contributions de  $z_0 - \Delta z/2$  à  $z_0 + \Delta z/2$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}) &\propto \mu_0 \int_{z_0 - \Delta z/2}^{z_0 + \Delta z/2} \exp\left(iz \left(\frac{k_{in,x} + k_{out,x}}{\tan(\theta)} + k_{in,z} + k_{out,z}\right)\right) dz \\ &\propto \mu_0 \Delta z \text{sinc}\left(\frac{\Delta z}{2} \left(\frac{k_{in,x} + k_{out,x}}{\tan(\theta)} + k_{in,z} + k_{out,z}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Comme le montre l'équation (4.3),  $\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  ne dépend que de  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$ . Simplifions alors l'équation (4.7) en choisissant  $k_{in,x} = k_{out,x}$  et  $k_{in,y} = k_{out,y}$ . Ainsi, le maximum de  $\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  est atteint pour :

$$\begin{aligned} \frac{2k_{in,x}}{\tan(\theta)} + 2k_{in,z} &= 0 \\ \Leftrightarrow k_{in,x}^2 &= \tan(\theta)^2 (k_0^2 - k_{in,x}^2 - k_{in,y}^2) \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \tan(\theta)^2}{k_0^2 \tan(\theta)^2} k_{in,x}^2 + \frac{1}{k_0^2} k_{in,y}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{k_{in,x}^2}{k_0^2 \sin(\theta)^2} + \frac{k_{in,y}^2}{k_0^2} &= 1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

ce qui est l'équation d'une ellipse de demi-petit axe  $k_0 \sin(\theta) \approx k_0 \theta$  et de demi-grand axe  $k_0$ . Par conséquent, dans le cas où  $k_{in,y} = 0$ ,  $\mathbf{K}^{(1)}(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  atteint sa valeur maximale pour  $k_{in,x} = k_0 \sin(\theta)$ . Puisque l'intégrale ne dépend que de  $k_{in,x} + k_{out,x}$ , le maximum de la moyenne sur tous les couples sera atteint pour  $k_{in+out,x} = k_{in,x} + k_{out,x} = 2k_0 \sin(\theta)$ . Ainsi, le maximum de  $\mathbf{K}^{(1)}$  dans le plan  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$  n'est pas situé en son centre; le décalage de cette position est directement lié à l'angle hors-plan  $\theta$ .

### 4.2.2 Algorithme proposé pour une sonde 2D

Les calculs de la section précédente révèlent l'intérêt de travailler dans le plan  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$  pour étudier la direction d'anisotropie du milieu. L'algorithme proposé est donc le suivant :

- ▶ La matrice de réflexion est acquise par émission d'une base d'ondes planes  $\{\mathbf{k}_{in}\}$ . En réception, la matrice peut être acquise en base canonique ou en ondes planes  $\{\mathbf{k}_{out}\}$ . Dans le cas le plus courant d'une réception en base canonique, une transformée de Fourier spatiale est effectuée sur les voies en réception. La répartition des vecteurs d'ondes peut être réalisée de manière isotrope dans les plans  $(k_{in,x}, k_{in,y})$  et  $(k_{out,x}, k_{out,y})$  en choisissant une géométrie sphérique, ou anisotrope en choisissant une géométrie cartésienne (cf. Fig. 4.5).
- ▶ Pour déterminer la direction du fibrage à une certaine profondeur  $z_0$ , on calcule la transformée de Fourier des signaux sur une fenêtre temporelle centrée autour du temps  $\tau = 2z_0/c_0$ . Le traitement est ensuite effectué à la fréquence centrale de la sonde. Un traitement sur l'ensemble de la bande passante de la sonde peut être judicieux pour améliorer le rapport signal-sur-bruit, mais cela n'a pas été fait dans cette thèse.
- ▶ La matrice est réorganisée en 4D pour dépendre des variables  $k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y}, k_{in,x}, k_{in,y}$ . Le plan  $(k_{in,x} + k_{out,x}, k_{in,y} + k_{out,y})$  est échantillonné régulièrement sur une grille de pas choisi  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$ ; les valeurs de  $k_{in,x} + k_{out,x}$  et  $k_{in,y} + k_{out,y}$  sont remplacées par les valeurs de  $k_{in+out,x}$  et  $k_{in+out,y}$  les plus proches.
- ▶ Les modules au carré des éléments de la matrice sont moyennés sur  $k_{in,x}$  et  $k_{in,y}$  pour obtenir une matrice dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$ . Les cartes sont toutes représentées normalisées par leur maximum.

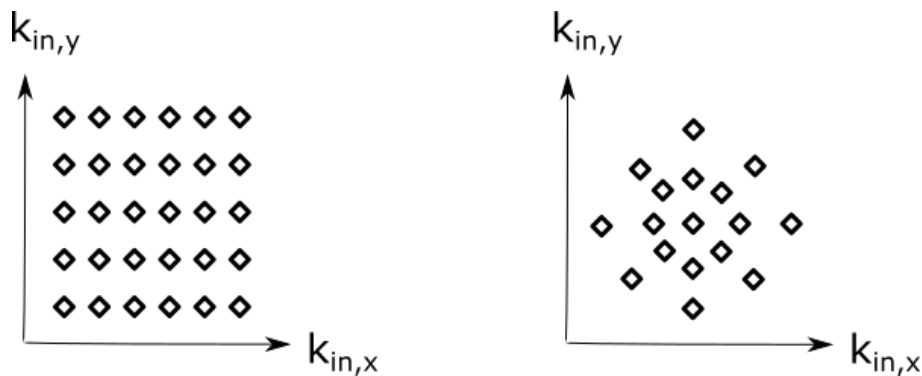


FIGURE 4.5 – Schéma de l'échantillonnage des vecteurs d'ondes en émission cartésienne (gauche) et sphérique (droite).

Les méthodes de l'état de l'art présentées au début de ce chapitre ne permettent pas d'avoir accès à l'angle  $\theta$ , elles se limitent à l'angle dans le plan  $\phi$ . La technique que nous proposons permet d'accéder à la direction des fibres en trois dimensions, de manière locale grâce au fenêtrage temporel des signaux (résolution axiale) et à l'illumination du matériau se trouvant sous la sonde (résolution latérale 2D). En réalisant plusieurs acquisitions pour différentes positions de la sonde, une image 3D de la direction du fibrage dans l'espace peut être réalisée. Une étude plus poussée devrait permettre de préciser la résolution latérale de cette méthode.



Si la matrice a été acquise en base canonique, les vecteurs d'onde utilisés pour passer en base d'ondes planes sont choisis. Néanmoins, ils sont limités par le théorème de Shannon, qui impose que les composantes maximales du vecteur d'onde suivant  $x$  et  $y$  soient inférieures à  $\pi/p_x$  et  $\pi/p_y$ , avec  $p_x$  et  $p_y$  les pas inter-éléments dans chacune de ces directions.

### 4.3 Simulation numérique de la matrice de réflexion en milieu anisotrope

Une extension de la simulation numérique introduite au chapitre 2 est utilisée pour tester l'algorithme de détermination de la direction d'élongation. La géométrie du problème impose que la sonde soit bidimensionnelle et le milieu de propagation 3D. Le changement de dimension modifie l'expression de la matrice  $\mathcal{T}_0$  à considérer pour que la simulation vérifie la conservation de l'énergie. Cette section rappelle tout d'abord les grandeurs d'intérêt à 3D, puis exploite la simulation numérique pour tester l'algorithme proposé et caractériser le milieu.

#### 4.3.1 Paramètres de la simulation

La propagation dans les alliages de titane étant trop complexe et la modélisation numérique délibérément simple, toute comparaison quantitative entre simulation et mesure est hors de portée. Toutefois, afin de rendre compte des effets géométriques, les paramètres de la sonde simulée sont identiques à ceux de la sonde utilisée dans les mesures (cf. Table 1.1) : 11x11 éléments de fréquence centrale 8 MHz, de bande passante 4 MHz, et pas inter-élément 0.6 mm. La fréquence d'échantillonnage des signaux temporels est de 50 MHz. La vitesse de l'onde dans le milieu est  $c_0 = 6100$  m/s, comme dans le titane. De façon arbitraire, la vitesse dans les diffuseurs est prise égale à  $c_s = 6200$  m/s.

Afin de simuler un milieu avec des diffuseurs allongés, les diffuseurs monopolaires de rayon de 0.1 mm sont alignés pour former des segments de longueur 1.3 cm (environ 2 fois la dimension d'un côté de la sonde) suivant une direction  $(\phi, \theta)$  exprimée en coordonnées sphériques et espacés d'une distance petite devant la taille d'une cellule de résolution pour ne pas être résolus par la sonde : une distance de  $\lambda/4$  sera utilisée dans la suite (cf. Fig. 4.6). Un segment regroupe 63 diffuseurs et une concentration de 16.5 segments par  $\text{cm}^3$  est choisie. Le milieu considéré est de taille 2 x 2 x 1 cm respectivement dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ; la distance du début du milieu à la sonde est de 3 cm.

L'expression de la réponse fréquentielle d'un diffuseur sphérique monopolaire à 3D est calculée Eq. (2.34) et rappelée ici :

$$\mathcal{T}_0(\omega) = k_0^2 \frac{\mu \mathcal{V}}{1 + \frac{ik_0^3 \mu \mathcal{V}}{4\pi}}, \quad (4.9)$$

avec  $\mathcal{V} = 4/3\pi a^3$  le volume du diffuseur.

La matrice de réflexion en diffusion simple est calculée grâce à l'équation (2.51) en utilisant la fonction de Green à 3 dimensions  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$  (cf. Eq. (2.5)).

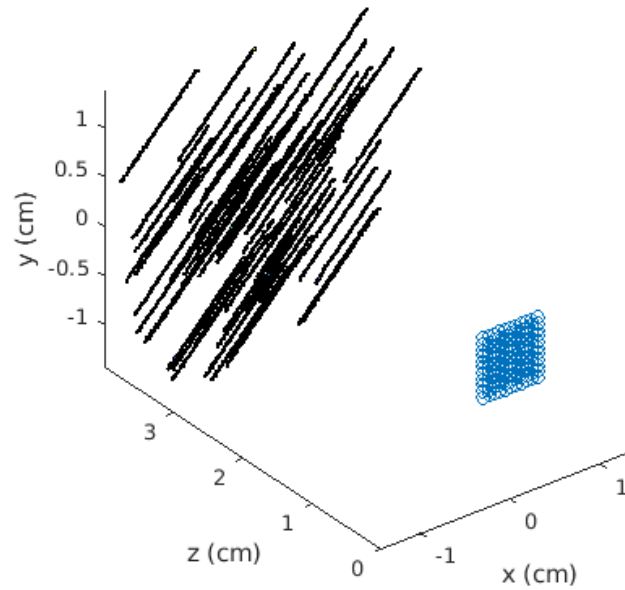


FIGURE 4.6 – Schéma du milieu simulé.

### 4.3.2 Résultats de la simulation

L'algorithme est testé sur 9 orientations des segments de diffuseurs correspondant aux combinaisons d'angle  $\phi = 0^\circ, 45^\circ$  et  $90^\circ$  et  $\theta = -10^\circ, 0^\circ$  et  $10^\circ$ .

Les cartes d'intensité dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  sont présentées sur la Fig. 4.7 pour chaque configuration. Comme prédit par la théorie, la rotation de la ligne d'intensité maximale est observée avec le changement de l'angle  $\phi$ , tandis que l'angle  $\theta$  induit un décalage de cette ligne par rapport à l'origine du repère. Le décalage mesuré pour un angle hors-plan  $\theta = \pm 10^\circ$  est de l'ordre de  $\pm 2800 \text{ m}^{-1}$ , ce qui correspond bien à la valeur de  $2k_0 \sin(10^\circ)$  attendue dans la configuration présentée.

Ainsi, toute combinaison d'angle  $(\theta, \phi)$  peut être déterminée à partir de l'observation de l'intensité moyenne dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$ . La figure 4.7 met en évidence la limitation en angles  $\theta$  observables en raison de la taille finie de la sonde.

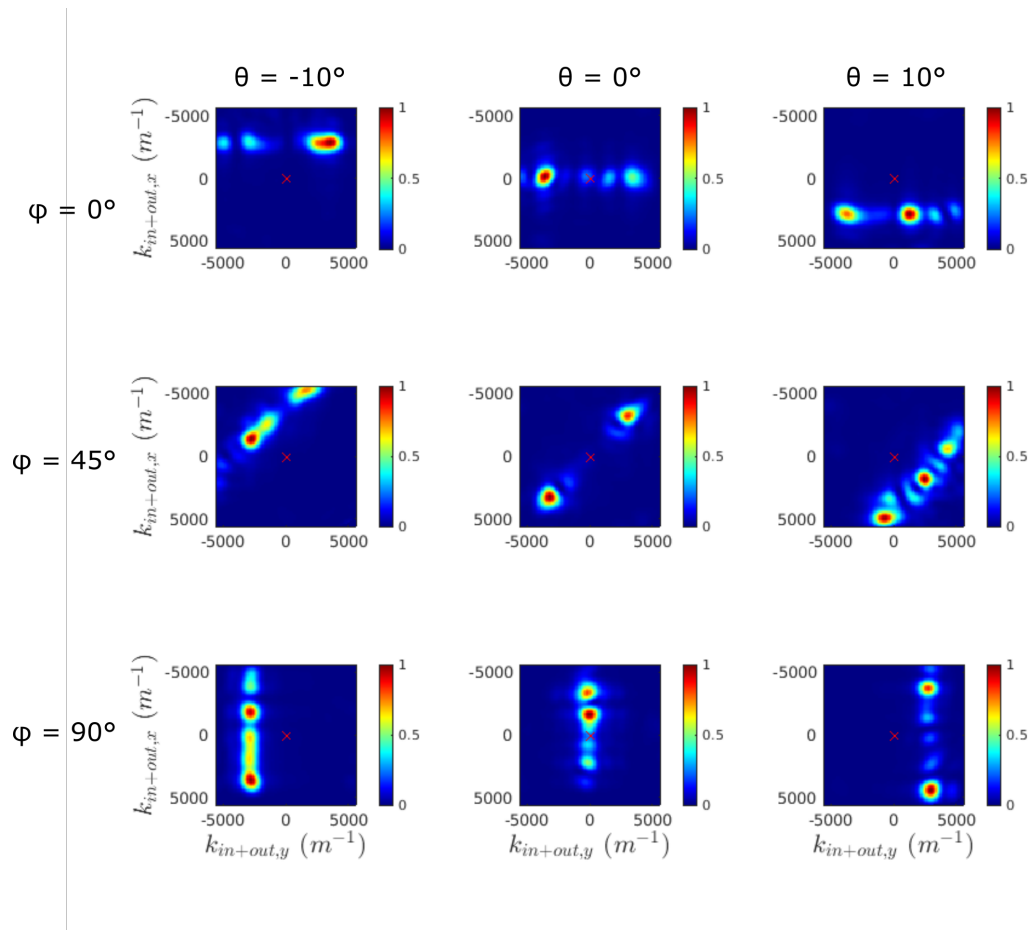


FIGURE 4.7 – Simulations de la réponse du milieu en régime de diffusion simple dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  pour différents angles  $(\varphi, \theta)$  des diffuseurs. Le point  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y}) = (0,0)$  est indiqué par la croix rouge.

## 4.4 Résultats expérimentaux

Cette section présente les résultats expérimentaux obtenus sur deux milieux d'intérêt. Les mesures effectuées sur les billettes de TA6V et de Ti17 sont tout d'abord présentées pour différentes valeurs de l'angle  $\phi$ . Puis, un milieu modèle présentant des diffuseurs très allongés suivant une direction, la forêt de fils de nylon, est utilisé pour démontrer la détermination de l'angle hors-plan  $\theta$ . Les caractéristiques de la sonde 2D utilisée sont présentées dans la table 1.1.

### 4.4.1 Billette d'alliages de titane

Les expériences sont menées en contact sur la face plane des demi-billettes de titane. L'émission est réalisée en ondes planes avec des angles répartis de  $-15^\circ$  à  $15^\circ$  en 12 tirs (144 angles au total) selon les directions  $x$  et  $y$ . La réception est effectuée dans la base canonique.

Les mesures de Baelde *et al.* [10] ont montré que la billette de TA6V présente un fibrage allongé suivant son axe principal; la billette de Ti17 n'en possède pas. Ces billettes ne présentent pas de fibrage dépendant des coordonnées spatiales. Afin de pouvoir tester plusieurs configurations, nous avons donc fait tourner la sonde sur la billette de titane pour étudier sa réponse selon trois orientations :  $0$ ,  $45$  et  $90^\circ$  par rapport à l'axe  $x$ .

Les signaux sont échantillonnés à 100 MHz et traités à la fréquence (7.6 MHz). Ils sont étudiés autour d'une profondeur de 3.9 cm dans la billette. Les vecteurs d'ondes choisis pour  $\mathbf{k}_{out}$  sont tels qu'ils forment un angle maximal de  $30^\circ$  selon les axes  $x$  et  $y$ . Les résultats dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  sont présentés sur les Fig. 4.8 et 4.9 pour les billettes de TA6V et Ti17 respectivement. Pour diminuer l'effet des fluctuations statistiques, les valeurs extrêmes de  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  auxquelles sont associées peu de couples  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$  sont mises à zéro. La direction privilégiée est bien visible sur la billette de TA6V. Celle-ci suit la rotation de la sonde, ce qui permet d'affirmer que l'élongation visible sur la figure 4.8 est due à l'organisation de la microstructure, donc au fibrage. Dans la billette de Ti17, le diagramme est beaucoup plus isotrope et aucune différence n'est observée après rotation de la sonde; la microstructure ne présente donc pas d'élongation dans le plan de la sonde.

La représentation des données dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  conduit donc aux mêmes conclusions que Baelde *et al.* sur la présence d'un fibrage dans la billette de TA6V et d'une distribution isotrope de diffuseurs dans la billette de Ti17. De plus, la direction du fibrage peut être obtenue à l'aide d'une unique acquisition.

### 4.4.2 Fils de nylon

L'échantillon de fils de nylon présenté à la section 3.3.1 est utilisé comme preuve de concept pour tester la détermination de l'angle hors-plan  $\theta$ .

Dans l'eau, les longueurs d'onde étant quatre fois plus petites que dans le titane, la sonde est mal échantillonnée spatialement au delà de 2.5 MHz. Pour limiter les problèmes liés aux lobes de réseau, la sonde est utilisée à la plus basse fréquence possible, soit 6 MHz; elle est ainsi échantillonnée à  $2.5 \lambda$ . Ainsi, au delà de  $23.6^\circ$ , des lobes de réseau apparaissent et viennent polluer les signaux. Les signaux sont échantillonnés temporellement à 50 MHz.

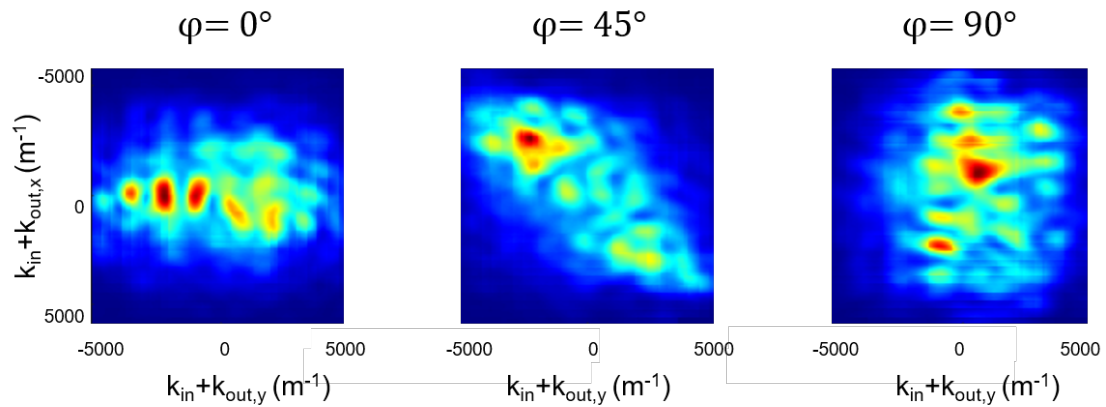


FIGURE 4.8 – Matrices  $|K(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out})|$  moyennées sur tous les couples  $(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  mesurées dans la billette de TA6V pour trois orientations de la sonde (0, 45 et 90°).

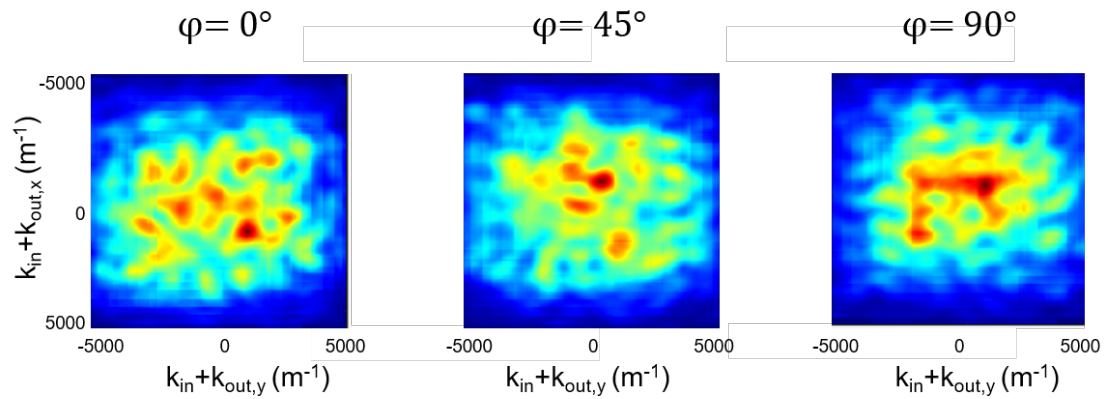


FIGURE 4.9 – Matrices  $|K(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out})|$  moyennées sur tous les couples  $(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  mesurées dans la billette de Ti17 pour trois orientations de la sonde (0, 45 et 90°).

L'émission est effectuée en coordonnées sphériques, avec 21 angles (dans le plan de la sonde) compris entre 0 et 360°, et 7 angles hors-plan compris entre 0 et 10°. La réception est effectuée en base canonique; les angles hors-plan en réception sont limités à 10° pour éviter les lobes de réseau. L'échantillon est placé dans un plan parallèle à la sonde (avec une incertitude expérimentale de quelques degrés), les fils étant orientés suivant l'axe  $x$ . La sonde est ensuite inclinée pour obtenir un angle hors-plan  $\theta$  de 5° puis 10°, l'angle  $\phi$  étant inchangé. Pour se placer en régime de diffusion simple, les signaux temporels sont étudiés avec une fenêtre de 10  $\mu\text{s}$  autour de la profondeur 3 cm.

Les résultats de ces mesures sont présentés en Fig.4.10. La réponse du milieu dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  est une ligne dans la direction  $k_{in+out,y}$ , ce qui correspond bien à la transformée de Fourier de la distribution de diffuseurs. Pour chacune des expériences, le maximum d'intensité se trouve respectivement à une valeur de  $k_{in+out,x}$  égale à 1000, -1500 et -4000  $\text{m}^{-1}$ , ce qui correspond à un écart moyen de 2500  $\text{m}^{-1}$ . Or, théoriquement, le décalage est égal à  $2k_0 \sin(\theta)$  ce qui correspond à une valeur de  $\theta$  de 3° (contre 5° attendu). Le comportement attendu de décalage par rapport à l'origine est donc bien observé lors-

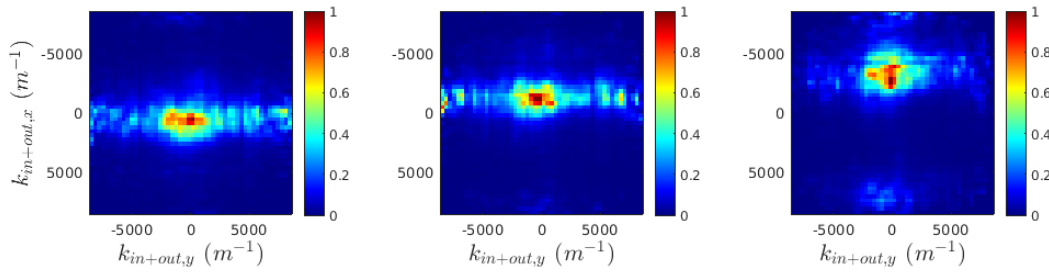


FIGURE 4.10 – Intensité moyenne dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  pour l'échantillon de fils de nylon (fils parallèles à l'axe  $x$  de la sonde) et avec un angle hors-plan de  $0, 5$  et  $10^\circ$  (de gauche à droite).

qu'un angle hors-plan est introduit; néanmoins, la détermination de l'angle hors-plan reste qualitative au vu des incertitudes de la méthode.

## 4.5 Effet de la diffusion multiple sur les mesures d'anisotropie

La diffusion multiple est présente dans les alliages de titane aux fréquences d'étude, c'est pourquoi nous nous intéressons à son influence sur la visualisation de la direction du fibrage. Notre outil de simulation numérique permettant de simuler les matrices de réflexion pour tout ordre de diffusion, il se prête bien à l'évaluation de l'effet de la diffusion multiple.

Le calcul des matrices de réflexion doit être réalisé pour un milieu 3D : le nombre de diffuseurs nécessaires est très largement supérieur à celui utilisé en 2D; la limitation du temps de calcul nous impose une proportion de diffusion simple très proche de 1. Les résultats montrés dans cette section ne porteront donc pas la matrice de réflexion totale  $\mathbf{K}$  (qui est très proche de  $\mathbf{K}^{(1)}$ ), mais sur les ordres de diffusion multiple seuls (matrices non mesurables expérimentalement).

En régime de diffusion multiple, la relation temps de vol - distance n'est plus valable : ainsi, la détermination de la direction du fibrage ne peut pas être réalisée localement en profondeur. Elle reste néanmoins intéressante pour des milieux dont le fibrage varie peu avec la profondeur.

### 4.5.1 Effet dans le plan $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$

Dans le cas d'un milieu multiplement diffusant, les coefficients de la matrice  $\mathbf{K}_m$  peuvent s'écrire :

$$K_m(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out}) \propto \iint \exp(i\mathbf{k}_{in}\mathbf{r}_1) \mu(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mu(\mathbf{r}_2) \exp(i\mathbf{k}_{out}\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (4.10)$$

Ainsi, dans le cas général, la matrice de diffusion multiple n'est pas égale à la transformée de la distribution de diffuseurs dans le plan  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$ . Néanmoins, notre simulation a fait apparaître que la matrice de diffusion multiple est proche de celle de diffusion simple à cause de

la forte composante de diffusion récurrente (cf. section 2.3.2). Toutefois, à 3 dimensions, la séparation des chemins de diffusion récurrente est très lourde à implémenter, nous n'avons donc pas, dans cette partie, retranché la diffusion récurrente à la diffusion multiple. Afin de minimiser le rôle de la diffusion récurrente, nous avons choisi ici d'étudier la matrice  $\mathbf{K}^{(4)}$  qui contient moins de diffusion récurrente que les matrices  $\mathbf{K}_m$ ,  $\mathbf{K}^{(2)}$  et  $\mathbf{K}^{(3)}$ . Pour reproduire la diffusion par de petits segments non résonants, nous ne prenons pas en compte la diffusion entre diffuseurs d'un même segment.

Les cartes d'intensité moyenne dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  calculées avec les mêmes paramètres de simulation que pour la figure 4.7 sont présentées sur la Fig. 4.11. La diffusion multiple génère une figure de speckle aléatoire qui dégrade la signature de la diffusion simple : les lignes correspondant à la transformée de Fourier des segments sont altérées dans la plupart des cas et aucune direction privilégiée ne peut être déterminée. Ceci semble donc indiquer que le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  n'est pas une base adéquate pour déterminer la direction du fibrage dans un régime de diffusion multiple.

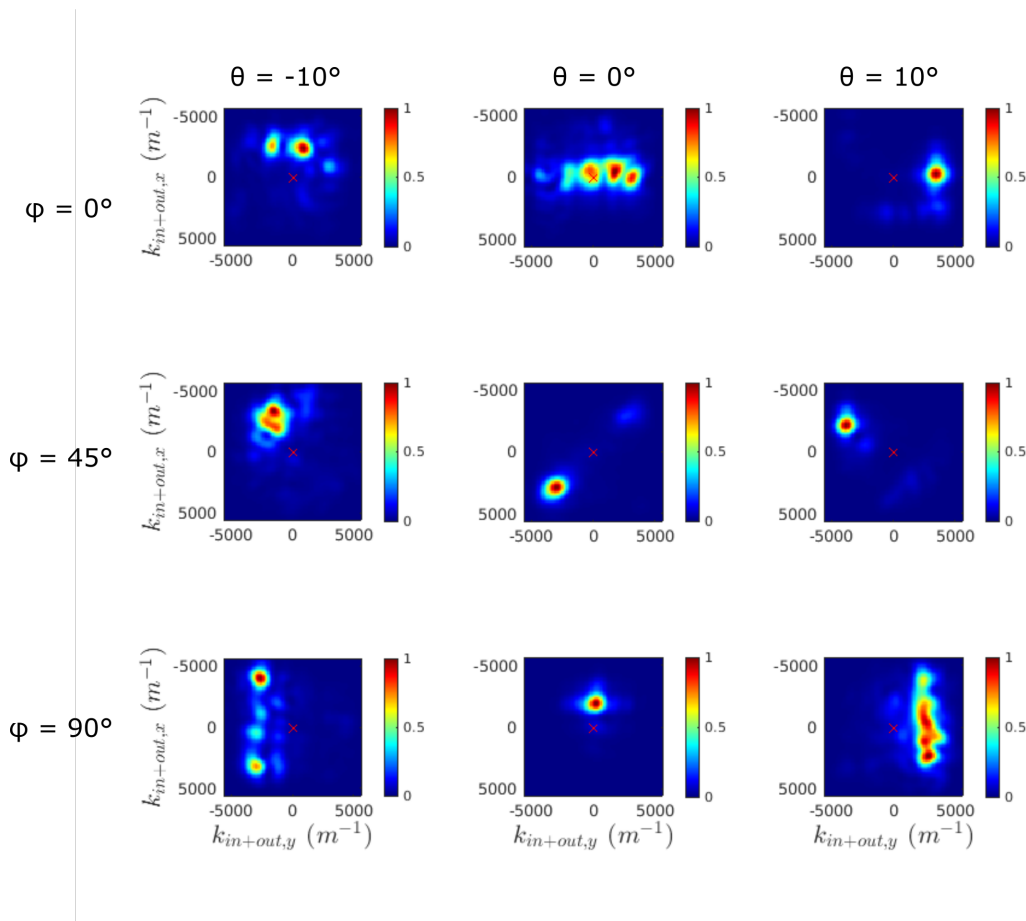


FIGURE 4.11 – Simulations de la réponse du milieu en régime de diffusion quadruple dans le plan  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y})$  pour différents angles  $(\phi, \theta)$  des diffuseurs. Le point  $(k_{in+out,x}, k_{in+out,y}) = (0,0)$  est indiqué par la croix rouge.

## 4.5.2 Manifestation de la diffusion multiple dans le plan $\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{out}}$

La direction  $\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{out}} = \mathbf{0}$ , soit  $\mathbf{k}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{out}}$ , correspond à la rétrodiffusion suivant la direction de l'onde incidente. Il s'agit d'une direction privilégiée en régime de diffusion multiple puisqu'elle est le lieu du phénomène appelé rétrodiffusion cohérente (cf. section 2.1.2). La figure 4.12 illustre la réponse du milieu en diffusion simple ((a) et (c)) et quadruple ((b) et (d)) dans les plans  $(k_{\text{in}+\text{out},x}, k_{\text{in}+\text{out},y})$  et  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$  pour une distribution isotrope de diffuseurs. Comme attendu, aucune anisotropie n'est observée : le plan  $(k_{\text{in}+\text{out},x}, k_{\text{in}+\text{out},y})$  ne délivre pas d'information sur le milieu puisqu'il est isotrope. Dans le plan  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$ , une différence de comportement est observée pour les matrices  $\mathbf{K}^{(1)}$  et  $\mathbf{K}^{(4)}$ . En régime de diffusion simple, l'intensité rétrodiffusée présente un pic autour de  $\mathbf{k}_{\text{in}} = \mathbf{k}_{\text{out}}$  (cf. Fig. 4.12(c)). Ce dernier est associé à la dimension finie du réseau de transducteurs : dès qu'un angle existe entre l'onde incidente et l'onde rétrodiffusée, seule une partie de cette dernière peut être collectée par le réseau de transducteurs [15]. On note cependant une certaine anisotropie de la figure qui est probablement due à la géométrie du réseau de transducteurs, l'échantillonnage ainsi que l'ouverture n'étant pas identiques dans toutes les directions. Ce point mériterait d'être approfondi. L'intensité rétrodiffusée dans le plan  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$  présente un tout autre aspect en régime de diffusion multiple (cf. Fig. 4.12(d)) : un fond incohérent (halo diffusif) au dessus duquel se trouve un pic de rétrodiffusion cohérente.

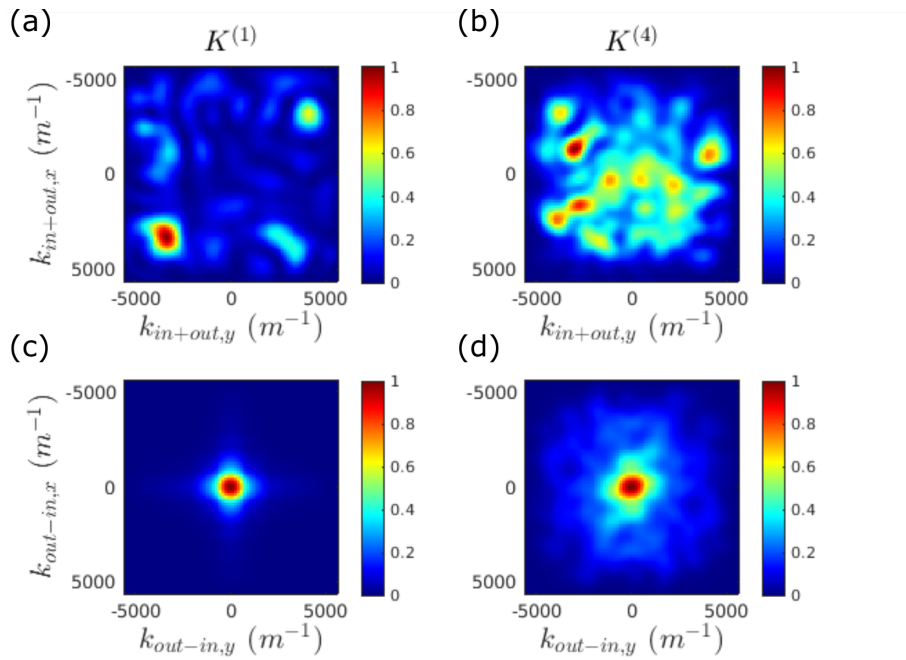


FIGURE 4.12 – Simulations de la réponse du milieu en régime de diffusion simple ((a) et (c)) et quadruple ((b) et (d)) dans les plans  $(k_{\text{in}+\text{out},x}, k_{\text{in}+\text{out},y})$  et  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$  des diffuseurs monopolaires individuels.

Étudions à présent la réponse d'un milieu anisotrope dans le plan  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$ . Les figures 4.13 et 4.14 illustrent les réponses du milieu dans le plan  $(k_{\text{out}-\text{in},x}, k_{\text{out}-\text{in},y})$  en diffusion simple et quadruple pour les 9 configurations de segments de diffuseurs précédentes. La réponse en diffusion simple (cf. Fig. 4.13) calculée pour des diffuseurs allongés dans différentes directions ne révèle aucune anisotropie. Au contraire, ce plan est intéressant pour



étudier la matrice de diffusion quadruple (cf. Fig. 4.14) : le pic de rétrodiffusion cohérente n'apparaît que dans le plan perpendiculaire à l'axe des segments. La direction dans laquelle le pic de rétrodiffusion cohérente est visible informe donc sur la direction d'élongation du milieu en régime de diffusion multiple. Afin d'obtenir une meilleure visualisation de cet effet, une moyenne sur les réalisations du milieu pourrait être envisagée.

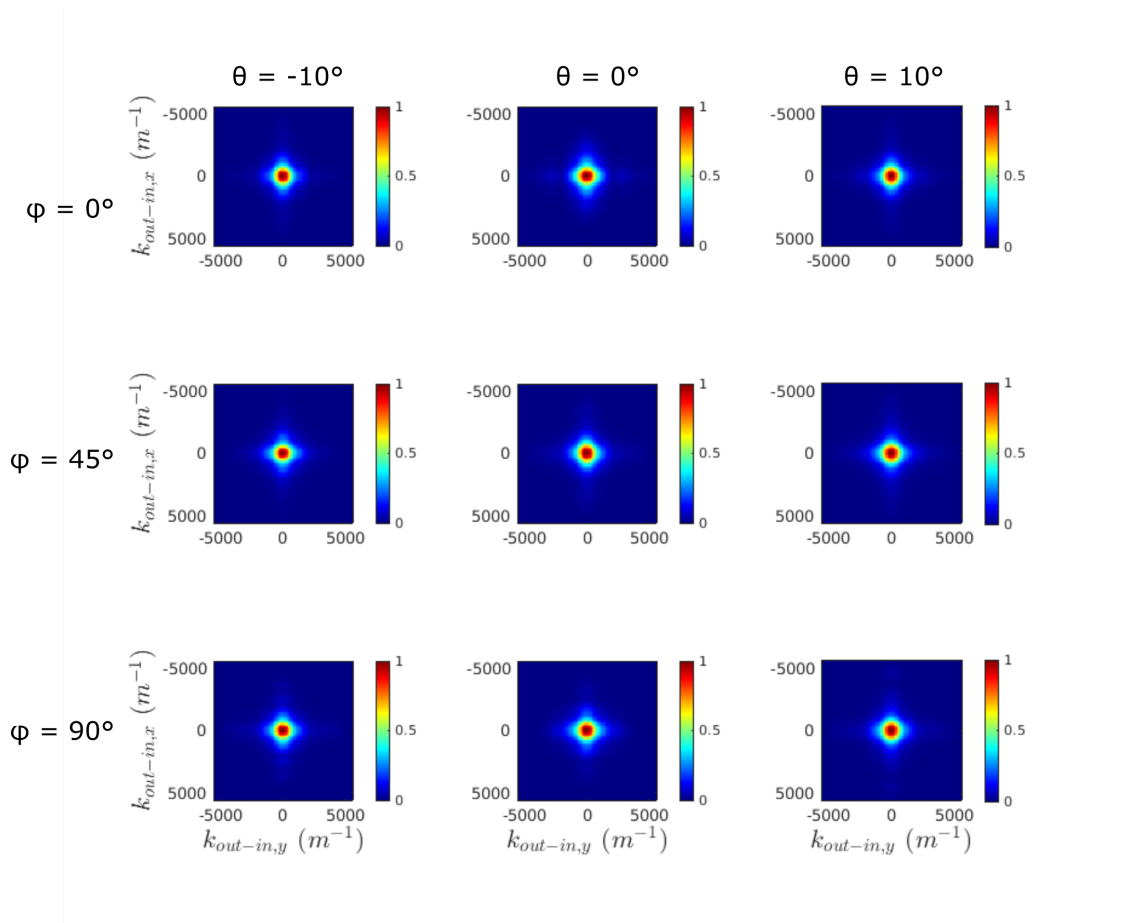


FIGURE 4.13 – Simulations de la réponse du milieu en régime de diffusion simple dans le plan  $(k_{out-in,x}, k_{out-in,y})$  pour différents angles  $(\phi, \theta)$  des diffuseurs.

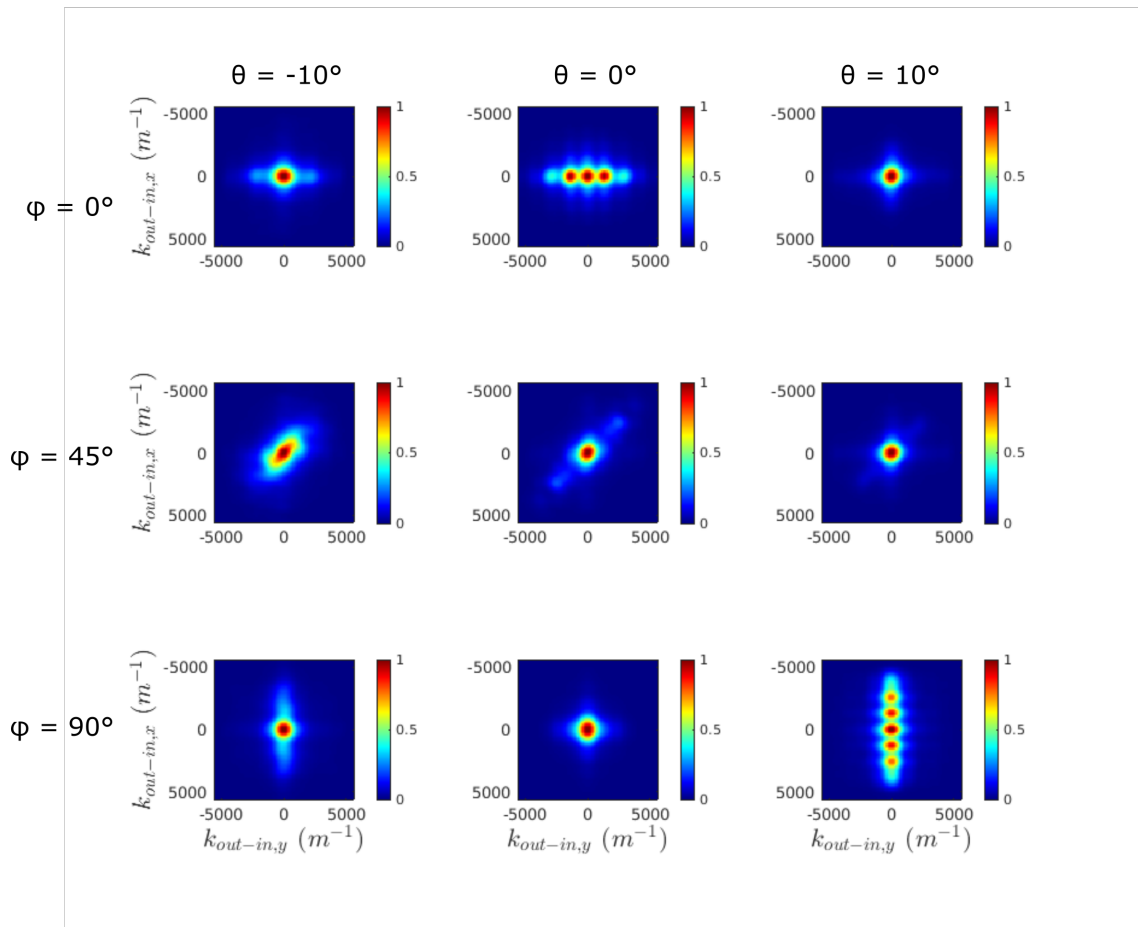


FIGURE 4.14 – Simulations de la réponse du milieu en régime de diffusion quadruple dans le plan  $(k_{out-in,x}, k_{out-in,y})$  pour différents angles  $(\varphi, \theta)$  des diffuseurs.

Les figures Fig. 4.15 et 4.16 illustrent les résultats expérimentaux sur les billettes de TA6V et de Ti17 dans le plan  $(k_{out-in,x}, k_{out-in,y})$  dans la même configuration utilisée pour les figures 4.8 et 4.9 mais autour de la profondeur 11.8 cm. Une direction privilégiée est visible dans ce plan pour la billette de TA6V, contrairement à celle de Ti17, ce qui est cohérent avec les conclusions issues du plan  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$ . L'analyse dans le plan  $(k_{out-in,x}, k_{out-in,y})$  est complexe, la matrice de réflexion contenant à la fois des contributions de diffusion simple et de diffusion multiple. Une étude plus fine des propriétés du pic de rétrodiffusion cohérente dans ce plan pourrait permettre de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu et de les relier aux propriétés des alliages de titane.

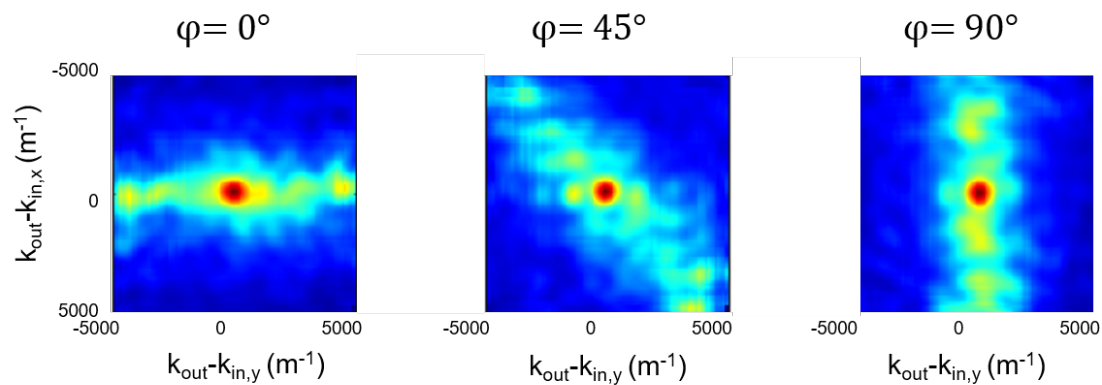


FIGURE 4.15 – Matrices  $|K(\mathbf{k}_{out} - \mathbf{k}_{in})|$  moyennées sur tous les couples  $(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  mesurées dans la billette de TA6V pour trois orientations de la sonde (0, 45 et 90°).

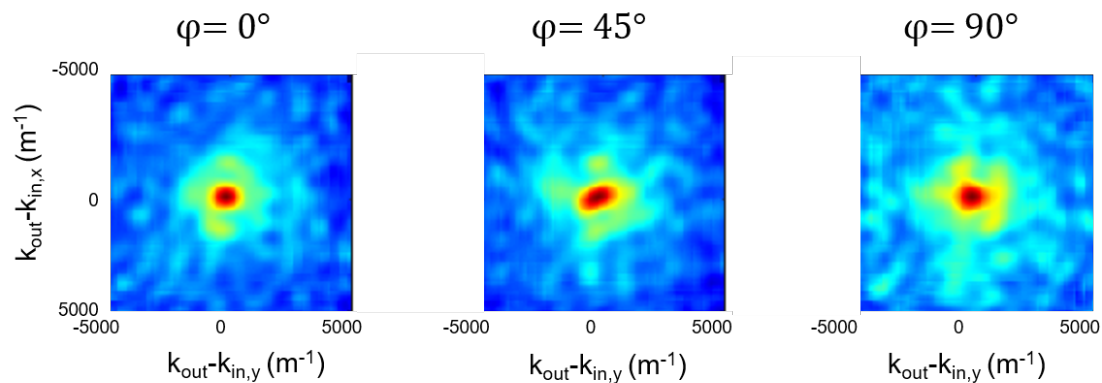


FIGURE 4.16 – Matrices  $|K(\mathbf{k}_{out} - \mathbf{k}_{in})|$  moyennées sur tous les couples  $(\mathbf{k}_{in}, \mathbf{k}_{out})$  mesurées dans la billette de Ti17 pour trois orientations de la sonde (0, 45 et 90°).

## 4.6 Conclusion

Cette section présente une méthode de détermination locale de la direction du fibrage exploitant la matrice de réflexion exprimée dans une base d'ondes planes. Les combinaisons des vecteurs d'ondes en émission  $\mathbf{k}_{in}$  et en réception  $\mathbf{k}_{out}$  nous permettent de visualiser les angles dans le plan  $\phi$  et hors-plan  $\theta$  de la distribution de diffuseurs.

En régime de diffusion simple, le plan  $\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}$  est directement lié à la transformée de Fourier de la distribution de diffuseurs. En raison des propriétés de la transformée de Fourier, la plus grande dimension du diffuseur sera associée à la plus petite longueur de la ligne de forte intensité dans le plan  $\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}$ , permettant ainsi de déterminer l'angle  $\phi$ ; de plus, le décalage de cette ligne par rapport à l'origine est directement lié à l'angle  $\theta$ . Un fenêtrage temporel de la matrice de réflexion permet d'accéder à ces grandeurs localement autour d'une profondeur donnée.

En régime de diffusion multiple, le plan  $\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}}$  nous informe sur les propriétés de rétro-diffusion du milieu et permet d'obtenir en particulier les caractéristiques du pic de rétro-diffusion cohérente dans les différentes directions de l'espace. Dans ce régime de diffusion multiple, le caractère local de la mesure lié à la relation temps-distance est perdu. Toutefois, il s'agit d'une méthode qui pourrait permettre de mesurer la direction d'élongation du fibrage dans des alliages de titane où la diffusion multiple domine.

## Bibliographie

- [1] F. J. Margetan, M. Gigliotti, L. Brashe, and W. Leach, “Fundamental Studies : Inspection Properties for Engine Titanium Alloys,” tech. rep., IOWA STATE UNIV AMES CENTER FOR NONDESTRUCTIVE EVALUATION, Dec. 2002. [114](#)
- [2] A. Derode and M. Fink, “Spatial coherence of ultrasonic speckle in composites,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Nov. 1993. [114](#)
- [3] C. Papadacci, V. Finel, J. Provost, O. Villemain, P. Bruneval, J.-L. Gennisson, M. Tanter, M. Fink, and M. Pernot, “Imaging the dynamics of cardiac fiber orientation in vivo using 3D Ultrasound Backscatter Tensor Imaging,” *Scientific Reports*, vol. 7, Dec. 2017. [115](#)
- [4] C. Papadacci, *Imagerie Échographique Ultrarapide Du Cœur et Des Artères Chez l'homme : Vers l'imagerie Ultrarapide 3D et l'imagerie Du Tenseur de Rétrodiffusion Ultrasonore*. PhD thesis, Institut Langevin, 2014. [115](#)
- [5] G. Pinton, G. Trahey, and J. Dahl, “Spatial coherence in human tissue : Implications for imaging and measurement,” *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, vol. 61, pp. 1976–1987, Dec. 2014. [115](#)
- [6] C. Bescond, D. Lévesque, J.-B. Guénette, and J.-P. Monchalim, “Synthetic focusing for imaging the ultrasonic backscattered noise in dual phase titanium forged parts,” in *WCNDT*, 2004. [115](#), [116](#)
- [7] S. Ahmed and R. B. Thompson, “Influence of Columnar Microstructure on Ultrasonic Backscattering,” in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation* (D. O. Thompson and D. E. Chimenti, eds.), pp. 1617–1624, Boston, MA : Springer US, 1995. [115](#)
- [8] A. P. Arguelles, C. M. Kube, P. Hu, and J. A. Turner, “Mode-converted ultrasonic scattering in polycrystals with elongated grains,” *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 140, pp. 1570–1580, Sept. 2016.
- [9] C. M. Kube, A. P. Arguelles, and J. A. Turner, “Ultrasonic backscatter from elongated grains using line focused ultrasound,” *Ultrasonics*, vol. 82, pp. 79–83, Jan. 2018. [115](#)
- [10] A. Baelde, J. Laurent, P. Millien, R. Coulette, W. B. Khalifa, F. Jenson, F. Sun, M. Fink, and C. Prada, “Effect of microstructural elongation on backscattered field : Intensity measurement and multiple scattering estimation with a linear transducer array,” *Ultrasonics*, vol. 82, pp. 379–389, Jan. 2018. [115](#), [116](#), [123](#)
- [11] A. Rodríguez-Molares, A. Fatemi, L. Løvstakken, and H. Torp, “Specular Beamforming,” *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, pp. 1–1, May 2017. [116](#)
- [12] D. Tokar, Z. Prevorovsky, and J. Hradilova, “Ultrasonic Evaluation of Local Human Skin Anisotropy,” in *11th European Conference on Non-Destructive Testing (ECNDT 2014)*, p. 10, 2014. [116](#)

- [13] A. J. Hunter, B. W. Drinkwater, and P. D. Wilcox, "The wavenumber algorithm for full-matrix imaging using an ultrasonic array," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 55, pp. 2450–2462, Nov. 2008. [117](#)
- [14] L. Merabet, S. Robert, and C. Prada, "2-D and 3-D Reconstruction Algorithms in the Fourier Domain for Plane-Wave Imaging in Nondestructive Testing," *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, vol. 66, pp. 772–788, Apr. 2019. [117](#)
- [15] A. Aubry, A. Derode, P. Roux, and A. Tourin, "Coherent backscattering and far-field beamforming in acoustics," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 121, pp. 70–77, Jan. 2007. [127](#)



# Conclusion générale et perspectives

Cette thèse a porté sur la propagation ultrasonore dans les alliages de titane. Nous avons cherché à mieux comprendre l'incidence de la microstructure de ces alliages sur les ondes ultrasonores mesurées en réflexion par une sonde multi-éléments.

La première problématique abordée concerne l'évaluation du niveau de diffusion multiple dans les signaux rétrodiffusés. La diffusion multiple est un phénomène susceptible de mettre en défaut les méthodes de détection et d'imagerie, qui font généralement l'hypothèse d'une relation directe entre temps de vol et distance. La séparation des signaux de diffusion simple de ceux de diffusion multiple proposée par Aubry *et al.* a tout d'abord été étudiée dans la base canonique. Celle-ci est fondée sur une propriété de la diffusion simple lorsque l'approximation paraxiale est valide, l'« effet mémoire », qui se traduit par une corrélation longue portée sur les anti-diagonales de la matrice. Plus récemment, une séparation dans la base focalisée a été proposée grâce à un filtre confocal, qui isole les contributions proches de la diagonale de la matrice correspondant majoritairement à de la diffusion simple.

Une grande partie du travail de thèse a consisté à construire et exploiter une simulation numérique utilisant le développement de Born. Celle-ci permet de calculer la matrice de réflexion pour un milieu constitué de diffuseurs monopolaires fluides répartis aléatoirement à 2 ou 3 dimensions. Elle a pour originalité de séparer les ordres de diffusion dans la matrice de réflexion, permettant ainsi d'analyser les propriétés de la matrice de diffusion simple et celle de diffusion multiple, mais également les différents ordres de diffusion multiple. Nous avons ainsi montré que la diffusion récurrente, contribution de diffusion multiple pour laquelle le premier et le dernier diffuseur de la séquence de diffusion se trouvent dans une même cellule de résolution, possède des propriétés similaires à la diffusion simple (notamment l'« effet mémoire ») et complique donc la séparation entre diffusion simple et diffusion multiple. Il est fréquemment admis que l'intensité totale est la somme des intensités de chaque ordre de diffusion, ce qui suppose une corrélation nulle entre eux. Nous avons cependant observé que la diffusion récurrente induit de fortes corrélations entre les ordres de diffusion, ce qui va à l'encontre de l'additivité des intensités.

La simulation numérique nous a également permis d'étudier les estimateurs de proportion de diffusion simple définis dans la littérature. Les matrices de diffusion simple et de diffusion récurrente ayant des propriétés similaires, nous les avons regroupé en une matrice que nous appelons matrice de diffusion confocale. Nous avons montré que les estimateurs préalablement définis ne sont en fait pas des estimateurs de la proportion de diffusion *simple* mais bien de diffusion *confocale*. En base focalisée, nous avons construit un nouvel espace



théorique de diffusion confocale (ETDC) qui permet, comme déjà fait en base canonique, de séparer la matrice de diffusion confocale de la matrice de diffusion multiple apparente. Ce nouvel espace, qui n'a pas encore été testé sur des données expérimentales, devrait donc être utile pour filtrer la diffusion multiple apparente lorsque l'approximation paraxiale n'est plus valable.

Cette thèse soulève également la question de la définition d'un diffuseur : dans la simulation numérique, nous avons défini un diffuseur comme un objet ponctuel ayant un rayonnement monopolaire. Pourtant, à cause de la diffraction, il est connu que deux diffuseurs inclus dans une même cellule de résolution ne sont pas séparables; leurs contributions s'ajoutent et ils forment alors pour la sonde un « super diffuseur ». Ainsi, nous avons défini la diffusion par un unique « super diffuseur » comme de la diffusion confocale et celle provenant de diffuseurs compris dans des cellules de résolution distinctes comme de la diffusion multiple apparente. Les matrices de diffusion multiple apparente (ne contenant plus de diffusion récurrente) présentent un caractère quasi aléatoire souvent décrit dans la littérature. L'orthogonalité entre les matrices confocale et multiple apparente est alors vérifiée, et il est possible de définir un nouvel estimateur de la proportion de diffusion confocale qui s'affranchit du biais des estimateurs de la littérature. Nous avons montré en simulation que l'inverse de la pente de la proportion de diffusion confocale en fonction de la profondeur pourrait constituer une estimation du libre parcours moyen de diffusion du milieu. Cette observation, pour laquelle nous n'avons pas établi de justification, serait à approfondir pour établir la relation entre ces deux grandeurs. Un nouvel estimateur de la proportion de diffusion confocale pourrait également être construit à partir de l'étude de la corrélation spatiale du champ rétrodiffusé, qui chute en régime de diffusion multiple.

La seconde problématique concerne la détermination de la direction du fibrage dans les alliages de titane, c'est-à-dire la direction d'élongation privilégiée des grains souvent lié au forgeage. En fonction de l'histoire thermo-mécanique de la pièce il peut être marqué, comme dans la billette de TA6V étudiée, ou absent, comme dans la billette de Ti17. Il s'agit d'un paramètre important à prendre en compte pour l'inspection de pièces, les fissures se développant le plus souvent le long de celui-ci. Nous avons proposé un algorithme pour déterminer la direction locale du fibrage à partir de la matrice de réflexion acquise dans une base d'ondes planes (notées  $\mathbf{k}_{in}$  en émission et  $\mathbf{k}_{out}$  en réception). En régime de diffusion simple, nous avons montré que la transformée de Fourier de la réflectivité du milieu peut être visualisée dans le plan  $\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out}$ . En raison des propriétés de la transformée de Fourier, il est alors possible de déterminer la direction privilégiée d'élongation du milieu. En régime de diffusion multiple, nous avons montré que la représentation des données dans le plan  $\mathbf{k}_{out} - \mathbf{k}_{in}$  permet de visualiser le pic de rétrodiffusion cohérente. Cependant, pour aller plus loin, il serait souhaitable d'analyser l'impact de la répartition des angles d'incidence utilisés lors de l'acquisition ainsi que d'étudier l'importance du choix des angles d'incidences et l'effet de l'ouverture limitée du réseau sur les cartes d'intensités observées.



## RÉSUMÉ

---

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent l'inspection de milieux complexes par ultrasons multi-éléments dans un contexte de contrôle non-destructif. Les matériaux d'intérêt sont les alliages de titane, dont la microstructure complexe à plusieurs échelles induit de la diffusion multiple dans les signaux rétrodiffusés. Ces alliages peuvent également présenter un fibrage, direction d'orientation privilégiée de la microstructure. L'acquisition des signaux ultrasonores est réalisée sous forme de matrices de réflexion dans la base canonique, encore appelées matrices des réponses inter-éléments. Pour mieux comprendre le régime de diffusion multiple, une modélisation simple basée sur le développement de Born est proposée pour calculer la contribution de chaque ordre de diffusion (simple, double, triple, etc.) à la matrice de réflexion totale et analyser leurs corrélations. Elle permet ainsi de calculer les réponses en réflexion d'un milieu composé de diffuseurs isotropes fluides répartis aléatoirement. Il apparaît une forte corrélation entre les matrices de diffusion simple et multiple, principalement due à la diffusion récurrente. Celle-ci est une composante de la diffusion multiple pour laquelle les premier et dernier diffuseurs se situent dans la même cellule de résolution, et présente des propriétés similaires à la diffusion simple, en particulier « l'effet mémoire » se manifestant en champ lointain par une corrélation longue-portée le long des anti-diagonales de la matrice. La simulation permet également de mieux comprendre les estimateurs de proportion de diffusion simple, basés sur l'effet mémoire, qui sont proposés dans la littérature. Ceux-ci sont en fait des estimateurs de la proportion de diffusion confocale, regroupant à la fois diffusion simple et récurrente. Une nouvelle séparation des signaux de diffusion confocale est proposée dans la base focalisée, espace d'étude plus récent permettant d'obtenir des informations locales sur le milieu. Expérimentalement, les estimateurs de proportion de diffusion confocale sont appliqués aux alliages de titane et prouvent qu'il existe une forte contribution de diffusion multiple dans les signaux rétrodiffusés aux fréquences d'inspection. Enfin, une méthode de traitement de la matrice de réflexion acquise à l'aide d'une sonde bidimensionnelle est proposée pour déterminer la direction du fibrage de matériaux anisotropes. Cette méthode est validée par la simulation numérique précédente adaptée à des segments de diffuseurs alignés, à la fois dans un régime de diffusion simple et de diffusion multiple, et appliquée à la détermination du fibrage d'alliages de titane.

## MOTS CLÉS

---

Acoustique, ultrasons, méthode matricielle, anisotropie, diffusion multiple, alliages de titane.

## ABSTRACT

---

This manuscript describes non-destructive testing of complex media by multi-element ultrasonic methods. Materials of interest are titanium alloys, whose complex microstructure triggers multiple scattering in the backscattered ultrasonic signals. Those alloys can also have a grain flow which makes their microstructure anisotropic. Measured signals are reflection matrices in the canonical basis, also known as inter-element response matrices. To analyze the multiple scattering regime, a simple numerical model is developed based on the Born expansion, to compute the contribution of the reflection matrices associated with each scattering order (single, double, triple...) to the total scattering matrix and analyze their correlations. It allows the computation of reflection matrices of a medium composed of randomly distributed isotropic fluid scatterers. A strong correlation is observed between single and multiple scattering matrices, mainly due to recurrent scattering. The latter is a component of multiple scattering for which the first and last scatterers are located in the same resolution cell. It shares some common properties with single scattering including the "memory effect", which results in a long-range correlation along the matrix anti-diagonals. The proposed simulation also enables the study of the single scattering proportion estimators defined in the literature. We show that they rather estimate the confocal scattering weight, which contains both single and recurrent scattering. Then, a new tool to separate confocal scattering is proposed, which requires the projection of the reflection matrices in focused bases in order to improve the selection of local information. Confocal scattering proportion estimators are experimentally calculated for titanium alloys samples, and show a significant contribution of multiple scattering in the backscattered signals at inspection frequencies. Finally, a method to determine the anisotropy direction of materials is proposed based on reflection matrix acquired with a two-dimensional transducer array. The method is validated with the simulation adapted to segments of aligned scatterers, both in the single and multiple scattering regimes, and applied to the characterization of titanium alloys grain flow.

## KEYWORDS

---

Acoustics, ultrasound, matrix approach, anisotropy, multiple scattering, titanium alloys.